

Devoir de géométrie différentielle

(H. Eynard-Bontemps, A. Oancea)

Distribué le 17/10. À rendre *au plus tard* le 24/10 lors du cours.

Le devoir doit être rédigé individuellement. Le soin apporté à la rédaction sera apprécié. Par contre, nous encourageons les discussions collectives autour du sujet.

Exercice 1. Soit M une variété de dimension n . Montrer que tout point admet une carte modelée sur :

- (i) \mathbb{R}^n ;
- (ii) $B^n(1)$;
- (iii) $B^n(\epsilon)$, avec $\epsilon > 0$ quelconque ;
- (iv) un ouvert $V \subset \mathbb{R}^n$ quelconque.

Exercice 2. Montrer que $\mathbb{R}P^2$ privé d'un point est difféomorphe au ruban de Möebius \mathcal{R} (cf. feuille de TD 3). On pourra commencer par remarquer que $\mathbb{R}P^2$ privé d'un point est difféomorphe $(S^2 \setminus \{N, S\})/\{\pm \text{id}\}$, où N et S désignent les pôles Nord et Sud de la sphère.

Exercice 3. Soit

$$\mathcal{H} := \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1 + z^2\} \subset \mathbb{R}^3$$

un *hyperboloïde à une nappe*.

(i) Montrer que \mathcal{H} est une sous-variété lisse de \mathbb{R}^3 de dimension 2. Déterminer l'espace tangent à \mathcal{H} en tout point de \mathcal{H} .

(ii) Montrer que \mathcal{H} peut être recouvert par une famille lisse à un paramètre de droites disjointes dans \mathbb{R}^3 , et qu'il existe deux familles de droites ayant cette propriété. Faire un dessin.

(iii) Écrire pour chacune de ces familles un champ de vecteurs lisse sur \mathcal{H} dont les courbes intégrales sont les droites de la famille.

(iv) Calculer le crochet des deux champs de vecteurs que vous aurez construits de cette manière.

Exercice 4. Soit Δ une droite de pente irrationnelle dans \mathbb{R}^2 . Montrer que la restriction à Δ de la projection canonique $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ définit une immersion injective de Δ dans le tore \mathbb{T}^2 dont l'image est dense dans \mathbb{T}^2 . En déduire que cette image n'est pas une sous-variété de \mathbb{T}^2 (on pourra montrer qu'une sous-variété M d'une variété N est nécessairement un fermé de N).