Partiel

du lundi 9 novembre 2020 de 7h30 à 9h30

Une feuille recto-verso manuscrite est autorisée. Les autres documents et les dispositifs électroniques sont interdits. Toutes les réponses doivent être justifiées et la qualité de la rédaction sera un élément d'appréciation de la correction. Un barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1. Autour du cours (5 points)

1. Soit $\Big(\sum_{n\geq 0} u_n\Big)$ une série numérique à termes positifs dont le terme général ne s'annule jamais. Montrer que s'il existe $a \in \mathbb{R}$, $0 < a < 1$, tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq a$, alors la série $\Big(\sum_{n\geq 0} u_n\Big)$ converge.

2. Donner un exemple de deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que pour tout n, $|u_n| \leq |v_n|$, et que la série $\Big(\sum_{n\geq 0} v_n\Big)$ converge et la série $\Big(\sum_{n\geq 0} u_n\Big)$ diverge.

Exercice 2. (11 points)

Déterminer la nature (absolument convergente, semi-convergente ou divergente) des séries de terme général u_n, $n \geq 1$, dans les cas suivants :

1. $u_n = \dfrac{\cos(n)}{n^2}$
2. $u_n = \dfrac{1}{n^{2-\frac{1}{n}}}$
3. $u_n = \sin\left(\dfrac{1}{n}\right) - \sin\left(\dfrac{1}{n+1}\right)$
4. $u_n = \left(1 + \dfrac{(-1)^n}{2}\right)^n$
5. $u_n = \ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{2n+1}\right)$
6. $u_n = \dfrac{(-1)^n\sqrt{n}}{n+1}$

Exercice 3. (4 points)

On considère la série $\Big(\sum_{n\geq 1} u_n\Big)$ avec $u_n = \ln\left(\dfrac{2n+1}{2n-1}\right)$ pour tout $n \geq 1$.

1. Trouver un équivalent de u_n et en déduire la nature de la série $\Big(\sum_{n\geq 1} u_n\Big)$.

2. Donner une expression simple de la somme partielle $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} u_n$ pour tout $N \geq 1$ et retrouver le résultat de la question précédente.