MAT302 - Feuille 2

Exercice 1 1. Si a, b, c satisfont l'égalité, alors pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0,-1,1\}$,

$$\frac{1}{x(x+1)} = a + \frac{b(x-1)}{x} + \frac{c(x-1)}{x+1}$$

donc en passant à la limite en 1, on obtient $\frac{1}{2} = a$

De la même façon on obtient $b = -1$ et $c = \frac{1}{2}$.

On peut vérifier que réciproquement ces nombres conviennent, mais comme on sait que la décomposition en éléments simples de $\frac{1}{x(x^2-1)}$ existe, c'est superflu, ses coeff sont forcément ceux-là.

2. $$S_m = \sum_{k=2}^{m} \frac{1}{k(k^2-1)} = \sum_{k=2}^{m} \left(\frac{1}{2}\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} + \frac{1}{2}\frac{1}{k+1} \right)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{m}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{m}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}\right)$$

sommes télescopiques

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{m}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{m}\right) + \frac{1}{4}$$

3. Ainsi $(S_m)_{m \geq 2}$ converge vers $\frac{1}{4}$ puisque $\frac{1}{m+1} - \frac{1}{m} \xrightarrow[m \to +\infty]{} 0$.

4. La convergence de la série $\left(\sum_{k \geq 2} \frac{1}{k(k^2-1)}\right)$ signifie précisément la convergence de la suite de ses sommes partielles donc d'après la question 3, cette série converge, et sa somme $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k(k^2-1)}$ vaut $\frac{1}{4}$.

<u>Exercice 2</u> <u>La série converge</u> ssi la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ des sommes partielles

$\left(S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k\right)$ converge. Comme le TG est positif, c'est équivalent à ce que

<u>$(S_n)_{n\geq 0}$ soit majorée.</u>

<u>Si $(S_n)_{n\geq 0}$ est majorée</u>, $(S_{n^2})_{n\geq 0} = \left(\sum_{k=0}^{n^2} u_k\right)_{n\geq 0}$ aussi (c'est une sous suite),

donc <u>$(S_{n^2})_{n\geq 0}$ converge</u> (c'est elle aussi une suite croissante).

Réciproquement, si <u>cette sous-suite converge</u>, elle est majorée par une constante M,

et alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme $n \leq n^2$ et $u_k \geq 0$ pour tout $k \in [\![n, n^2]\!]$,

$S_n \leq S_{n^2} \leq M$. Donc <u>(S_n) est majorée.</u>

On a donc bien l'équivalence voulue.

<u>Exercice 3</u> 1. $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e^n}{n^5} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ par croissances comparées

En particulier (u_n) ne tend pas vers 0 donc la série diverge.

2. $0 \leq u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n \times \frac{1}{n^2} \leq \underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)^n}_{}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

TG d'une série géométrique convergente puisque $\left|\frac{2}{3}\right| < 1$

Donc par thm de comparaisons de séries à TG positif, $\left(\sum_{n\geq 1} u_n\right)$ converge.

3. $0 \leq u_n \leq \frac{e^{-n}}{3}$, TG d'une série geom de raison $e^{-1} \in]-1,1[$. La conclusion est la même que pour 2.

4. $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ et $\left(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}\right)$ diverge (série harmonique) donc par comparaison de séries à TG positif, $\left(\sum u_n\right)$ diverge également.

5. $n \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{=} n\left(\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$ (car $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x + o(x)$)

$= \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$

La conclusion est la même que dans la question précédente.

6. $u_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \times \frac{n^n}{n!} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}$

$\ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}\right) = -n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = -n\left(\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = -1+o(1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -1$

donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \exp(-1) \in]-1,1[$.

Donc d'après le critère de d'Alembert, $\left(\sum_{n\geq 1} u_n\right)$ converge.

7. $n^2 u_n = n^3 e^{-n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées, donc $u_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Or $\left(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}\right)$ converge (série de Riemann $\left(\sum \frac{1}{n^\alpha}\right)$ avec $\alpha>1$) donc par comparaison de séries à TG positif, $\left(\sum_{n\geq 0} u_n\right)$ converge.

8. $\ln(u_n) = n^2\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) = n^2\left(-\frac{1}{n} \cancel{\quad} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = -n - \frac{1}{2} + o(1)$

Donc $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \exp\left(-n-\frac{1}{2}+o(1)\right) = e^{-n} e^{-\frac{1}{2}} \underbrace{e^{o(1)}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1}$ puisque $e^x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$

Donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-n}}{\sqrt{e}}$ TG d'une série géométrique de raison $\frac{1}{e} \in]-1,1[$ donc convergente.

Donc par thm de comparaison de séries à TG positif, $\left(\sum u_n\right)$ converge.

