Université Grenoble Alpes **Devoir surveillé 1**
mat 101 **13 oct. 2020**
durée: 1h

Correction

Exercice 1.— 1. $A = \{0,1,2,3\}$ et $B = \{-2,-1,2,7\}$.

2.
$$A \cup B = \{-2,-1,0,1,2,3,7\}, \quad A \cap B = \{2\} \quad , A - B = \{0,1,3\},$$
$$A \times \{0,1\} = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1),(2,0),(2,1),(3,0),(3,1)\} \quad \text{et} \quad \{x \in B | x \geq 0\} = \{2,7\}.$$

Exercice 2.—
$$\frac{2+i}{1+\mathrm{i}\sqrt{3}} = \frac{(2+i)(1-i\sqrt{3})}{(1+i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})} = \frac{2+i-2i\sqrt{3}+\sqrt{3}}{4} = \frac{2+\sqrt{3}}{4} + i\frac{1-2\sqrt{3}}{4}$$

et
$$\frac{\sqrt{18}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/12}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/6}} = 3\sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{6})} = 3\sqrt{2}e^{i\pi/4} = 3\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 3+3i.$$

Exercice 3.— Pour (E_1), $\Delta = (-3\mathrm{i})^2 + 4(3-\mathrm{i}) = -9+12-4\mathrm{i} = 3-4\mathrm{i}$. Le complexe $a+ib$ est une racine carrée complexe de Δ si et seulement si :

$$\begin{cases} a^2 & = \frac{\sqrt{9+16}+3}{2} = 4 \\ b^2 & = \frac{\sqrt{9+16}-3}{2} = 1 \\ ab & \text{est du signe de -4} \end{cases}$$

L'une des racines est donc $\delta = 2-\mathrm{i}$. Les solutions de l'équation sont alors

$$z_1 = \frac{-(-3i)+\delta}{2} = 1-\mathrm{i} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-(-3i)-\delta}{2} = -1+2\mathrm{i}.$$

Pour (E_2) : Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $(z+\mathrm{i})^3 = 1$ si et seulement si $(z+i)$ est une racine troisième de l'unité, i.e. $z+i=1$, $z+i=e^{i2\pi/3}$, $z+i=e^{i4\pi/3}$. Les solutions de l'équation sont donc $1-i$, $e^{i2\pi/3}-i$ et $e^{i4\pi/3}-i$.

Exercice 4.— 1. L'assertion dépend du paramètre y. Elle se lit : *il existe x réel strictement positif tel que x est strictement plus petit que y.*

2. L'assertion ne dépend d'aucun paramètre. Elle est close. Elle se lit : *Pour tout réel strictement positif, il existe un réel strictement positif qui lui est strictement inférieur.* Cette assertion est vraie : soit $y \in \mathbb{R}_+^*$. Posons $x = y/2$. On a bien $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $x < y$.

3. L'assertion ne dépend d'aucun paramètre. Elle est close. Elle se lit : *il existe un réel strictement positif strictement inférieur à tout réel strictement positif.* Cette assertion est fausse. En effet, soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. En posant $y = x$, on a $y \in \mathbb{R}_+^*$ et $x \geq y$. On vient donc de prouver que la négation de l'assertion est vraie : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\exists y \in \mathbb{R}_+^*$, $x \geq y$.

Exercice 5.— 1. $\exists n \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}, n \leq x$. Sa négation est : $\forall n \in \mathbb{Z}, \exists x \in \mathbb{R}, n > x$. C'est la négation qui est vraie. En effet : soit $n \in \mathbb{Z}$. Si on pose $x = n-1$, on a bien $x \in \mathbb{R}$ et $x < n$.

2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists m \in \mathbb{N}$, $n = m^2$. Sa négation est : $\exists n \in \mathbb{N}$, $\forall m \in \mathbb{N}$, $n \neq m^2$. C'est la négation qui est vraie : si on prend $n = 2$, on a vu en cours que n n'est pas le carré d'un nombre rationnel, donc n n'est *a fortiori* pas le carré d'un entier naturel.

Exercice 6.— 1. $\forall x, y \in \mathbb{R}, (x > \frac{1}{2} \wedge y > \frac{1}{2}) \Rightarrow x + y \neq 1$.

2. On démontre la contraposée. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Supposons que $x > \frac{1}{2}$ et $y > \frac{1}{2}$. Alors $x + y > \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ donc en particulier $x \neq 1$.

3. La réciproque est : $\forall x, y \in \mathbb{R}, (x \leq \frac{1}{2} \vee y \leq \frac{1}{2}) \Rightarrow x + y = 1$. Elle est fausse. Prenons $x = y = 0$. On a $(x \leq \frac{1}{2} \vee y \leq \frac{1}{2})$ mais $x + y \neq 1$.

Exercice 7.— Supposons que $z \in \mathbb{R}$, alors z s'écrit $a + \mathrm{i}.0$, et donc $\bar{z} = a - \mathrm{i}.0 = a = z$. Réciproquement, supposons que $z = \bar{z}$. Si $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, $\bar{z} = a - \mathrm{i}b$. On a donc $a + \mathrm{i}b = a - \mathrm{i}b$, donc $2\mathrm{i}b = 0$, donc $b = 0$, donc $z = a$, donc $z \in \mathbb{R}$.