MM049 **2011-2012**
Université Paris 6

Équations différentielles : examen 2ème session

Mercredi 13 juin 2012

Exercice 1.— (3 points) On considère l'application $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$,

$$M : t \mapsto e^{-t} \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$$

1. Exprimer $M(t+s)$ à l'aide de $M(t)$ et de $M(s)$.
2. Pour une matrice A quelconque, que vaut la dérivée en $t = 0$ de l'application $t \mapsto e^{tA}$?
3. De quelle équation différentielle l'application M est-elle le flot ?

Exercice 2.— (4 points) On se place dans le plan $\mathbb{R}^2$.
1. Qu'obtient-on en conjuguant l'homothétie linéaire f_2 de rapport 2 par la transformation Φ du plan donnée, en coordonnées polaires, par

$$(r, \theta) \mapsto (r, \theta + \log(r)) \quad ?$$

(On pourra commencer par exprimer f_2 et Φ^{-1} en coordonnées polaires).
2. Montrer que toute homothétie dilatante du plan,

$$(x, y) \mapsto (kx, ky), \qquad (k > 1)$$

est topologiquement conjuguée à f_2. On donnera une formule pour la conjugaison. (On pourra commencer par résoudre le problème en dimension un). En déduire que toutes le homothéties dilatantes sont topologiquement conjuguées.
3. Montrer plus généralement que toutes les similitudes dilatantes

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto k \begin{pmatrix} \cos(\theta_0) & -\sin(\theta_0) \\ \sin(\theta_0) & \cos(\theta_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad (k > 1, \theta_0 \in \mathbb{R})$$

sont topologiquement conjuguées (comme avant, on donnera une formule, ou au moins on expliquera précisément comment en trouver une).
4. A quelles conditions sur k et k' les homothéties de rapports respectifs k et k' sont-elles différentiablement conjuguées sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 3.— (5 points)
1. Résoudre l'équation $x' = x^n$ avec la condition initiale $x(0) = 1$, où n est un entier ≥ 2.
2. Que pouvait-on dire *a priori* de la régularité de la solution ?
3. Que vaut l'intervalle de vie de la solution ?
4. Soit x la solution maximale de l'équation $x' = x^2 + \cos^{20}(x)$ avec condition initiale $x(0) = 1$. Montrer que x n'est pas définie sur $\mathbb{R}$. (On pourra utiliser le lemme sur les sous-solutions, qui apparaît dans la preuve du lemme de Gronwall).

Exercice 4.— (8 points) On considère une fonction $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Soit z une solution de l'équation différentielle

$$z'' + r(x)z = 0.$$

On suppose que z n'est pas la fonction nulle. *Chaque fois que nécessaire, on pourra supposer la fonction r aussi régulière qu'on veut, en précisant où est utilisée la régularité.*

1. Montrer que les zéros de z sont isolés.

On considère également une solution y de $y'' + q(x)y = 0$ où q est définie sur $\mathbb{R}$, et on suppose que pour tout x, $q(x) > r(x)$.

2. Soient $x_0 < x_1$ deux zéros successifs de z. On suppose que pour tout $x \in]x_0 x_1[$, $z(x)$ et $y(x)$ sont strictement positifs. Trouver une contradiction en étudiant les variations de la fonction $W = y'z - z'y$ entre x_0 et x_1.

3. En déduire que si $x_0 < x_1$ sont deux zéros successifs quelconque de z, la fonction y s'annule sur $]x_0 x_1[$.

4. On suppose qu'il existe m et M strictement positifs tels que $m^2 < q(x) < M^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que deux zéros successifs x_0 et x_1 de y vérifient

$$\frac{\pi}{M} < |x_1 - x_0| < \frac{\pi}{m}.$$

On suppose maintenant que q est une fonction strictement positive, de classe C^∞, et on s'intéresse aux solutions de l'équation

$$y'' + \lambda q(x)y = 0,$$

où λ est un paramètre réel. Soit y_λ la solution vérifiant $y_\lambda(0) = 0$, $y'_\lambda(0) = 1$.

5. Que peut-on dire de l'application $(x, \lambda) \mapsto y_\lambda(x)$?

6. (optionnelle) On note x^1_λ le premier zéro strictement positif de y_λ. Montrer que l'application $\lambda \mapsto x^1_\lambda$ est continue. On pourra considérer $y_\lambda(x^1_{\lambda_0} - \varepsilon)$ et $y_\lambda(x^1_{\lambda_0} + \varepsilon)$ pour un $\varepsilon > 0$ assez petit.

7. (optionnelle) Montrer que l'application $\lambda \mapsto x^1_\lambda$ est de classe C^∞ (on pourra utiliser le théorème des fonctions implicites).

8. Montrer qu'il existe $\lambda_1 > 0$ tel que $x^1_{\lambda_1} = 1$. On pourra utiliser les questions 4 et 6.

9. Expliquer rapidement comment montrer qu'il existe un nombre λ_n tel que le n^{eme} zéro de la fonction y_{λ_n} soit égal à 1.