<u>Exercice 41</u>. 1. $1 - n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1 - n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = 1 - \left(1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$

donc $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n\sqrt{n+1}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\,\frac{1}{n\sqrt{n}}$ car $\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} = \sqrt{1+\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$

$= \frac{1}{2}\,\frac{1}{n^{3/2}}$

$\frac{3}{2}>1$ donc la série $\left(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{3/2}}\right)$ converge (Série de Riemann)

donc par comparaison de séries à TG positifs $\left(\sum u_n\right)$ converge.

2. $\frac{\ln n}{n} \geq \frac{1}{n}$ à partir d'un certain rang puisque $\ln(n) \to +\infty$

Or $\left(\sum \frac{1}{n}\right)$ diverge donc par comparaison $\left(\sum u_n\right)$ diverge également.

3. $u_n \geq 1$ donc $u_n \not\to 0$ donc $\left(\sum u_n\right)$ diverge.

4. $u_n = \frac{1}{n}\left(e^{1/n} - 1\right) = \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right) = \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$

or $\left(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}\right)$ converge (série de Riemann) donc par comparaison [...]

$\underline{\left(\sum u_n\right) \text{ converge}}$.

5. $x^2 e^{-x} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^4}\right)$ donc $(\sqrt{n})^2 e^{-\sqrt{n}} = o\left(\frac{1}{(\sqrt{n})^4}\right) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et on conclut

comme précédemment. $\underline{\left(\sum u_n\right) \text{ converge}}$.

6. $u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) - \frac{1}{n} = \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{3n^3}$

or $\left(\sum \frac{1}{3n^3}\right)$ converge (série de Riemann avec $3>1$) donc par comparaison [...]

$\left(\sum u_n\right)$ converge.

7. $\ln(u_n) = n \ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = n\left(-\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

$$= -\sqrt{n} - \frac{1}{2} + o(1)$$

donc $u_n = e^{-\sqrt{n}} e^{-\frac{1}{2}} \underbrace{e^{o(1)}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{e}} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ (cf. 5.)

~~donc~~ Or $\left(\sum \frac{1}{n^2}\right)$ cv (Riemann) donc par comparaison [...] $\left(\sum u_n\right)$ cv.

8. $\underline{\text{Si } \alpha \leq 1}$, $\frac{\ln n}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n^\alpha}$ à partir d'un certain rang et $\left(\sum \frac{1}{n^\alpha}\right)$ diverge (Riemann)

donc par comparaison $\left(\sum u_n\right)$ diverge.

$\underline{\text{Si } \alpha > 1}$ il existe $\beta \in]1, \alpha[$. On a alors $u_n = \frac{\ln(n)}{n^{\alpha-\beta}} \times \frac{1}{n^\beta} = o\left(\frac{1}{n^\beta}\right)$

car $\frac{\ln(n)}{n^{\alpha-\beta}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées.

Or $\left(\sum \frac{1}{n^\beta}\right)$ converge (Riemann) donc par comparaison [...] $\underline{\left(\sum u_n\right) \text{ converge}}$

3. Le contenu de la parenthèse tend vers 0 donc on va avoir besoin d'un développement asymptotique. Commençons par l'ordre 1 :

$$\sin(x) + \cos(x) + (\ln(1-x))^2 - e^x \underset{x\to 0}{=} x + \cancel{1} - \cancel{(-x)^2} - 1 - x + o(x) = o(x)$$

Cela nous montre juste que $u_n = \cancel{n^2}\, o\left(\frac{1}{n}\right) = o\cancel{(n)}(n)$, ça ne suffit pas.

A l'ordre 2 :

$$f(x) = \sin(x) + \cos(x) + \underbrace{(\ln(1-x))^2}_{(x+o(x))^2 = x^2 + \underbrace{2x\,o(x) + (o(x))^2}_{o(x^2)}} - e^x = x + 1 - \frac{x^2}{2} + \cancel{x^2} - 1 - x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) = o(x^2)$$

Cette fois cela nous donne $u_n = o(1)$, ça ne suffit toujours pas !

A l'ordre 3 : $f(x) = x - \frac{x^3}{6} + 1 - \frac{x^2}{2} + x^2 + x^3 - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3) = \frac{2x^3}{3} + o(x^3)$

$$\left((\ln(1-x))^2 = \left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^2 = x^2 + x^3 + o(x^3) \right)$$

Donc $u_n = n^2\left(\frac{2}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \sim \frac{2}{3n}$ TG d'une série divergente.

Donc par comparaison [...] $(\sum u_n)$ diverge.

<u>Exercice 6</u> 1. Série géométrique de raison 3^{-1} donc convergente.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 3^{-n} \underset{\text{Cours}}{=} \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

2. Série géométrique de raison $\frac{1}{5}$ donc convergente

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{2}{5^n} = 2 \times \frac{\frac{1}{5^3}}{1-\frac{1}{5}} = \frac{2}{100}$$

3. <u>Cours</u> Cette série est convergente et sa somme vaut $\exp(1) = e$.

