Chapitre 3 (bis)
Applications linéaires

Exercice 1. On considère les applications de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même définies par $f : (x, y) \mapsto (x, 0)$ et $g : (x, y) \mapsto (0, y)$.

1. Vérifier que f et g sont linéaires.
2. Calculer $f \circ f$, $g \circ g$, $f + g$, $f \circ g$ et $g \circ f$.

Exercice 2. Parmi les applications suivantes, lesquelles sont linéaires ?

1. Les applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définies par $f_1((x, y)) = (x + y, x - y)$, $f_2((x, y)) = (x, y)$, $f_3((x, y)) = (x, y^2)$.
2. Les applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définies par $f_4((x, y)) = x$, $f_5((x, y)) = xy$, $f_6((x, y)) = |x + y|$.
3. Les applications de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ définies par $f_7(M) = tr(M)$, $f_8(M) = tr(M^2)$, $f_9(M) = m_{1,1}$ (où $M = (m_{i,j})$).
4. Les applications de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dans lui-même définies par $f_{10}(h) = h'$, $f_{11}(h) = h \circ g$ et $f_{12}(h) = g \circ h$, où $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est l'application $g : x \mapsto x^2$.

Exercice 3. L'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $f((x, y, z)) = (xz, yz)$ est-elle linéaire ?

Exercice 4. Soit E un espace vectoriel et $f \in L(E)$. On définit l'application ϕ_f de $L(E)$ dans lui-même par $\phi_f(g) = f \circ g$. Montrer que ϕ_f est linéaire.

Exercice 5. On considère l'application f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie pour $z \in \mathbb{C}$ par $f(z) = \bar{z}$.

1. f est-elle $\mathbb{C}$-linéaire ?
2. f est-elle $\mathbb{R}$-linéaire ?

Exercice 6. Soit E un espace vectoriel et F_1, F_2 deux sous-ev supplémentaires de E. Ainsi, tout élément x de E s'écrit de manière unique sous la forme $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in F_1$ et $x_2 \in F_2$. On définit alors $f(x) = x_1 - x_2$.

1. Dans cette question, on considère le cas particulier $E = \mathbb{R}^2$, $F_1 = \text{Vect}((1, 0))$ et $F_2 = \text{Vect}((0, 1))$. Faire un dessin représentant un vecteur x et son image $f(x)$. Quelle transformation géométrique f est-elle ?
2. On revient au cas général. Montrer que f est linéaire.

3. Montrer que $f \circ f = \mathrm{Id_E}$. Que signifie géométriquement cette relation ?
4. Montrer que f est un isomorphisme.

Exercice 7. On considère l'application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $f((x, y, z)) = (x - y, y - z)$.

1. Déterminer $Ker(f)$.
2. f est-elle injective ? Surjective ?

Exercice 8. Soit $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et E le sous-espace de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ engendré par les fonctions $e_0 : x \mapsto 1$, $e_1 : x \mapsto \cos x$ et $e_2 : x \mapsto \cos^2 x$. On considère l'application linéaire de E dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ définie par :

$$\begin{aligned} f : E &\to \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ y &\mapsto y'' + 4y \end{aligned}$$

(y'' désignant la dérivée seconde de la fonction y).

1. Montrer que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(e_0, e_1)$.
2. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$.

Exercice 9. Soit $\mathcal{P}_2$ l'espace vectoriel des fonctions polynômes réelles de degré inférieur ou égal à 2, et f l'application linéaire de $\mathcal{P}_2$ dans $\mathbb{R}^2$, définie par :

$$\begin{aligned} f : \mathcal{P}_2 &\to \mathbb{R}^2 \\ p &\mapsto (p(1), p'(0)). \end{aligned}$$

1. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$.
2. Montrer que f est surjective.

Exercice 10. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f une application linéaire non nulle de E dans $\mathbb{K}$. Montrer que f est surjective.

Exercice 11. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et f et g des endomorphismes de E vérifiant $g \circ f = f \circ g$. Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont stables par g.

Exercice 12. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E vérifiant $f \circ f = f$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont supplémentaires.
2. Soient $F = \mathrm{Ker}(f)$ et $G = \mathrm{Im}(f)$. Montrer que f est la projection sur G, parallèlement à F.

(Un endomorphisme vérifiant $f \circ f = f$ est appelé un projecteur)

Exercice 13. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Ker}(f^k) \subset \mathrm{Ker}(f^{k+1})$ et $\mathrm{Im}(f^k) \supset \mathrm{Im}(f^{k+1})$.
2. Montrer que s'il existe un entier p tel que $\mathrm{Ker}(f^p) = \mathrm{Ker}(f^{p+1})$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{Ker}(f^p) = \mathrm{Ker}(f^{p+k})$.

   (On démontrerait de même que s'il existe un entier q tel que $\mathrm{Im}(f^q) = \mathrm{Im}(f^{q+1})$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{Im}(f^q) = \mathrm{Im}(f^{q+k})$.)