Exercice 3

11. $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \{n\} = \mathbb{Z}$ (Plus généralement, $\bigcup_{x\in E}\{x\} = E$)

12. Conjecture : $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} [n, n+1[= [1, +\infty[$.

Preuve par double inclusion

- Si $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} [n, n+1[$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tq $n_0 \leq x < n_0+1$. En particulier, comme $n_0 \geq 1$, $x \geq 1$ donc $x \in [1, +\infty[$.

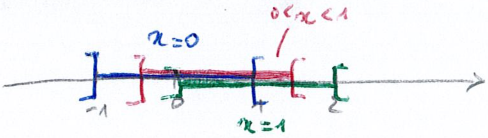
- Réciproquement, si $x \in [1, +\infty[$, en posant $n_0 = \lfloor x \rfloor$, on a $n_0 \in \mathbb{N}^*$ et $n_0 \leq x < n_0+1$ donc $x \in [n_0, n_0+1[$, donc $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} [n, n+1[$.

13. $\bigcup_{x\in\mathbb{R}} \{x^2\} = \{x^2 ; x \in \mathbb{R}\} \underset{\text{conjecture}}{\overset{}{=}} \mathbb{R}_+$

En effet : si $a \in \{x^2 ; x\in\mathbb{R}\}$, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $a = x^2$, donc $a \geq 0$, donc $a \in \mathbb{R}_+$

Réciproquement, si $a \in \mathbb{R}_+$, en posant $x_0 = \sqrt{a}$, on a $a = x_0^2$, donc $a \in \{x^2 ; x \in \mathbb{R}\}$

14.



Conjecture : $\bigcup_{x\in[0,1]}]x-1, x+1[=]-1, 2[$.

Preuve. Si $a \in \bigcup_{x\in[0,1]}]x-1, x+1[$, il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que $x_0 - 1 < a < x_0+1$

or $0 \leq x_0$ donc $-1 \leq x_0 - 1$ et $x_0 \leq 1$ donc $x_0+1 \leq 2$ donc

$-1 \leq x_0 - 1 < a < x_0 + 1 \leq 2$, donc $a \in]-1, 2[$

- Réciproquement, $]-1,2[=]-1,1[\cup]0,2[=]0-1, 0+1[\cup]1-1, 1+1[$

$\subset \bigcup_{x\in[0,1]}]x-1, x+1[$

ce qui prouve la deuxième inclusion.

15. Conjecture : $\bigcap_{x\in[0,1]}]x-1, x+1[=]0, 1[$

Preuve : Si $a \in \bigcap_{x\in[0,1]}]x-1, x+1[$, en particulier, $a \in]0-1, 0+1[\cap]1-1, 1+1[$
$=]-1,1[\cap]0,2[$
$=]0,1[$

donc $a \in]0,1[$.

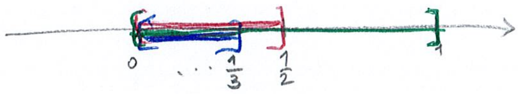
Réciproquement, supposons que $a \in]0,1[$. Soit $x \in [0,1]$ (quelconque)

Alors $\underset{\text{car } x \leq 1}{x-1 \leq} 0 < a < 1 \underset{\text{car } x \geq 0}{\leq x+1}$ donc $a \in]x-1, x+1[$.

Donc $a \in \bigcap_{x\in[0,1]}]x-1, x+1[$.

16. Même méthode, $\bigcap_{x\in[0,1]} [x-1, x+1] = [0,1]$.

17. Conjecture : $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} [0, \frac{1}{n}] = \{0\}$



- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \in [0, \frac{1}{n}]$, donc $0 \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} [0, \frac{1}{n}]$
- Si $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} [0, \frac{1}{n}]$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq x \leq \frac{1}{n}$ donc par passage à la limite qd $n \to +\infty$, $0 \leq x \leq 0$ donc $x = 0$.

18. Conjecture : $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}] =]0,1]$

- Si $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $x \in [\frac{1}{n_0+1}, \frac{1}{n_0}]$, ie tq $\frac{1}{n_0+1} \leq x \leq \frac{1}{n_0}$, en particulier, comme $0 < \frac{1}{n_0+1}$ et $\frac{1}{n_0} \leq 1$, on a $x \in]0,1]$
- Si $x \in]0,1]$, cherchons $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tq $\frac{1}{n_0+1} \leq x \leq \frac{1}{n_0}$. Cela équivaut à $n_0 \leq \frac{1}{x} \leq n_0+1$. Comme $\frac{1}{x} \geq 1$, il suffit de prendre $n_0 = \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$ qui appartient à $\mathbb{N}^*$. On a donc bien $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$.

19. Par définition de la partie entière, $\{x \in \mathbb{R} \mid \lfloor x \rfloor = 3\} = [3,4[$

20. $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq \lfloor x \rfloor \leq 6\} = \{x \in \mathbb{R} \mid \lfloor x \rfloor \in \{2,3,4,5,6\}\} = [2,3[\cup [3,4[\cup [4,5[\cup [5,6[\cup [6,7[$
$= [2,7[$

21. $\{x \in \mathbb{Q} \mid |x| \leqslant 3\} = [-3,3] \cap \mathbb{Q}$

22. Conjecture : $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| = \lfloor x \rfloor\} = \mathbb{N}$

Preuve : Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $|x| = \lfloor x \rfloor$ alors $\lfloor x \rfloor \geqslant 0$ donc $x \geqslant 0$.
Ainsi $x = |x| = \lfloor x \rfloor$, donc $x \in \mathbb{Z}$.
Finalement on a bien $x \in \mathbb{N}$.

Réciproquement, si $x \in \mathbb{N}$, $x \geqslant 0$ donc $x = |x|$ et $x \in \mathbb{Z}$ donc $x = \lfloor x \rfloor$, donc on a bien $|x| = \lfloor x \rfloor$.

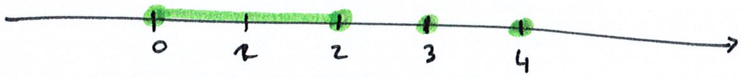
Exercice 1.5 L'ensemble étudié est représenté en vert.

1. 

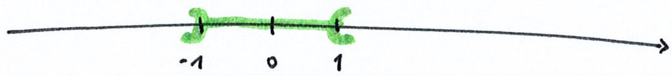
2. 