4. $$\sum_{k=2}^{n} \frac{3}{(k-1)!} = \sum_{\ell=1}^{n-1} \underbrace{\frac{3}{\ell!}}_{\text{TG d'une série convergente (exponentielle)}}$$

donc $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{3}{(k-1)!} = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \frac{3}{\ell!} = 3\left(\sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{1}{\ell!} - 1\right) = 3(e-1)$.

5. $$\sum_{k=0}^{n} \frac{k+2}{k!} = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!}}_{= \underbrace{\sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{1}{\ell!}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} e}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{2}{k!}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 2e}$$

donc la série converge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+2}{n!} = 3e$.

6. $$\frac{n^2+n+1}{n!} = \frac{n(n-1)+2n+1}{n!}$$

donc $$\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2+k+1}{k!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k-1)}{k!} + \sum_{k=1}^{n} \frac{2k}{k!} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} e-1}$$

$$= \underbrace{\sum_{k=2}^{n} \frac{k(k-1)}{k!}}_{= \underbrace{\sum_{\ell=0}^{n-2} \frac{1}{\ell!}}_{\to e}} + \underbrace{\sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{2}{\ell!}}_{\to 2e} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}}_{e-1}$$

donc $\displaystyle\left(\sum_{n\geq 1} \frac{n^2+n+1}{n!}\right)$ converge et sa somme vaut $4e-1$.

<u>Exercice 7</u> $(\sum u_n)$ converge donc $u_n \to 0$ donc $1+u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$ donc

$\dfrac{u_n}{u_n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$ donc par comparaison de séries à TG positif,

$\left(\sum \dfrac{u_n}{u_n+1}\right)$ cv.

Exercice 8

1. <u>Si $0<\alpha<1$</u>, la fonction $t\in\mathbb{R}_+^* \longmapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est décroissante donc

$$\forall k\geq 1 \qquad \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha}dt \leq \frac{1}{k^\alpha}$$

$$\text{donc } \forall n\geq 2 \quad \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \int_1^n \frac{1}{t^\alpha}dt \leq \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^\alpha}$$

$$\int_1^n \frac{1}{t^\alpha}dt = \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^n = \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

$$\text{Donc} \quad \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha} = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^\alpha} + \frac{1}{n^\alpha} \geqslant \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \frac{1}{n^\alpha}$$

$$\text{et} \quad \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j^\alpha} = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(k+1)^\alpha} + 1 \leqslant \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} + 1$$

Donc

$$1 + \underbrace{\frac{1-\alpha}{n^\alpha \times n^{1-\alpha}}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0} \leqslant \frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha}}{\frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}} \leqslant 1 + \underbrace{\frac{1-\alpha}{n^{1-\alpha}}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$$

$$\text{Donc} \quad \boxed{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}}$$

<u>Si $\alpha=0$</u>, $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha} = \frac{n(n+1)}{2}$ donc $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{n^2}{2}$

<u>Si $\alpha<0$</u> la fonction $t\in\mathbb{R}_+^* \longmapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est croissante donc

$$\forall k\geqslant 1 \qquad \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_k^{k+1}\frac{1}{t^\alpha}dt \leqslant \frac{1}{(k+1)^\alpha}$$

les mêmes calculs que précédemment donnent

$$\frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} + 1 \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha} \leqslant \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \frac{1}{n^\alpha}$$

$$\text{puis} \quad 1 + \underbrace{\frac{1-\alpha}{n^{1-\alpha}}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0} \leqslant \frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha}}{\frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}} \leqslant 1 + \left.\frac{1-\alpha}{\underbrace{n^\alpha n^{1-\alpha}}_{=n}}\right)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\text{et de même} \quad \boxed{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}}$$

2. Soit $\alpha > 1$. La fonction $t \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est décroissante donc :

$$\forall k \geq 1 \qquad \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha}$$

donc $\forall n \geq 1$ $\forall N \geq n$ $\displaystyle\sum_{k=n}^{N} \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \int_n^{N+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \sum_{k=n}^{N} \frac{1}{k^\alpha}$

donc $\displaystyle\underbrace{\int_n^{N+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \sum_{k=n}^{N} \frac{1}{k^\alpha}}_{(1)}$ et $\displaystyle\underbrace{\sum_{k=n}^{N} \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \int_n^{N+1} \frac{dt}{t^\alpha}}_{(2)}$

$$\sum_{k=n}^{N} \frac{1}{(k+1)^\alpha} = \sum_{j=n}^{N+1} \frac{1}{j^\alpha} - \frac{1}{n^\alpha}$$

Or $\displaystyle\int_n^{N+1} \frac{dt}{t^\alpha} = \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right]_n^{N+1} = \frac{(N+1)^{\overbrace{-\alpha+1}^{<0}}}{-\alpha+1} - \frac{n^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}$

donc par passage à la limite qd $N \to +\infty$ dans (1), on a

$$\frac{n^{1-\alpha}}{\alpha-1} \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$$

Et par passage à la limite qd $N \to +\infty$ dans (2), on a

$$\sum_{j=n}^{+\infty} \frac{1}{j^\alpha} \leq \frac{n^{1-\alpha}}{\alpha-1} + n^{-\alpha}$$

donc

$$1 \leq \frac{\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}}{\frac{n^{1-\alpha}}{\alpha-1}} \leq 1 + \frac{n^{-\alpha}}{\frac{n^{-\alpha+1}}{\alpha-1}} = 1 + \frac{\alpha-1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$$

donc $\boxed{\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{\alpha-1}}$.

