Chapitre 1
Matrices

Exercice 1. – Produit de matrices
Calculer les produits matriciels :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \\ 1 & c & a \end{pmatrix}$$

Exercice 2. – Matrices 2×2
Soit deux matrices,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer les matrices :
AB, BA, A^2, B^2, $A^2 - B^2$, $(A + B)(A - B)$, $A^2 + B^2 + 2AB$, $(A + B)^2$.

Exercice 3. – Trace d'une matrice carrée
Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle trace de la matrice A, notée $tr(A)$, la somme des éléments diagonaux de A : $tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}$.

1. Montrer que pour tout scalaire $\alpha \in \mathbb{K}$ et toutes matrices A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $tr(\alpha A) = \alpha tr(A)$, $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$ et $tr(AB) = tr(BA)$. En déduire que pour toute matrice $P \in GL_n(\mathbb{K})$ on a $tr(P^{-1}AP) = tr(A)$.
2. Existe-t-il des matrices A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB - BA = I_n$?

Exercice 4. – Trace d'une matrice (bis)
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si $tr\left(AA^T\right) = 0$ alors $A = 0$.

Exercice 5. – Matrices symétriques
On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est symétrique si $A = A^T$.

1. Que peut-on dire de la taille d'une matrice symétrique ?
2. Montrer que pour tout $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, MM^T et M^TM sont symétriques.

Exercice 6. – Commutant d'une matrice

Trouver les matrices réelles qui commutent avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. De même avec $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, où a et b sont deux réels.

Exercice 7. – Matrices qui commutent avec tous les éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$

On sait que le produit des matrices n'est pas une opération commutative dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, mais il existe des matrices qui commutent avec toutes les autres comme la matrice unité I_n, ou la matrice nulle 0. Le but de cet exercice est de déterminer l'ensemble S des matrices qui commutent avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

1. On considère les matrices :

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Montrer qu'une matrice A appartient à S si et seulement si elle commute avec ces quatres matrices.
2. En remarquant que $E_4 = E_2E_3$ et que $E_1 = I_2 - E_4$, montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que A soit élément de S est que A commute avec les matrices E_2 et E_3.
3. Déduire de la question précédente une condition nécessaire et suffisante portant sur les coefficients a, b, c et d pour que $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ appartienne à S. Quelle est la forme générale des matrices de S.

Exercice 8. – Calcul des puissances d'une matrice

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour tout entier n strictement positif.

Exercice 9. – Deux méthodes de calcul de puissances

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, où a et b sont des réels quelconques.

1. Calculer A^2 et A^3.
2. Calculer A^n pour tout entier n strictement positif.
3. En remarquant qu'il existe une matrice N telle que $A = aI_2 + bN$, retrouver le résultat précédent en utilisant la formule du binôme de Newton.

Exercice 10. – Calcul des puissances d'une matrice (bis)

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et soit $B = A - I_3$.

   (a) Calculer B^2, B^3 en déduire une formule de récurrence que l'on démontrera pour B^n, pour tout entier n.

   (b) Développer $(B+I_3)^n$ par la formule du binome et simplifier.
   (c) En déduire A^n Pour tout entier n.

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Pour tout entier n, calculer A^n en utilisant $A - I_4$.

Exercice 11. – Inversibilité

1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.
   Montrer que $AB = AC$. A-t-on $B = C$? A peut-elle être inversible ?
   (b) Déterminer toutes les matrices F telles que $AF = 0$ (0 étant la matrice dont tous les coefficients sont nuls).
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Déterminer toutes les matrices B telles que $BA = I_2$.

Exercice 12. – Calcul d'inverse

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^2 et vérifier que $A^2 = A + 2I_3$, où I_3 est la matrice identité 3×3.
En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

Exercice 13. – Inverse d'une matrice vérifiant une relation polynomiale

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Vérifier que $A^2 - 5A + 4I = 0$. En déduire que A est inversible et calculer sa matrice inverse.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant une relation de la forme
$$a_0 I + a_1 M + ... + a_q M^q = 0, \text{ avec } a_0, ...a_q \in K \text{ et } a_0 \neq 0.$$
   Montrer que M est inversible et calculer sa matrice inverse.

Exercice 14. – Matrices nilpotentes

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A est dite nilpotente si il existe un entier positif p tel que $A^p = 0$.

1. Montrer que si A est nilpotente alors $I - A$ est inversible et préciser son inverse.
2. Montrer que la somme de deux matrices nilpotentes qui commutent est également une matrice nilpotente.

Exercice 15. – Forme échelonnée réduite
Parmi les matrices suivantes, dire celles qui sont échelonnées réduites et celles qui ne le sont pas :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 16. – Forme échelonnée réduite (bis)
Mettre les matrices suivantes sous forme réduite par des opérations élémentaires sur les lignes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 17. – Calcul d'inverse par la méthode du pivot de Gauss
En utilisant la méthode du pivot de Gauss, montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer son inverse.

Exercice 18. – Pour s'entraîner
Calculer les inverses des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 19. – Matrice à diagonale strictement dominante
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que pour tout $1 \leq i \leq n$, $|a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$.
Montrer que A est inversible.