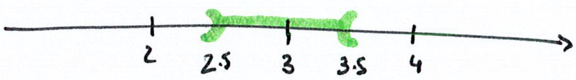
3. $[0,2] \cap]1,3[= [0,1[$ 

4. $[0,2] \cap \mathbb{Z} = \{0,1,2\}$ 

5. $[0,2] \cup \{3,4\}$ 

6. $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x \leq 4\} =]2,4]$ 

7. $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| < 1\} =]-1,1[$ 

8. $\{x \in \mathbb{R} \mid |x-3| < \frac{1}{2}\} =]2.5, 3.5[$ 

9. $\{x \in \mathbb{R} \mid |x-1{,}5| > 0{,}5\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x - 1{,}5 > 0{,}5 \text{ ou } -(x-1{,}5) > 0{,}5\}$

(en effet, $|x-1{,}5| = \max(\underbrace{x-1{,}5}_{a}, \underbrace{-(x-1{,}5)}_{b})$, et

$\max(a,b) > 0{,}5 \iff a > 0{,}5 \text{ ou } b > 0{,}5$)

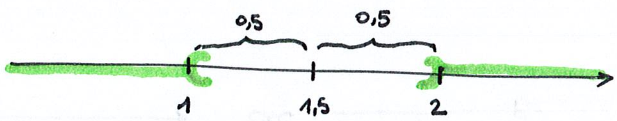
$$= \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2 \text{ ou } x < 1\}$$

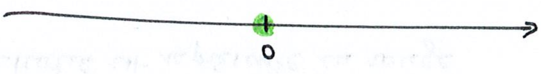
$$= \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$$

$$=]2, +\infty[\cup]-\infty, 1[$$

Mais on peut remplacer tout cela par des mots !

$\{x \in \mathbb{R} \mid |x-1{,}5| > 0{,}5\}$ est l'ensemble des réels dont la distance à 1,5 est strictement supérieure à 0,5 :



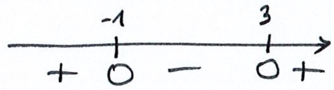
10. $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 0\} = \{0\}$ 

11. Etudions le signe de $x(x-2)-3 = x^2-2x-3 = ax^2+bx+c$ en fonction de x.

$\Delta = b^2-4ac = 16$, $\sqrt{\Delta} = 4$

Les racines du trinôme sont donc $\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = 3$ et $\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = -1$ (le vérifier !)

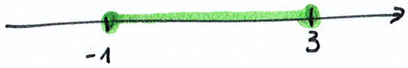
Le signe de $x(x-2)-3$ est donc donné par :



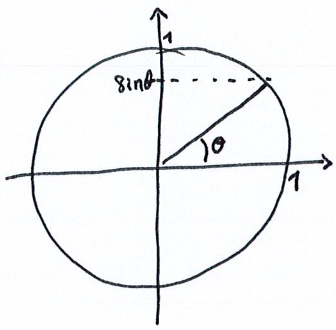
(car $a>0$)

donc pour $x \in \mathbb{R}$, $x(x-2) \leq 3 \iff x(x-2)-3 \leq 0 \iff x \in [-1, 3]$

d'où la représentation :



12.



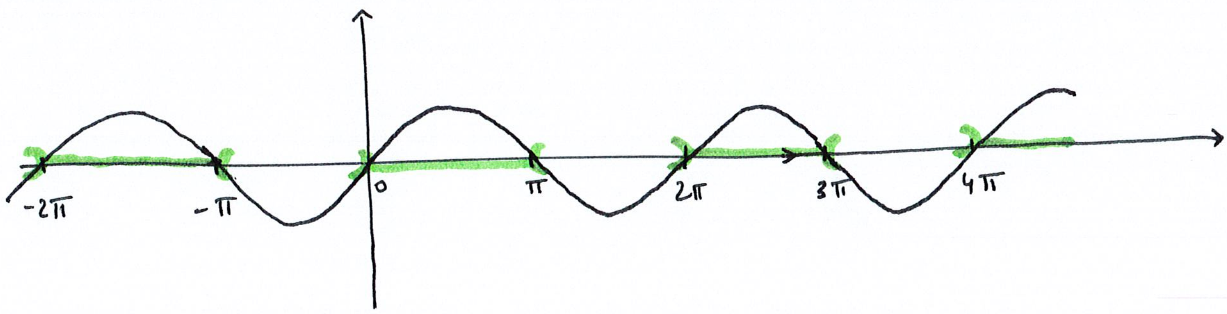
Pour x réel, $\sin(x)>0$ $\Big(\iff$ modulo 2π, x est compris entre 0 et π strictement$\Big)$ brouillon

$\iff$ il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x + 2k\pi \in]0, \pi[$

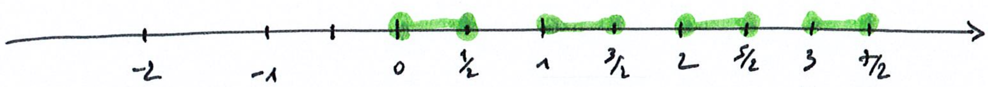
$\iff$ il existe k dans $\mathbb{Z}$ tel que $x \in]-2k\pi, \pi - 2k\pi[$

$\iff x \in \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}]-2k\pi, \pi - 2k\pi[$

Mais on peut aussi représenter cet ensemble directement à partir du graphe de la fonction sin :



13.



Exercice 6

- La 1ère affirmation est fausse : on peut avoir un produit de 3 nombres réels négatif sans que la condition "l'un d'entre eux est pas négatif, les deux autres étant positifs" soit satisfaite, en considérant 3 nombres négatifs.

- le 2e affirmation est vraie.

  Si le produit de n nb réels est positifs, alors un nb pair d'entre eux sont négatifs les autres étant positifs (sinon, en regroupant par deux les nb négatifs et où le produit de chaque couple serait positif il en resterait un tout seul donc le produit total serait négatif)

  Réciproquement, si parmi n nombres réels, un nombre pair d'entre eux est négatif, on peut grouper ceux-ci par paires dont le produit est positif et donc le produit total est positif.