3. $\ln(n!) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(k)$. La fonction $\ln$ est croissante donc

$$\forall k \geq 1 \qquad \ln(k) \leq \int_k^{k+1} \ln(t)\,dt \leq \ln(k+1)$$

donc $\forall n \geq 2$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \ln k \leq \underbrace{\int_1^{n} \ln(t)\,dt}_{= [t\ln t - t]_1^n = n\ln n - n + 1} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k+1) = \sum_{j=2}^{n} \ln(j) = \sum_{j=1}^{n} \ln(j)$

donc $\sum_{k=1}^{n} \ln k = \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k) + \ln n \leq (n+1)\ln n - n + 1$

et $\sum_{k=1}^{n} \ln k \geq n \ln n - n + 1$

donc $\underbrace{\frac{n\ln n - n+1}{n \ln n}}_{= 1 - \underbrace{\frac{n-1}{n\ln(n)}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}} \leq \frac{\sum_{k=1}^{n} \ln k}{n \ln n} \leq \underbrace{\frac{(n+1)\ln n - n+1}{n \ln n}}_{= 1 + \underbrace{\frac{\ln n - n+1}{n\ln n}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}}$

donc $\boxed{\sum_{k=1}^{n} \ln(k) \underset{n\to+\infty}{\sim} n \ln n}$

Exercice 9 1. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tq :

$\forall k \geq N \quad (1-\varepsilon) v_k \leq u_k \leq (1+\varepsilon) v_k$

Par suite, $\forall n \geq N$, $\forall m \geq n$ $\quad \sum_{k=n}^{m} (1-\varepsilon) v_k \leq \sum_{k=n}^{m} u_k \leq \sum_{k=n}^{m} (1+\varepsilon) v_k$

et par passage à la limite ($(\sum u_n)$ converge, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et (u_n) et (v_n) sont positives donc par thm de comparaison, $(\sum v_n)$ converge également) quand $m \to +\infty$:

$$\underline{\forall n \geq N, \quad (1-\varepsilon)\left(\sum_{k=n}^{+\infty} v_k\right) \leq \sum_{k=n}^{+\infty} u_k \leq (1+\varepsilon)\left(\sum_{k=n}^{+\infty} v_k\right)}$$

Les parties soulignées signifient précisément que $\boxed{\sum_{k=n}^{+\infty} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n}^{+\infty} v_k}$.

2. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tq : $\forall k \geq N$, $(1-\varepsilon) v_k \leq u_k \leq (1+\varepsilon) v_k$

Par suite, $\forall n \geq N$ $(1-\varepsilon)\sum_{k=N}^{n} v_k \leq \sum_{k=N}^{n} u_k \leq (1+\varepsilon) \sum_{k=N}^{n} v_k$

donc $\forall n \geq N$, $(1-\varepsilon)\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right) - (1-\varepsilon)\sum_{k=0}^{N-1} v_k \leq \sum_{k=0}^{n} u_k - \sum_{k=0}^{N-1} u_k$

donc $\forall n \geq N$, $(1-\varepsilon) - \frac{\overbrace{\left((1-\varepsilon)\sum_{k=0}^{N-1} v_k - \sum_{k=0}^{N-1} u_k\right)}^{=: C}}{\sum_{k=0}^{n} v_k} \leq \frac{\sum_{k=0}^{n} u_k}{\sum_{k=0}^{n} v_k}$ (on suppose N assez gd pour que $\sum_{k=0}^{N} v_k > 0$, ce qui est possible car $\sum_{k=0}^{n} v_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, cf ci-après)

Or $\left(\sum v_k\right)$ est une série à termes positifs divergente, donc (*) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

donc il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N_2$ $\quad \dfrac{C}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k} \leq \varepsilon.$

Ainsi $\forall n \geq \max(N, N_2)$, $\quad 1-2\varepsilon \leq \dfrac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k}$

De même, on peut trouver N_3 tq $\forall n \geq \max(N, N_3)$, $\quad \dfrac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k} \leq 1+2\varepsilon$

Ceci montre que $\dfrac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, ie que $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n} v_k}$

(*) car c'est le cas de $\left(\sum u_n\right)$ et les deux séries sont de même nature par thm de comparaison

