Université Grenoble Alpes | **Devoir surveillé 1**
mat 101 | **13 oct. 2020**
durée: 1h

Exercice 1.— On considère les ensembles $A = \left[-\frac{1}{2}, \pi\right] \cap \mathbb{Z}$ et $B = \{x^2 - 2\,;\, x \in A\}$.

1. Écrire A et B en extension.
2. Écrire en extension $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $A \times \{-1, 0\}$, et $\{x \in B \,|\, x \geq 0\}$.

Exercice 2.— Mettre les nombres complexes suivants sous la forme $a + \mathrm{i}b$, avec $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\frac{2+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}\ ; \qquad \frac{\sqrt{18}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/12}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/6}}\ .$$

Exercice 3.— Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$(E_1) \quad z^2 - 3\mathrm{i}z - (3 - \mathrm{i}) = 0\ ; \qquad (E_2) \quad (z + \mathrm{i})^3 = 1\ .$$

Exercice 4.— Pour chaque assertion ci-dessous, dire si l'assertion dépend d'un ou plusieurs paramètres. Traduire en une phrase française chaque assertion. Si l'assertion est close (c'est-à-dire ne dépend d'aucun paramètre), déterminer si elle est vraie ou fausse et le démontrer.

1. $\exists x \in \mathbb{R}_+^*, x < y$.
2. $\forall y \in \mathbb{R}_+^*, \exists x \in \mathbb{R}_+^*, x < y$.
3. $\exists x \in \mathbb{R}_+^*, \forall y \in \mathbb{R}_+^*, x < y$.

Exercice 5.— Traduire chaque énoncé ci-dessous sous forme d'une assertion mathématique, puis écrire la négation. Entre l'énoncé et sa négation, dire lequel est vrai, et le démontrer.

1. Il existe un nombre entier plus petit que tous les nombres réels.
2. Tout entier naturel est le carré d'un entier naturel.

Exercice 6.—

1. Écrire la contraposée de l'assertion : $\forall x, y \in \mathbb{R}, x + y = 1 \Rightarrow (x \leq \frac{1}{2} \vee y \leq \frac{1}{2})$.
2. Démontrer l'assertion ou sa contraposée.
3. Énoncer la réciproque de l'assertion initiale, et déterminer si elle est vraie ou fausse.

Exercice 7.— Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer (en rédigeant !) qu'on a $z \in \mathbb{R}$ si et seulement si on a $z = \overline{z}$.