Exercice 7

Notons $A_1, \dots, A_7$ les ensembles concernés. Commençons par simplifier les descriptions de $A_1, \dots, A_7$.

$$A_4 = \{ x \in \mathbb{R} \mid x(x-1) = 0 \} = \{0,1\}$$

$$A_5 = \left]-\tfrac{1}{5}, \tfrac{1}{5}\right[$$

$$A_6 =]0.1, 0.3[$$

Pour A_7 on commence par factoriser le polynôme : on voit que 1 est une racine "évidente" donc il existe a, b, c tels que $x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x-1)(ax^2+bx+c)$

Le coeff dominant valant 1, on a $a = 1$

Le terme constant étant 2, on a $-c = 2$ donc $c = -2$

$$(x-1)(x^2+bx-2) = \begin{aligned} x^3 + bx^2 - 2x \\ - x^2 - bx + 2 \end{aligned} = x^3 + (b-1)x^2 + (-2-b)x + 2$$

on doit donc avoir $b-1 = -2$ (et $-2-b = -1$) ce qui donne $b = -1$

Les racines de $x^2 - x - 2$ sont -1 et 2 donc finalement,

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x-1)(x+1)(x-2)$$

On construit un tableau de signes :

		-1		1		2	
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
x^3-2x^2-x+2	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Donc $A_7 =]-1,1[\,\cup\,]2,+\infty[$

C	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
A_1	Oui	/	/	/	/	/	/
A_2	/	Oui	/	/	/	/	Oui
A_3	oui	Oui	Oui	/	/	/	Oui
A_4	oui	/	/	Oui	/	/	/
A_5	/	Oui	/	/	Oui	/	Oui
A_6	Oui	Oui	Oui	/	/	Oui	oui
A_7	/	/	/	/	/	/	Oui

Exercice 8

1. oui, ils ont les mêmes éléments.
2. Non. $(1,2) \in \{1,(1,2)\}$ mais $(1,2) \notin \{(1,1)\}$
3. non. $(1,2) \in \{(1,1),(1,2)\}$ mais $(1,2) \notin \{(1,1),(2,1)\}$
4. oui, car $\{1,2\} = \{2,1\}$
5. non car $\{x \in \mathbb{Z} \mid x \leq 3\}$ contient tous les entiers négatifs
6. oui.
7. Oui : $[\![1,3]\!] \times [\![0,3]\!] = \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 \mid x \in [\![1,3]\!] \text{ et } y \in [\![0,3]\!]\}$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 \mid 1 \leq x \leq 3 \text{ et } 0 \leq y \leq 3\}$$

8. Oui.

Exercice 9 1.

$$(A \cap B \cap C) \cup ({}^cA \cap B \cap C) \cup {}^cB \cup {}^cC$$

$$= (A \cap (B \cap C)) \cup ({}^cA \cap (B \cap C)) \cup {}^cB \cup {}^cC$$

$$= (\underbrace{(A \cup {}^cA)}_{E} \cap (B \cap C)) \cup {}^cB \cup {}^cC$$

factorisation

$$= (B \cap C) \cup {}^cB \cup {}^cC$$

$$= ((B \cap C) \cup {}^cB) \cup {}^cC$$

$$= \underbrace{(B \cup {}^cB)}_{E} \cap (C \cup {}^cB) \cup {}^cC$$

$$= C \cup {}^cB \cup {}^cC = \underbrace{C \cup {}^cC}_{E} \cup {}^cB = \cancel{B}\,E$$

2. $(A\cap {}^cB)\cap {}^cC = A\cap({}^cB\cap{}^cC) \underset{\substack{\text{Formule (8)}\\ \text{de 1.18}}}{=} A\cap {}^c(B\cup C)$

et $(A\cap {}^cB)\cap{}^cC \underset{\text{associativité}}{=} A\cap({}^cB\cap{}^cC) \underset{\text{commutativité}}{=} A\cap({}^cC\cap{}^cB) = (A\cap{}^cC)\cap{}^cB$.

3. Notons $D = (A\cup B)\cap({}^cA\cap{}^cC)\cap{}^cB\cap({}^cA\cup B\cup C)$

si $x\in D$, $x\notin B$ donc comme $x\in A\cup B$, $\underline{x\in A}$. Mais $x\in{}^cA\cap{}^cC$ donc $\underline{x\in{}^cA}$. <u>Impossible</u>

donc $D=\emptyset$.

<u>Exercice 10</u> 1. $\dfrac{3+6i}{3-4i} = \dfrac{(3+6i)(3+4i)}{3^2+4^2} = \dfrac{(9-24)+(18+12)i}{25} = \dfrac{-15}{25}+\dfrac{30i}{25} = \boxed{-\frac{3}{5}+\frac{6}{5}i}$

2. $\dfrac{5+2i}{1-2i} = \dfrac{(5+2i)(1+2i)}{1^2+2^2} = \dfrac{(5-4)+(2+10)i}{5} = \boxed{\frac{1}{5}+\frac{12}{5}i}$

3. $\dfrac{-2}{1-i\sqrt{3}} = \dfrac{-2(1+i\sqrt{3})}{1^2+\sqrt{3}^2} = \boxed{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}$

4. $\underbrace{\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^2}+\left.\dfrac{3+6i}{3-4i}\right\} = -\frac{3}{5}+\frac{6}{5}i$

$= \dfrac{(1+i)(2+i)}{2^2+1^2} = \dfrac{(2-1)+(2+1)i}{5} = \frac{1}{5}+\frac{3}{5}i$

donc au total on obtient $\boxed{-\frac{2}{5}+\frac{9}{5}i}$

5. on remarque que ce nombre est de la forme $z+\bar{z}$ avec $z=\dfrac{2+5i}{1-i}$

$z = \dfrac{(2+5i)(1+i)}{(1+i)(1-i)} = \dfrac{(2-5)i+(5+2)i}{2} = -\frac{3}{2}+\frac{7}{2}i$

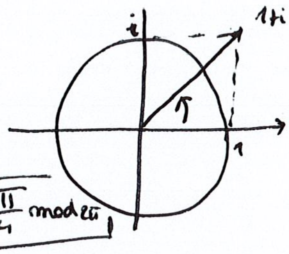
donc $z+\bar{z} = 2\,\mathrm{Re}(z) = \boxed{-3}$

6 $= \left(1-\dfrac{\sqrt{3}(1-i)}{1+i}\right)^2$ or $\dfrac{\sqrt{3}(1-i)}{1+i} = \dfrac{\sqrt{3}(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} = \dfrac{\sqrt{3}(2-2i)}{1+1} = \sqrt{3}(1-i)$

Donc $6 = \left(1-\sqrt{3}(1-i)\right)^2 = \left((1-\sqrt{3})+i\right)^2 = \boxed{(1-\sqrt{3})^2 - 1 + 2i(1-\sqrt{3})}$