3. Si cette constante existe, elle n'est autre que la limite qd $n\to+\infty$ de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+\sqrt{k}}$, ie la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2+\sqrt{k}}$. $\left(\left(\sum \dfrac{1}{k^2+\sqrt{k}}\right)\right.$ est bien convergente car $0 \leq \dfrac{1}{k^2+\sqrt{k}} \leq \dfrac{1}{k^2}$ TG d'une série de Riemann convergente donc par thm de comparaison...$\Big)$

On veut donc montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2+\sqrt{k}} - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

ie que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2+\sqrt{k}} = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, ou encore que $\boxed{\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2+\sqrt{k}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}}$ (1)

Pour cela, observons que $\dfrac{1}{n^2+\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n(n-1)}$, donc d'après la question 1,

$\boxed{\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2+\sqrt{k}} \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k-1)}}$ (2)

Or $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=n+1}^{N} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{N}$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
pour tout $N \geq n+1$

donc par passage à la limite qd $N\to+\infty$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{n}.$$

(2) donne donc l'équivalent (1) souhaité. $\square$

Exercice 10 1. $\forall n\in\mathbb{N}$, $0\leq \frac{a_n}{10^n}\leq 9\cdot\frac{1}{10^n}$, TG d'une série géométrique de raison $\frac{1}{10}\in]-1,1[$ donc convergente. Donc par comparaison de séries à TG positifs, $\left(\sum \frac{a_n}{10^n}\right)$ CV.

2. Supposons qu'il existe $N\in\mathbb{N}$ et $p\in\mathbb{N}^*$ tq $\forall m\geq N$, $a_{m+p}=a_m$. Alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{10^n}=\underbrace{\sum_{n=0}^{N-1}\frac{a_n}{10^n}}_{r}+\sum_{n=N}^{+\infty}\frac{a_n}{10^n}=r+\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=N+kp}^{N+kp+p-1}\frac{a_n}{10^n}\right)$$ (sommation par paquets)

$$=r+\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=N+kp}^{N+kp+p-1}\frac{a_{n-kp}}{10^n}\right)$$ par périodicité

$$=r+\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=N}^{N+p-1}\frac{a_m}{10^{m+kp}}\right)$$

$$=r+\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{10^{kp}}\underbrace{\sum_{m=N}^{N+p-1}\frac{a_m}{10^m}}_{S}\right)$$

$$=r+S\times\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(10^p)^k}$$

$$=\underbrace{r}_{\in\mathbb{Q}}+\underbrace{S}_{\in\mathbb{Q}}\times\underbrace{\frac{1}{1-\frac{1}{10^p}}}_{\in\mathbb{Q}}$$

Donc $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{10^n}\in\mathbb{Q}$.

Il y avait une erreur dans l'énoncé !

3. Pour $n\in\mathbb{N}$, posons $H(n)$: $x_n\in\{0,1,\dots,9\}$ et $10^{n+1}\left(x-\sum_{k=0}^{n}\frac{x_k}{10^k}\right)\in[0,10[$.

Prouvons par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $H(n)$ est vraie.

Initialisation : $x\in[0,10[$ donc $x_0=\lfloor x\rfloor\in[\![0,9]\!]$ et

$$10^1\left(x-\sum_{k=0}^{0}\frac{x_k}{10^k}\right)=10(x-x_0)\in[0,10[.$$ Donc $H(0)$ est vraie.

car $x-x_0\in[0,1[$ par déf de la partie entière.

Hérédité Soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons $H(n)$ vraie.

$$x_{n+1}=\left\lfloor 10^{n+1}\left(x-\sum_{k=0}^{n}\frac{x_k}{10^k}\right)\right\rfloor$$ donc d'après $H(n)$, $x_{n+1}\in[\![0,9]\!]$.

En outre, $$10^{n+2}\left(x-\sum_{k=0}^{n+1}\frac{x_k}{10^k}\right)=10\left(\underbrace{\underbrace{10^{n+1}\left(x-\sum_{k=0}^{n}\frac{x_k}{10^k}\right)}_{y_n}-\underbrace{10^{n+1}\cdot\frac{x_{n+1}}{10^{n+1}}}_{\lfloor y_n\rfloor}}_{\in[0,1[}\right)\in[0,10[$$

ce qui conclut la récurrence.

