DM MAT303

Exercice 1, seconde session

1) Rq préliminaire : la fonction est définie sur $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = -y\}$ (droite vect. de pente -1)

. $\forall x \neq 0$, $\underbrace{f(x,0)}_{\text{bien défini}} = \frac{x^2}{x} = x \xrightarrow[x \to 0]{} 0$

. $\forall x \neq 0$, $x \neq x - x^2$ donc $f(x, -x+x^2)$ est bien défini et vaut $\frac{x^2}{x^2} = 1 \xrightarrow[x\to 0]{} 1$

Donc on peut construire 2 suites $u_n = \left(\frac{1}{n}, 0\right)$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $v_n = \left(\frac{1}{n}, -\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$ qui tendent toutes deux vers $(0,0)$ dans $\mathbb{R}^2$ mais tq $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \neq 1 = \lim_{n\to+\infty} f(v_n)$

Donc la fonction f n'admet pas de limite en 0

---

2) a) Si $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ $(r \in \mathbb{R}_+^*, \theta \in \mathbb{R})$,

$$|f(x,y)| = \left|\frac{3r^2\cos^2\theta \, r\sin\theta}{2r^2\underbrace{(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}_{1}}\right| = \left|\frac{3}{2} r \cos^2\theta \sin\theta\right| \leq \frac{3}{2} r$$

Donc $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ (valable aussi en $(0,0)$), $|f(x,y)| \leq \frac{3}{2} \|(x,y)\|_{\text{eucl}}$.

Donc $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existe et vaut $\underset{f(0,0)}{0}$, par comparaison.

Donc f est continue en $(0,0)$.

2) b) Rq préliminaire : sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} =: U$, f est une fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas, donc elle est dérivable par rapport à chaque variable, et même C^∞. On peut en particulier calculer les dérivées partielles :

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{3}{2} \frac{2xy(x^2+y^2) - x^2y \times 2x}{(x^2+y^2)^2} = 3\frac{xy^3}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{3}{2} \frac{x^2(x^2+y^2) - x^2y \times 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{3}{2}\frac{x^4 - x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} \end{array}\right.$$

2) c) $\forall x \neq 0, \quad \dfrac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = 0 \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$ donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe et vaut 0.

De la même façon, $\forall y \neq 0, \quad \dfrac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = 0 \underset{y \to 0}{\longrightarrow} 0$ donc $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

2) d) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,x) = 3 \dfrac{x^4}{(2x^2)^2} = \dfrac{3}{4} \underset{x \to 0}{\not\longrightarrow} 0 = \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas C^0 en 0
$\forall x \neq 0$

3) Les composantes de f sont polynomiales donc f est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^2$, et en particulier y admet des dérivées partielles.

$$\mathrm{Jac} f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}(x,y)$$

$$= \begin{pmatrix} 3y & 3(y^2+x) \\ -2xy & -x^2 \end{pmatrix}$$

En particulier, $\mathrm{Jac} f(1,1) = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

$$\forall\, v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad df_{(1,1)}(v) = \mathrm{Jac} f(1,1) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3v_1 + 6v_2 \\ -2v_1 - v_2 \end{pmatrix}$$

4) f est C^2 sur $\mathbb{R}^2$ par composition. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy\cos(x^2y)$ donc $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2x\cos(x^2y) - 2x^3y\sin(x^2y)$

et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y\cos(x^2y) - 4x^2y^2\sin(x^2y)$

$=$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2\cos(x^2y)$ donc $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -x^4\sin(x^2y)$ et on retrouve

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x\cos(x^2y) - 2x^3y\sin(x^2y)$

DM 3

Exercice 4 — 1ère session

1) $F = f^{-1}(\underbrace{[0,+\infty[}_{\text{fermé de } \mathbb{R}})$. L'image réciproque d'un fermé de $\mathbb{R}$ par une appl. C^0 $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est un fermé de $\mathbb{R}$.

Si ce résultat du cours n'est pas admis, on peut dire que ${}^cF = f^{-1}(]-\infty,0[)$ image réciproque d'un ouvert par une application C^0 donc ouvert.

Dans $\mathbb{R}$, un s-ens est compact ssi il est fermé et borné.

Donc F doit être en outre borné pour être compact.

2) a) $F = \{x\in\mathbb{R},\ e^x \geq 1\} = \mathbb{R}_+$, qui n'est pas borné, donc pas compact.

b) $F = \{x\in\mathbb{R} \mid x(1-x)\geq 0\}$

$= [0,1]$

(tableau de signe ou inégalités)

		0		1	
x	$-$	0	$+$		$+$
$1-x$	$+$		$+$	0	$-$
$x(1-x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

qui est borné (et fermé d'après 1) donc compact.

(Dans ces 2 questions, les fonctions considérées sont bien C^0 de $\mathbb{R}$ ds $\mathbb{R}$)

3) Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, en particulier $\exists A\in\mathbb{R}$ tq $\forall x\geq A$, $f(x)\geq 0$,
donc $[A,+\infty[\subset F$, qui n'est donc pas borné, donc pas compact.

4) $\exists A,B\in\mathbb{R}$ tq $\forall x\leq A$, $f(x)<0$ et $\forall x\geq B$, $f(x)<0$
par déf de la limite. Donc $F\subset [A,B]$, donc est borné (et tjs fermé) donc compact.