Exercice 11

1. $\boxed{|1+i| = \sqrt{2}}$; $\dfrac{1+i}{|1+i|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} + i\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

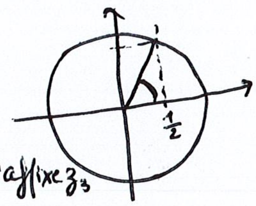


On peut lire directement l'argument : $\boxed{\frac{\pi}{4} \text{ mod } 2\pi}$

2. $3+3i = 3(1+i) = 3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, donc $\boxed{\text{module} = 3\sqrt{2}}$ et $\boxed{\arg = \frac{\pi}{4} \text{ mod } 2\pi}$

3. $|1+i\sqrt{3}| = \sqrt{1+3} = 2$ donc $z_2 = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

Donc $\boxed{\text{module} = 2}$ et $\boxed{\arg = \frac{\pi}{3}}$

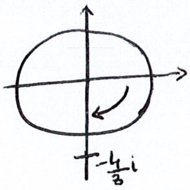


4. z_4 est l'affixe du symétrique par rapport à (Oy) du point d'affixe z_3

donc $\boxed{|z_4| = |z_3| = 2}$ et $\boxed{\arg(z_4) = \frac{2\pi}{3} \text{ mod } 2\pi}$

5. $z_5 = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ donc $|z_5| = 2$ et $\boxed{\arg z_5 = \frac{\pi}{6} \text{ mod } 2\pi}$

6. $|z_6| = \left|-\frac{4}{3}\right| \cdot \underbrace{|i|}_{1} = \frac{4}{3}$ et



$\boxed{\arg(z_6) = -\frac{\pi}{2} \text{ mod } 2\pi}$

7, 8. difficiles

9 : on a $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ et de la même façon $1-i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

Donc $z_9 = \dfrac{\cancel{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}}{\cancel{\sqrt{2}}e^{-i\frac{\pi}{4}}} = e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)} = e^{i\frac{\pi}{2}}$ $(= i)$

donc $\boxed{|z_9| = 1}$ et $\boxed{\arg(z_9) = \frac{\pi}{2} \text{ mod } 2\pi}$

10. $z_{10} = z_9^{\,3} = i^3 = -i = -e^{i\frac{\pi}{2}} = e^{i\frac{3\pi}{2}}$ donc $\boxed{|z_{10}| = 1}$ et $\boxed{\arg z_{10} = \frac{3\pi}{2} \text{ mod } 2\pi}$

12 $z_{12} = z + \bar{z}$ avec $z = (1+i\sqrt{3})^5 = \left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^5 = 2^5\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$= 2\,\mathrm{Re}(z)$

$= 2^6 \cos\frac{\pi}{3} = 2^5$

C'est un réel positif donc $\boxed{|z_{12}| = 2^5}$ et $\boxed{\arg(z_{12}) = 0 \text{ mod } 2\pi}$

13. comme on a montré que $1+i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$, on montre que $\sqrt{3}-i = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$

donc $z_{13} = \dfrac{\cancel{2}e^{i\frac{\pi}{3}}}{\cancel{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}} = e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$

donc $\boxed{|z_{13}|=1}$ et $\boxed{\arg(z_{13}) = \frac{\pi}{2}}$

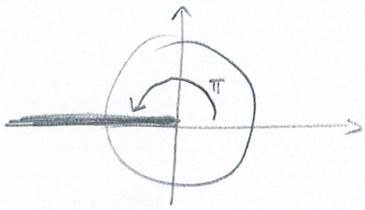
14. $z_{14} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \times \dfrac{\sqrt{3}-i}{1-i} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \times \dfrac{2e^{-i\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}} = e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)} = e^{i\frac{\pi}{12}}$

donc $\boxed{|z_{13}|=1}$ et $\boxed{\arg(z_{13}) = \frac{\pi}{12}}$

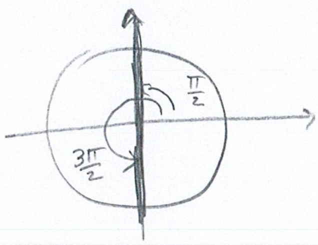
Exercice 12

1. Faux. (-1) a pour argument π mod 2π

2. Vrai : Dessin



3. Vrai : dessin



4. Vrai : si $b \in \mathbb{R}$, $\overline{bi} = -bi$

5. Faux $e^{i\frac{\pi}{4}} \times e^{i\frac{\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{2}}$ qui n'est pas réel.

6. Vrai si $b, b' \in \mathbb{R}$ $bi \times b'i = -bb' \in \mathbb{R}$.

7. Vrai soient deux nombres complexes de même argument θ : $\rho_1 e^{i\theta}$ et $\rho_2 e^{i\theta}$. Alors $\dfrac{\rho_1 \cancel{e^{i\theta}}}{\rho_2 \cancel{e^{i\theta}}} = \dfrac{\rho_1}{\rho_2} \in \mathbb{R}$

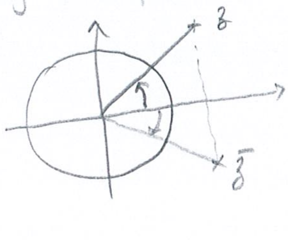
8. Vrai soient deux nombres complexe $\rho e^{i\theta_1}$ et $\rho e^{i\theta_2}$ de même module ρ alors leur quotient vaut $e^{i(\theta_1-\theta_2)}$ qui est de module 1

Plus simplement : $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|} = 1$

Exercice 13

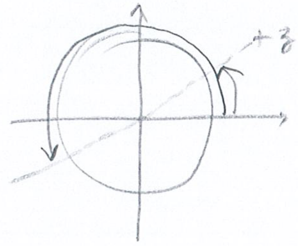
1. Vrai si $z = a+ib$, $|z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{a^2+(-b)^2} = |a-ib| = |\bar{z}|$.