4. La convergence se justifie comme en 1.

En outre $\forall n \in \mathbb{N}$, $10^{n+1}\left(x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x_k}{10^k}\right) \in [0, 10[$ donc

$$0 \leq x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x_k}{10^k} < \frac{1}{10^n}$$

Donc par le théorème des gendarmes $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x_k}{10^k}\right)_n$ tend vers x. Autrement dit,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x_k}{10^k} = x.$$

5. Posons $x = \frac{11}{7}$. $x_0 = \lfloor x \rfloor = 1$

$$y_1 := 10.\left(x - \sum_{k=0}^{0} \frac{x_k}{10^k}\right) = 10.(x - \lfloor x \rfloor) = \frac{40}{7} \quad \text{donc } x_1 = \left\lfloor \frac{40}{7} \right\rfloor = 5 \ \left(= \frac{35}{7}\right)$$

$$y_2 := 10^2.\left(x - \sum_{k=0}^{1} \frac{x_k}{10^k}\right) = 10^2\left(x - \lfloor x \rfloor - \frac{x_1}{10}\right) = 10\,(y_1 - \lfloor y_1 \rfloor) = 10.\frac{5}{7} = \frac{50}{7}$$

$$\text{donc } \boxed{x_2 = \left\lfloor \frac{50}{7} \right\rfloor = 7} \ \left(= \frac{49}{7}\right)$$

$$y_3 := 10^3\left(x - \sum_{k=0}^{2} \frac{x_k}{10^k}\right) = 10\left(10^2\left(x - \sum_{k=0}^{1} \frac{x_k}{10^k}\right) - x_2\right) = 10\,(y_2 - \lfloor y_2 \rfloor) = 10.\frac{1}{7} = \frac{10}{7}$$

$$\text{donc } x_3 = \left\lfloor \frac{10}{7} \right\rfloor = 1 \ \left(= \frac{7}{7}\right)$$

De même $y_4 = 10^4\left(x - \sum_{k=0}^{3} \frac{x_k}{10^k}\right) = 10\,(y_3 - \lfloor y_3 \rfloor) = 10.\frac{3}{7} = \frac{30}{7}$ donc $x_4 = \left\lfloor \frac{30}{7} \right\rfloor = 4 \ \left(= \frac{28}{7}\right)$

$$y_5 = 10\,(y_4 - \lfloor y_4 \rfloor) = 10.\frac{2}{7} = \frac{20}{7} \quad \text{donc } x_5 = \left\lfloor \frac{20}{7} \right\rfloor = 2 \ \left(= \frac{14}{7}\right)$$

$$y_6 = 10\,(y_5 - \lfloor y_5 \rfloor) = 10.\frac{6}{7} = \frac{60}{7} \quad \text{donc } x_6 = \left\lfloor \frac{60}{7} \right\rfloor = 8 \ \left(= \frac{56}{7}\right)$$

$$y_7 = 10\,(y_6 - \lfloor y_6 \rfloor) = \frac{40}{7} \quad \text{donc} \quad x_7 = \left\lfloor \frac{40}{7} \right\rfloor = 5 \ \left(= \frac{35}{7}\right)$$

$$y_8 = 10\,(y_7 - \lfloor y_7 \rfloor) = \frac{50}{7} \quad \text{donc } \boxed{x_8 = \left\lfloor \frac{50}{7} \right\rfloor = 7} = x_2$$

Et à partir de là... $y_9 = 10\,(y_8 - \lfloor y_8 \rfloor) = \frac{10}{7}$ donc $x_9 = \left\lfloor \frac{10}{7} \right\rfloor = 1 = x_3$

et plus généralement $\underline{x_{n+6} = x_n \text{ pour tout } n \geq 2}$

Comment le justifier proprement ?

Définissons par récurrence une suite $(r_n)_{n\geq 0}$ par : $\begin{cases} \bullet\ r_0 \text{ est le reste de la division euclidienne de } 11 \text{ par } 7 \\ \bullet\ r_{n+1} \text{ est le reste de la division euclidienne de } 10.r_n \text{ par } 7 \end{cases}$

Par construction, $\underbrace{y_{n+1} = \frac{10 r_n}{7}}_{H(n)}$ donc $x_{n+1} = \left\lfloor \frac{10 r_n}{7} \right\rfloor$ est le quotient de la division euclidienne de $10 r_n$ par 7

Prouvons $H(n)$ par récurrence : Initialisation $y_1 = 10\left(\frac{11}{7} - \left\lfloor \frac{11}{7} \right\rfloor\right) = \frac{10 r_0}{7}$ par déf de la division eucl.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $H(n)$ vraie.

$$\text{Alors } y_{n+2} = 10\left(y_{n+1} - \lfloor y_{n+1} \rfloor\right) = 10\left(\frac{10 r_n}{7} - \left\lfloor \frac{10 r_n}{7} \right\rfloor\right) = 10 . \frac{r_{n+1}}{7} \quad \text{"} \quad \text{"}$$

$\square$

Or le reste de la division euclidienne par 7 ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs (de 0 à 6), donc il existe $n_0, p \in \mathbb{N}$ tq $r_{n_0+p} = r_{n_0}$.

Montrons par récurrence qu'on a alors $r_{n+p} = r_n$ pour tout $n \geq n_0$.

L'initialisation est donnée.

