Exercice 42 MAT 302 IV.0

1. $\forall n \geq 1, \quad \dfrac{\sum_{k=1}^{n} k^{\alpha}}{\frac{1}{\alpha+1} n^{\alpha+1}} = \dfrac{(\alpha+1)}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\dfrac{k}{n}\right)^{\alpha} = \underbrace{\dfrac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{k}{n}\right)}_{S_n}$ avec $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (\alpha+1) x^{\alpha}$

On reconnaît une suite de sommes de Riemann de f sur l'intervalle $[0,1]$

Cette fonction est continue sur $[0,1]$ $(\alpha > 0)$ donc $S_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^1 (\alpha+1) x^{\alpha}\,dx$

$= \left[x^{\alpha+1} \right]_0^1$

$= 1$

On a $\dfrac{\sum_{k=1}^{n} k^{\alpha}}{\frac{1}{\alpha+1} n^{\alpha+1}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$ donc $\boxed{\sum_{k=1}^{n} k^{\alpha} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\alpha+1} n^{\alpha+1}}$

2. $\sum_{k=n+1}^{2n} \ln k - n \ln(n) = \sum_{k=n+1}^{2n} (\ln(k) - \ln(n)) = \sum_{k=n+1}^{2n} \ln\left(\dfrac{k}{n}\right)$

n termes

$= \sum_{j=1}^{n} \ln\left(\dfrac{j+n}{n}\right)$

$= \sum_{j=1}^{n} \ln\left(1 + \dfrac{j}{n}\right)$

On reconnaît $\frac{1}{n} \times$ la suite des sommes de Riemann S_n de $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln(1+x)$

$S_n \to \int_0^1 \ln(1+t)\,dt = \left[(1+t)\ln(1+t) - (1+t) \right]_0^1 = 2\ln(2) - 2 - 1\ln(1) + 1$

$= 2\ln(2) - 1$

donc $\dfrac{1}{n}\left(\sum_{k=n+1}^{2n} \ln k - n \ln n \right) \to \underset{\neq 0}{2\ln(2) - 1}$

donc $\underbrace{\sum_{k=n+1}^{2n} \ln k - n \ln n}$ $\sim (2\ln(2) - 1) n = o(n \ln(n))$

On a donc montré que $= o(n \ln n)$

Donc $\boxed{\sum_{k=n+1}^{2n} \ln k \underset{+\infty}{\sim} n \ln n}$