2. Vrai Géométriquement, le conjugué $\bar{z}$ est le symétrique par rapport à (Ox) du point d'affixe z

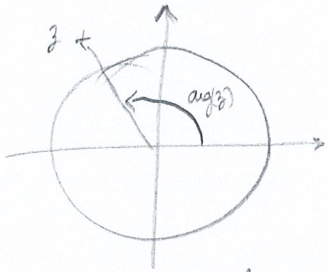


3. Vrai Soit z_n une racine n-ième de l'unité. $|z_n| = 1$. Donc $|z z_n| = |z||z_n| = |z|$.

4. Faux l'argument de $-z$ est $\arg(z) + \pi \mod 2\pi$.



5. Vrai (modulo 2π)

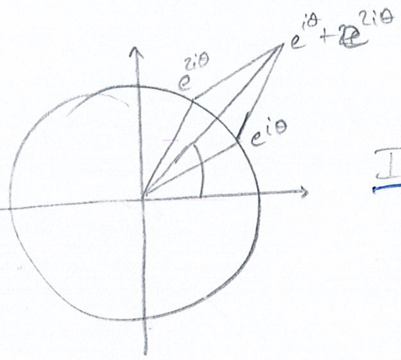


$(\mathrm{Im}(z) \geq 0 \Rightarrow \sin(\arg(z)) \geq 0 \Rightarrow \arg(z) (\mathrm{mod}\ 2\pi) \in [0, \pi]$

6. Vrai si $z = \rho e^{i\theta}$, $z^2 = \rho^2 (e^{i\theta})^2 = \rho^2 e^{i2\theta}$

7. $\frac{z}{\bar{z}} = \frac{z^2}{z\bar{z}} = \frac{1}{|z|^2} z^2$ multiple positif de z^2, donc ils ont le même argument.

Exercice 14 1.



Intuition : l'argument va être $e^{\frac{3i\theta}{2}}$

Ecrivons donc $e^{i\theta} + e^{2i\theta} = e^{\frac{3i\theta}{2}} \underbrace{\left(e^{-\frac{i\theta}{2}} + e^{\frac{i\theta}{2}}\right)}_{2\cos\frac{\theta}{2}}$

$2\cos\frac{\theta}{2}$ ≥ 0 si $\theta \in [0, \pi]$
≤ 0 sinon

Si $\theta \in [0, \pi]$, on obtient donc

$\boxed{\text{module} = 2\cos\frac{\theta}{2}}$ et $\boxed{\text{argument} = \frac{3\theta}{2}}$

Sinon, $\boxed{\text{module} = -2\cos\frac{\theta}{2}}$ et $\boxed{\text{argument} = \frac{3\theta}{2} + \pi}$ mod 2π

2. $1 + (\cos\theta + i\sin\theta) = 1 + e^{i\theta} = e^{\frac{i\theta}{2}}\left(e^{-\frac{i\theta}{2}} + e^{\frac{i\theta}{2}}\right) = e^{\frac{i\theta}{2}} \times 2\cos\frac{\theta}{2}$

Donc comme précédemment on a deux cas

Si $\theta \in [0, 2\pi]$ $\boxed{\text{module} = 2\cos\frac{\theta}{2}}$ et $\boxed{\arg^t = \frac{\theta}{2}}$

sinon $\boxed{\text{module} = -2\cos\frac{\theta}{2}}$ et $\boxed{\arg^t = \frac{\theta}{2} + \pi}$

3. $e^{e^{i\theta}} = e^{\cos\theta + i\sin\theta} = \underbrace{e^{\cos\theta}}_{\in\mathbb{R}_+} \times e^{i\sin\theta}$ donc $\boxed{|z_3| = e^{\cos\theta}}$ et $\boxed{\arg z_3 = \sin\theta}$

Exercice 15

1. $-1 = i^2$ donc les racines sont $\boxed{\pm i}$

2. $i = e^{i\frac{\pi}{2}} = \left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^2$ donc les racines sont $\pm e^{i\frac{\pi}{4}} = \boxed{\pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$

3. $1+i = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}} = \left(2^{\frac{1}{4}} e^{\frac{i\pi}{8}}\right)^2$ donc les racines sont $\boxed{\pm\ 2^{\frac{1}{4}}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)}$

4. $-1-i = -(1+i) = i^2(1+i) = \left(i\, 2^{\frac{1}{4}} e^{i\frac{\pi}{8}}\right)^2$ donc les racines sont $\boxed{\pm 2^{\frac{1}{4}}\left(-\sin\frac{\pi}{8} + \cos\frac{\pi}{8}\right)}$

5. $1 + i\sqrt{3} = 2 e^{i\frac{\pi}{3}} = \left(\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^2$ donc les racines sont $\pm\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$= \boxed{\pm\left(\sqrt{3} + i\right)}$.

6. Là on va utiliser les formules du cours pour $z = a+ib$ avec $a = 3$ et $b = 4$

Les racines $x+iy$ satisfont
$$\begin{cases} x^2 = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2} + a}{2} \\ y^2 = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2} - a}{2} \\ xy \text{ est du signe de } b\text{, ici positif ici} \end{cases}$$

ce qui donne
$$\begin{cases} x^2 = \dfrac{5+3}{2} = 4 \\ y^2 = \dfrac{5-3}{2} = 1 \\ x \text{ et } y \text{ de même signe} \end{cases}$$
Les racines sont donc $\boxed{\pm(2+i)}$.

7. Là encore on utilise le cours. On doit résoudre le système
$$\begin{cases} x^2 = \dfrac{\sqrt{64+36} + 8}{2} = 9 \\ y^2 = \dfrac{\sqrt{64+36} - 8}{2} = 1 \\ x \text{ et } y \text{ de signe opposé} \end{cases}$$
Les racines sont donc $\boxed{\pm(3-i)}$.

Exercice 16

1. Ici il faut appliquer la méthode du cours et pas l'astuce de l'exo 15, question 3.

$\dfrac{1+i}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} + i\dfrac{1}{\sqrt{2}} = a+ib$

On veut résoudre
$$\begin{cases} x^2 = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2} + a}{2} \\ y^2 = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2} - a}{2} \\ x \text{ et } y \text{ sont de même signe} \end{cases}$$
ce qui donne
$$\begin{cases} x^2 = \dfrac{\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}}{2} \\ y^2 = \dfrac{\sqrt{1} - \frac{1}{2}}{2} \\ x \text{ et } y \text{ de même signe} \end{cases}$$

ou encore $\begin{cases} x^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ y^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ x \text{ et } y \text{ de même signe} \end{cases}$. Les racines sont donc $\pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}} + i\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{2}}}\right)$

Or $\frac{1+i}{\sqrt{2}} = e^{i\frac{\pi}{4}} = \left(e^{i\frac{\pi}{8}}\right)^2$ qui a pour racines $\pm e^{i\frac{\pi}{8}} = \pm\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)$

Par identification on obtient $\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}}$ et $\sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{2}}}$.