<u>Hérédité</u> Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $r_{n+p} = r_n$. Alors r_{n+p+1} reste de la division euclidienne de $10 r_{n+p}$ par 7, est égal au reste de la division euclidienne de $10 r_n$ par 7, à savoir r_{n+1}, ce qui conclut.

$\square$

Ainsi $x_{n+1} = \left\lfloor \frac{10 r_n}{7} \right\rfloor$ est elle aussi périodique.

La preuve se généralise immédiatement à n'importe quel nombre rationnel, en remplaçant 7 par le dénominateur de ce nombre.

<u>Exercice 11</u> 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k \underset{\substack{\text{puisque } n \leq 2^n \\ \text{et } u_k \geq 0 \text{ pour tout } k}}{\leq} \sum_{k=1}^{2^n} u_k = \sum_{j=0}^{n-1} \Big(\sum_{k=2^j}^{2^{j+1}} \underbrace{u_k}_{\substack{\leq u_{2^j} \text{ par} \\ \text{décroissance} \\ \text{de } (u_n)}} \Big) \leq \sum_{j=0}^{n-1} 2^j . u_{2^j} = \sum_{j=0}^{n-1} v_j$

Donc si $(\sum v_n)$ converge la suite des sommes partielles de $(\sum u_k)$ est majorée, donc comme c'est une série à termes positifs, elle converge.

De façon similaire $\displaystyle\sum_{k=1}^{2^n} u_k = \sum_{j=0}^{n-1} \Big(\sum_{k=2^j}^{2^{j+1}} u_k \Big) \geq \sum_{j=0}^{n-1} 2^j u_{2^{j+1}} = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} 2^{j+1} u_{2^{j+1}}$

$$= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} v_j$$

donc si $(\sum u_n)$ converge la suite de ses sommes partielles est majorée, donc celle de $(\sum v_n)$ aussi, donc $(\sum v_n)$ converge. Les séries sont donc bien de même nature

2. Si $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$, $v_n = 2^n u_{2^n} = 2^n \frac{1}{(2^n)^\alpha} = 2^{n(1-\alpha)} = \left(2^{1-\alpha}\right)^n$, terme général d'une série géométrique qui converge si et seulement si $2^{1-\alpha} < 1$ ie ssi $1-\alpha < 0$ ou encore $\underline{\underline{\alpha > 1}}$

On retrouve donc bien, grâce à la question 1, le critère de convergence des séries de Riemann.

3. Si $u_n = \frac{1}{n \ln n}$, $v_n = 2^n u_{2^n} = \cancel{2^n} \times \frac{1}{\cancel{2^n} \ln(2^n)} = \frac{1}{n \ln(2)} = \frac{1}{\ln(2)} \times \frac{1}{n}$, TG d'une série divergente. Donc d'après la question 1, $(\sum u_n)$ diverge.

Si $u_n = \frac{1}{n \ln n \ln(\ln n)}$, $v_n = 2^n u_{2^n} = \frac{1}{\ln(2^n)\ln(\ln 2^n)} = \frac{1}{n\ln(2)\ln(n\ln(2))}$

$$= \frac{1}{\ln(2)} \times \frac{1}{\underbrace{n(\ln n + \ln 2)}_{\sim n \ln n}}$$

$$\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\ln(2)} \frac{1}{n\ln(n)}$$ TG d'une série divergente d'après ce qui précède.

Donc par thm de comparaison de séries à termes positifs, $(\sum v_n)$ diverge, donc par la question 1, $(\sum u_n)$ aussi.

Exercice 12

1. La série étant convergente, la suite des restes $\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k\right)_n$ tend vers 0. Étant donné $\varepsilon > 0$, on peut donc trouver N tq $\underbrace{\left|\sum_{k=N+1}^{+\infty} u_k\right|}_{= \sum_{k=N+1}^{+\infty} u_k} \leq \varepsilon$, la suite étant positive

Or pour tout $n \geq N$, $\sum_{k=N+1}^{n} u_k \leq \sum_{k=N+1}^{+\infty} u_k \leq \varepsilon$ toujours par positivité

$(u_k)_k$ étant décroissante, pour tout $k \in [\![N, n]\!]$, $u_n \leq u_k$ donc $(n-N)u_n \leq \sum_{k=N+1}^{n} u_k$

On a donc bien : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, (n-N)u_n \leq \varepsilon$.

2. Soit $\varepsilon > 0$. On fixe N comme dans la question précédente. $(Nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 puisque $(\sum u_n)$ cv, donc il existe $N' \in \mathbb{N}$ tq : $\forall n \geq N'$, $Nu_n \leq \varepsilon$

Ainsi $\forall n \geq \max(N, N')$, $nu_n \leq \varepsilon + Nu_n \leq 2\varepsilon$

Quitte à couper les ε en 2, on a bien montré que $(nu_n)_n$ tend vers 0.

