DM MAT 302 – Correction

• <u>Primitives de $f : x \longmapsto \dfrac{x-1}{4x^2-8x+8}$</u>. Déterminons déjà le domaine de définition de f.

$$4x^2-8x+8 = 4(\underbrace{x^2-2x+2}_{\Delta = 4-4\times 2 = -4<0})$$

donc ce trinôme ne s'annule pas, et est >0 car le terme dominant est x^2

Donc f est définie et C^0 sur $\mathbb{R}$, et ses primitives aussi.

$$\int \frac{x-1}{4x^2-8x+8}\,dx = \int \frac{1}{8}\,\frac{2x-2}{x^2-2x+2}\,dx = \frac{1}{8}\ln\left|x^2-2x+2\right| + \text{cste}$$

$$= \frac{1}{8}\ln(\underbrace{x^2-2x+2}_{>0 \text{ d'après ci-dessus}}) + \text{cste}$$

• <u>Primitives de</u> $x \longmapsto \displaystyle\int \frac{x^2}{(1+x^2)^3}\,dx$ (fonction définie et C^0 sur $\mathbb{R}$ donc ses primitives aussi)

IPP $u(x) = x$, $v(x) = -\frac{1}{4}\frac{1}{(1+x^2)^2}$ $\longrightarrow$ $u'(x) = 1$, $v'(x) = \frac{x}{(1+x^2)^3}$

$$\int \frac{x^2}{(1+x^2)^3}\,dx = \int x\cdot\frac{x}{(1+x^2)^3}\,dx = \left[x\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{(1+x^2)^2}\right] + \int 1\cdot\frac{1}{4}\,\frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx$$

$$= -\frac{1}{4}\,\frac{x}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{4}\underbrace{\int\frac{dx}{(1+x^2)^2}}_{I_2} \qquad (*)$$

Les $I_n = \displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)^n}$ se calculent par récurrence, par IPP.

$$I_{n+1} = \int\frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} = \int\left(\frac{1+x^2}{(1+x^2)^{n+1}} - \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}\right)dx = I_n - \int x\cdot\frac{x}{(1+x^2)^{n+1}}\,dx$$

et $\displaystyle\int x\cdot\frac{x}{(1+x^2)^{n+1}}\,dx = -\frac{x}{2n(1+x^2)^n} + \frac{1}{2n}\underbrace{\int\frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx}_{I_n}$. Donc $I_{n+1} = \dfrac{x}{2n(1+x^2)^n} + \dfrac{2n-1}{2n}I_n$

$$\boxed{\text{IPP } u(x) = x,\ v(x) = -\frac{1}{2n}\frac{1}{(1+x^2)^n} \longrightarrow u'(x) = 1,\ v'(x) = \frac{x}{(1+x^2)^{n+1}}}$$

En particulier

$$I_2 = \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\underset{\text{arctan}}{I_1}$$

$$= \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\arctan x + \text{cste} \quad (**)$$

Et finalement, $(*)$ et $(**)$ donnent :

$$\boxed{\int\frac{x^2\,dx}{(1+x^2)^3} = -\frac{1}{4}\,\frac{x}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{8}\,\frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{8}\arctan(x) + \text{cste}}$$