2. Même méthode.

Exercice 17 On note Δ le discriminant dans chaque cas

1. $\Delta = b^2 - 4ac = -3 = (\sqrt{3}i)^2$ Les solutions sont donc $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ et $\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$.

2. $\Delta = b^2 - 4ac = -3 = (\sqrt{3}i)^2$ ——— $\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ et $\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$

3. $\Delta = 4 - 16 = -12 = (i\sqrt{12})^2$ ——— $\frac{-2+i\sqrt{12}}{2} = -1+i\sqrt{3}$ et $-1-i\sqrt{3}$

6. $\Delta = (1+2i)^2 - 4(i-1) = 1 + \cancel{4i} - \cancel{4} - \cancel{4i} + \cancel{4} = 1 = (\pm 1)^2$ ——— $\frac{-1-2i+1}{2} = -i$ et $\frac{-1-2i-1}{2} = -1-i$

7. $\Delta = (3+4i)^2 - 4(1+5i) = 9 + 24i - 16 + 4 - 20i = -3 + 4i$

On cherche les racines carrées $x+iy$ de $-3+4i$

Elles satisfont $\begin{cases} x^2+y^2 = |-3+4i| = \sqrt{25} = 5 \\ x^2 - y^2 = -3 \\ 2xy = 4 \end{cases}$ soit $\begin{cases} x^2 = \frac{5-3}{2} = 1 \\ y^2 = \frac{5+3}{2} = 4 \\ 2xy = 4 \end{cases}$

Donc $x+iy = 1+2i$ ou $-1-2i$

Les solutions de l'équation polynomiale sont donc $\frac{(3+4i)+(1+2i)}{2} = 2+3i$ et

$\frac{(3+4i)-(1+2i)}{2} = 1+i$

Exercice 18 Si $z^2 + pz + q = 0$ z est racine du polynôme $z^2 + pz + q$. Comme z est supposé non réel, le discriminant doit être négatif et on a donc $z = \frac{-p + i\sqrt{-p^2+4q}}{2}$ ou $\frac{-p - i\sqrt{-p^2+4q}}{2}$

En particulier p, q satisfaisant $(*)\begin{cases} -\frac{p}{2} = Re(z) \\ \sqrt{-p^2+4q} = Im(z) \end{cases}$ conviennent

Or $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} p = -2Re(z) \\ 4q = Im(z)^2 + p^2 = Im(z)^2 + 4Re(z) \end{cases}$

donc $p = -2Re z$ et $q = \frac{1}{4}\left(Im(z)^2 + 4Re(z)\right)$ conviennent.

Exercice 19 1. $i = e^{i\frac{\pi}{2}} = \left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^3$ donc les solutions de l'équation sont

$$e^{i\frac{\pi}{6}}, \quad e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\right)}, \quad e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{3}\right)}$$

2. $\frac{-1+i}{4} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{4\sqrt{2}} e^{i\frac{3\pi}{4}} = \left(\frac{1}{(4\sqrt{2})^{1/3}} e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^3$

donc $z^3 = \frac{-1+i}{4} \Leftrightarrow z = \frac{1}{(4\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}} e^{i\frac{\pi}{4}}$ ou $\frac{1}{(4\sqrt{2})^{1/3}} e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}\right)}$ ou $\frac{1}{4\sqrt{2}+1} e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{3}\right)}$

3. Même méthode.

4. $z^4 = 1 \Leftrightarrow z = 1, i, -1$ ou $-i$ (Racines quatrièmes de l'unité)

5. $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = e^{2i\frac{\pi}{3}}$

$z^4 = e^{2i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow z^4 = \left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^4 \Leftrightarrow z = e^{i\frac{\pi}{6}} \times$ une racine quatrième de l'unité, énumérées ci-dessus

6. $\left(\frac{2z+1}{z-1}\right)^4 = 1 \Leftrightarrow \frac{2z+1}{z-1}$ est une racine quatrième de l'unité

$\Leftrightarrow \frac{2z+1}{z-1} \in \{1, i, -1, -i\}$

$\Leftrightarrow \frac{2z+1}{z-1} = 1$ ou $\frac{2z+1}{z-1} = i$ ou $\frac{2z+1}{z-1} = -1$ ou $\frac{2z+1}{z-1} = -i$

$\Leftrightarrow 2z+1 = z-1$ ou $2z+1 = i(z-1)$ ou $2z+1 = -z+1$ ou $2z+1 = -iz+i$

$\Leftrightarrow z = -2$ ou $(2-i)z = -1-i$ ou $3z = 0$ ou $(2+i)z = -1+i$

$\Leftrightarrow z = -2$ ou $z = \frac{-1-i}{2-i}$ ou $z = 0$ ou $z = \frac{-1+i}{2+i}$

Les solutions sont donc -2, $\frac{-1-i}{2-i}$, 0 et $\frac{-1+i}{2+i}$

$\boxed{\text{Exercice 22}}$ 1. $\cos(4x) = \mathrm{Re}\left((\cos x + i\sin x)^4\right)$

or $(\cos x + i\sin x)^4 = \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} (\cos x)^k (i\sin x)^{4-k}$

$$= (i\sin x)^4 + 4\cos(x)(i\sin x)^3 + \frac{4!}{2!2!}\cos(x)^2 (i\sin x)^2 + 4(\cos x)^3(i\sin x) + (\cos x)^4$$

$$= (\sin(x))^4 + i\left(-4\cos x(\sin x)^3\right) - 6(\cos x)^2(\sin x)^2 + 4i(\cos x)^3\sin x + (\cos x)^4$$

Donc $\mathrm{Re}\left((\cos x + i\sin x)^4\right) = (\sin(x))^4 - 6(\cos x)^2(\sin x)^2 + (\cos x)^4$

$$= (1-(\cos x)^2)^2 - 6\cos^2(x)(1-\cos^2(x)) + (\cos x)^4$$

$$= 1 - 2\cos^2(x) + (\cos x)^4 - 6\cos^2(x) + 6(\cos(x))^4 + (\cos x)^4$$

$= 8(\cos(x))^4 - 8(\cos(x))^2 + 1$, ce qu'on voulait.

2. $\sin(4x) = \mathrm{Im}\left((\cos x + i\sin x)^4\right)$

$$= -4\cos x(\sin x)^3 + 4(\cos x)^3\sin x$$

calcul précédent

$$= -4\cos x\sin x(1-\cos^2(x)) + 4(\cos x)^3\sin x$$

$= 8(\cos x)^3\sin x - 4\cos x\sin x$, ce qu'on voulait.