3. On peut prendre par exemple la suite $u_n = \begin{cases} \frac{1}{n} \text{ si } n = 2^p \text{ avec } p \in \mathbb{N} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

On a $nu_n = 1$ pour $n = 2^p$ donc (nu_n) ne tend pas vers 0. Mais la suite des sommes partielles est majorée par $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2^p} = 2$ donc comme c'est une série à TG positif, cela prouve la convergence.

Exercice 13 Suivons l'indication : (on suppose que (u_n) n'est pas identiquement nulle sinon il n'y a rien à montrer ; donc S_n est >0 à partir d'un certain n_0)

$$\ln(S_{n+1}) - \ln(S_n) = \ln\left(\frac{S_{n+1}}{S_n}\right) = \ln\left(1 + \frac{u_n}{S_n}\right)$$

Si $(\sum u_n)$ cv, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et S_n est minorée par le 1er terme non nul u_{n_0} de la suite donc $\frac{u_n}{S_n} \to 0$ donc $\ln\left(1+\frac{u_n}{S_n}\right) \sim \frac{u_n}{S_n}$. Donc par comparaison de séries à TG positif, $\left(\sum_{n \geq n_0} (\ln(S_{n+1}) - \ln(S_n))\right)$ et $\left(\sum_{n \geq n_0} \frac{u_n}{S_n}\right)$ sont de même nature. Or la 1ère est une série téléscopique : $\sum_{k=n_0}^{n} (\ln(S_{k+1}) - \ln(S_k)) = \ln S_{n+1} - \ln S_{n_0}$ qui a une limite finie puisque (S_n) cv vers un réel >0. Donc la série correspondante converge, et donc $\left(\sum \frac{u_n}{S_n}\right)$ aussi.

Réciproquement, si $\left(\sum \frac{u_n}{S_n}\right)$ cv, $\frac{u_n}{S_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc on a encore l'équivalence $\ln\left(1+\frac{u_n}{S_n}\right) \sim \frac{u_n}{S_n}$ et donc la même nature pour les séries ayant ces termes généraux. Donc $\ln(S_{n+1}) - \ln(S_{n_0})$ a une limite finie, donc (S_{n+1}) aussi (en prenant l'exponentielle), donc (S_n) aussi, ce qui signifie que $(\sum u_n)$ cv.

Finalement $(\sum u_n)$ et $\left(\sum \frac{u_n}{S_n}\right)$ sont de même nature.

Exercice 14 1. Pour $(u_n)_n = (1)_n$, $(\sum u_n)$ diverge et $(\sum v_n) = \left(\sum \frac{1}{1+n^2}\right)$ cv par comparaison [...] $\left(\frac{1}{1+n^2} \leq \frac{1}{n^2}\text{, TG d'une série convergente}\right)$

Pour $(u_n) = \left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$, $(\sum u_n)$ diverge toujours, mais cette fois $(\sum v_n) = \left(\sum \frac{1}{n+1}\right)$ diverge (série harmonique)

La divergence de $(\sum u_n)$ ne permet donc pas de déterminer la nature de $(\sum v_n)$.

2. Si $n^2 u_n \not\to +\infty$, $v_n \not\to 0$ donc $(\sum v_n)$ diverge grossièrement.

3. L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$$\sum_{n=0}^{N} u_n^{1/2} v_n^{1/2} \leq \left(\sum_{n=0}^{N} u_n\right)^{1/2} \left(\sum_{n=0}^{N} v_n\right)^{1/2}$$

$$\sum_{n=0}^{N} u_n^{1/2} v_n^{1/2} = \sum_{n=0}^{N} \sqrt{\frac{u_n}{1+n^2 u_n}}$$

or $\sqrt{\frac{u_n}{1+n^2u_n}} \sim \frac{\sqrt{u_n}}{\sqrt{n^2 u_n}} = \frac{1}{n}$ car $n^2 u_n \to +\infty$ et $\left(\sum \frac{1}{n}\right)$ diverge, donc par comparaison

de séries à TG positif, $\sum_{n=0}^{N} u_n^{1/2} v_n^{1/2} \xrightarrow[N\to+\infty]{} +\infty$, donc par comparaison (de suites cette fois-ci) $\left(\sum_{n=0}^{N} u_n\right)^{1/2} \left(\sum_{n=0}^{N} v_n\right)^{1/2} \xrightarrow[N\to+\infty]{} +\infty$, et comme $\left(\sum_{n=0}^{N} u_n\right)^{1/2}$ a une limite finie qd $N \to +\infty$, nécessairement $\left(\sum_{n=0}^{N} v_n\right)^{1/2} \to +\infty$, ie $(\sum v_n)$ diverge.

<u>Exercice 15</u> $\forall N \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+1} = \sum_{k=2}^{N+1} \frac{1}{k} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} + \frac{1}{N+1} - 1$

donc $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{N+1} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 1$

donc $\left(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}\right)$ est convergente et a pour somme 1.