Contrôle continu 1

5/09/2020, 8h–9h

La correction tiendra grandement compte de la clarté et de la concision de la rédaction. Toutes les réponses doivent être justifiées. L'utilisation de documents, calculatrices ou de téléphones portables est interdite. Seule une feuille recto-verso manuscrite est autorisée.

* *
*

Exercice 1. Autour du cours (5 points) Soit $(u_n)_n$ une suite à termes strictement positifs.

1. Montrer que si la série $\left(\sum_{n\geq 0} u_n\right)$ est convergente alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \ln(1+u_n)$.

2. Montrer que si $\left(\sum_{n\geq 0} u_n\right)$ est convergente alors $\left(\sum_{n\geq 0} v_n\right)$ aussi (on montrera que $u_n \sim v_n$).

Exercice 2. (10 points) Déterminer la nature des séries $\left(\sum u_n\right)$ avec :

$$u_n = \frac{\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}}, \qquad u_n = \frac{n+5^n}{n^2+4^n}, \qquad u_n = n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{2n}{2n+1},$$

et

$$u_n = n^3 x^n, \text{ selon la valeur de } x \in \mathbb{R}.$$

Exercice 3. (5 points) On admet pour cet exercice que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

1. Calculer la somme de la série $\left(\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(2n)^2}\right)$.
2. En déduire que $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.