$\boxed{\text{Exercice 23}}$ 1. $(\cos x)^3 = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3$

$$= \frac{1}{8}\left(\sum_{k=0}^{3}\binom{3}{k}(e^{ix})^k(e^{-ix})^{3-k}\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(e^{-3ix} + 3e^{ix}e^{-2ix} + 3e^{2ix}e^{-ix} + e^{3ix}\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(e^{3ix}+e^{-3ix} + 3(e^{ix}+e^{-ix})\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\cos(3x) + 3\cos(x)\right)$$

$= \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos x.$

Observe qu'on obtient que des cos, cohérent avec la parité de la fonction initiale

2. $(\sin(x))^3 = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3 = \frac{1}{-8i}\left(\sum_{k=0}^{3}\binom{3}{k}(e^{ix})^k(-e^{-ix})^{3-k}\right)$

$$= -\frac{1}{8i}\left(-e^{-i3x} + 3e^{ix}e^{-2ix} - 3e^{2ix}e^{-ix} + e^{i3x}\right)$$

$$= -\frac{1}{8i}\left(e^{i3x} - e^{-i3x} - 3(e^{ix} - e^{-ix})\right)$$

Donc $(\sin x)^3 = -\frac{1}{4}\left(\frac{e^{i3x}-e^{-i3x}}{2i} - 3\,\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)$

$$= -\frac{1}{4}\left(\sin(3x) - 3\sin x\right)$$

$$= -\frac{1}{4}\sin(3x) + \frac{3}{4}\sin x.$$

(Observez qu'on n'obtient que des sin, cohérent avec l'imparité de la fonction initiale)

On procède exactement pareil pour les 3. et 4.

5. $(\cos x)^2(\sin x)^2 = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^2$

$$= -\frac{1}{16}\left((e^{ix}+e^{-ix})(e^{ix}-e^{-ix})\right)^2$$

$$= -\frac{1}{16}\left(e^{2ix}-e^{-2ix}\right)^2$$

$$= -\frac{1}{16}\left(e^{4ix}-2+e^{-4ix}\right)$$

$$= \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\left(\frac{e^{4ix}+e^{-4ix}}{2}\right)$$

$$= \boxed{\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos(4x)}.$$

(Observez qu'on obtient bien une fonction paire)

6. $(\cos x)(\sin x)^3 = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3$

$$= -\frac{1}{16i}\underbrace{(e^{ix}+e^{-ix})(e^{ix}-e^{-ix})}(e^{ix}-e^{-ix})^2$$

$$= -\frac{1}{16i}\left(e^{2ix}-e^{-2ix}\right)\left(e^{2ix}-2+e^{-2ix}\right)$$

$$= -\frac{1}{16i}\left(e^{4ix}-2e^{2ix}+\cancel{1}-\cancel{1}+2e^{-2ix}-e^{-4ix}\right)$$

$$= -\frac{1}{8}\left(\frac{e^{4ix}-e^{-4ix}}{2i}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{e^{2ix}-e^{-2ix}}{2i}\right)$$

$$= \boxed{-\frac{1}{8}\sin(4x) + \frac{1}{4}\sin(2x)}$$

(on peut vérifier ce résultat avec l'exercice précédent)

Même méthode pour les questions suivantes.

$\boxed{\text{Exercice 24}}$ 1. 0 est dans $\mathcal{G}$ ($0 = 0^2 + 0^2$ avec $0 \in \mathbb{Z}$)

3 n'est pas dans $\mathcal{G}$. En effet supposons par l'absurde que $3 \in \mathcal{G}$. Alors il existe $m, n \in \mathbb{Z}$ tels que $3 = m^2 + n^2$. Sans perdre de généralité (quitte à remplacer m par $-m$ ou/et n par $-n$, ce qui ne change pas la somme m^2+n^2), on peut supposer que $m, n \in \mathbb{N}$.

$3 = m^2 + n^2 \implies 3 \geq m^2 \geq 0$ donc comme $m \in \mathbb{N}$, $m = 0$ ou 1

De même $n = 0$ ou 1, mais alors $m^2 + n^2 = 0, 1$ ou 2, contradiction. □

2. Soient $p, q \in \mathcal{G}$. Alors : $\exists\, m_p, n_p, m_q, n_q \in \mathbb{Z}$, $p^2 = m_p^2 + n_p^2 = |m_p + in_p|^2$

et $q^2 = m_q^2 + n_q^2 = |m_q + in_q|^2$

Alors $pq = |m_p + in_p|^2 \times |m_q + in_q|^2 = |(m_p + in_p)(m_q + in_q)|^2$

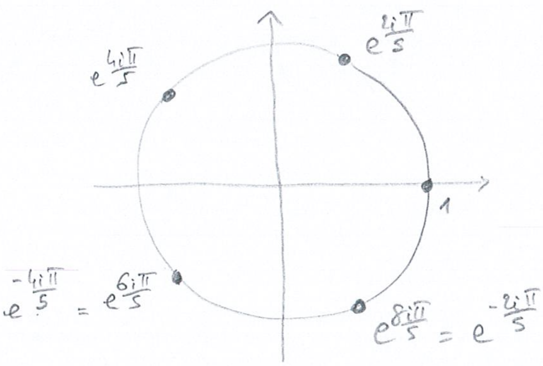
$$= \underbrace{(m_p m_q - n_p n_q)}_{\in \mathbb{Z}}^2 + \underbrace{(m_p n_q + m_q n_p)}_{\in \mathbb{Z}}^2$$

Donc $pq \in \mathcal{G}$.

3. $221 = 13 \times 17$ or $13 = 3^2 + 2^2 \in \mathcal{G}$ et $17 = 1^2 + 4^2 \in \mathcal{G}$ donc d'après la question précédente, $221 \in \mathcal{G}$.

$\boxed{\text{Exercice 25}}$

1. (Cours) Ce sont $1, e^{\frac{2i\pi}{5}}, e^{\frac{4i\pi}{5}}, e^{\frac{6i\pi}{5}}, e^{\frac{8i\pi}{5}}$, ou encore $1, e^{\frac{2i\pi}{5}}, e^{\frac{4i\pi}{5}}, e^{\frac{-4i\pi}{5}}$ et $e^{\frac{-2i\pi}{5}}$



2. $Q(z)(z-1) = (z-1)(1 + z + z^2 + z^3 + z^4)$

$= \cancel{z} + \cancel{z^2} + \cancel{z^3} + \cancel{z^4} + z^5 - 1 - \cancel{z} - \cancel{z^2} - \cancel{z^3} - \cancel{z^4}$

$= z^5 - 1 = P(z)$

$= (z-1)\left(z - e^{\frac{i2\pi}{5}}\right)\left(z - e^{-\frac{i2\pi}{5}}\right)\left(z - e^{\frac{i4\pi}{5}}\right)\left(z - e^{-\frac{i4\pi}{5}}\right)$

donc en simplifiant (ie en effectuant la division euclidienne des deux membres par $(z-1)$), on obtient $Q(z) = \left(z - e^{\frac{i2\pi}{5}}\right)\left(z - e^{-\frac{i2\pi}{5}}\right)\left(z - e^{\frac{i4\pi}{5}}\right)\left(z - e^{-\frac{i4\pi}{5}}\right)$ dont les racines sont bien celles données dans l'énoncé.

3. $\left(\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}\right)^{-1} = \left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^{-1} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{propriété} \\ \text{de l'exponentielle}}}{=} e^{-i\frac{2\pi}{5}} = \cos\left(-\frac{2\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \cos\frac{2\pi}{5} - i\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

ou encore : en posant $w = \cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}$, $\frac{1}{w} = \frac{\overline{w}}{w\overline{w}} = \frac{\overline{w}}{|w|^2} = \overline{w}$ car $|w|=1$

ce qui donne bien l'égalité voulue.

La réponse est identique pour $\cos\frac{4\pi}{5}+i\sin\frac{4\pi}{5}$.

4. On a bien, en développant, l'égalité donnée dans l'énoncé

Si z est racine de Q, comme $z\neq 0$, on a $z^2+z+1+z^{-1}+z^{-2}=0$

ie $(z+z^{-1}) + \underbrace{(z^2+2+z^{-1})}_{=(z+z^{-1})^2} - 1 = 0$

donc $z+z^{-1}$ est bien une racine du polynôme R défini par $R(y)=y^2+y-1$.

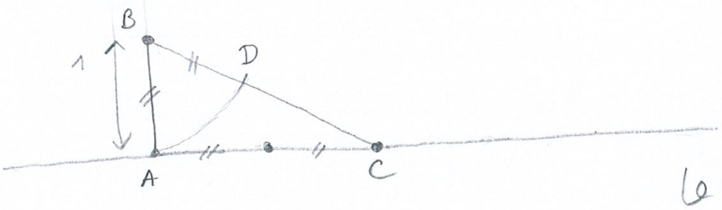
5. R a pour discriminant $\Delta = 1+4 = 5 > 0$ donc R a deux racines réelles distinctes, $\underbrace{\frac{-1+\sqrt5}{2}}_{y_1>0}$ et $\underbrace{\frac{-1-\sqrt5}{2}}_{y_2<0}$.

6. posons $w_1 = e^{i\frac{2\pi}{5}}$. w_1 est racine de Q donc $w_1+w_1^{-1}$ est racine de R.

Or $w_1+w_1^{-1} = w_1+\overline{w_1} = 2\,\mathrm{Re}(w_1) = 2\cos\frac{2\pi}{5} > 0$ donc $2\cos\frac{2\pi}{5} = y_1 = \frac{-1+\sqrt5}{2}$

ce qui donne bien $\boxed{\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{-1+\sqrt5}{4}}$. Le raisonnement est identique pour $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.

7.



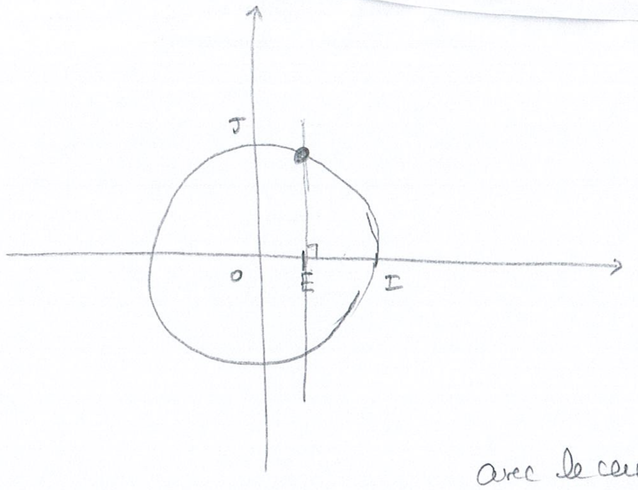
On commence par tracer la perpendiculaire au segment passant par l'une de ses extrémités. A l'aide du compas on reporte sur cette droite $2\times$ la longueur 1 pour obtenir le segment [AC] de longueur 2

Le segment [BC] est alors de longueur $\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt5$.

8. On peut construire un segment de longueur $\sqrt5-1$ en retranchant la longueur du segment [AB] à celle de [BC] : le segment [DC] (cf figure) a cette longueur.

Partant maintenant du segment [DC] de longueur $\sqrt5-1$, on trace sa médiatrice à l'aide du compas pour déterminer son milieu M, puis on détermine de même le milieu M' de [DM] et on a bien $DM' = \frac14 DC = \frac{\sqrt5-1}{4}$.

9.



On trace le cercle unité.
A partir du segment [OI] de longueur 1, on construit un segment de longueur $\cos\frac{2\pi}{5}$ comme précédemment.
On reporte cette longueur sur l'axe (Ox) pour obtenir un segment [OE] de longueur $\cos\frac{2\pi}{5}$. On trace la perpendiculaire à (Ox) passant par E. Son intersection avec le cercle unité est le point demandé.

Remarque Pour tracer une perpendiculaire à un segment [AB] passant par A, on n'a pas besoin d'équerre : on construit grâce à la règle et au compas le point B' tq A soit le milieu de [BB'], et on trace la médiatrice de ce segment, qui est la perpendiculaire voulue.

10. Une fois qu'on a le point F_1 d'affixe $e^{\frac{2i\pi}{5}}$, on trouve celui d'affixe $e^{\frac{4i\pi}{5}}$, F_2, en prenant l'intersection du cercle unité et du cercle de centre F_1 et de rayon IF_1 (puisqu'on doit avoir $IF_1 = F_1F_2$) puis on continue de même pour construire F_3 et F_4. Le pentagone régulier a pour sommets I, F_1, F_2, F_3 et F_4