Chap. 1 Le corps des réels

Planning environ un § par séance

Squelette
1. Def de $\mathbb{R}$ & 1ères prop
2. Suites réelles
3. développement décimal
4. dénombrabilité
5. fonctions réelles

Idée du chapitre : comme dit dans l'intro, l'objet de ce cours est d'établir un cadre propice aux notions de limite, continuité, approximation. Ces notions vous les connaissez dans $\mathbb{R}$, mais elles s'étendent à un cadre bcp + vaste. Pour cela, il nous faut dégager de ce que vous connaissez la "substantifique moëlle", ce qui n'est pas spécifique à $\mathbb{R}$ mais peut se généraliser à tt un tas d'espaces, notamment les espaces métriques que nous verrons dans le chap. 2.

Mais pour pouvoir faire cela proprement, il faut qu'on se mette d'accord sur ce qu'est $\mathbb{R}$

Question à l'assemblée : c'est quoi $\mathbb{R}$? comment vous le décririez à quelqu'un qui ne sait pas ce que c'est ?

- "l'ensemble de tous les nb" hum, ok, mais c'est quoi un nb ? On pourrait dire que c'est $\mathbb{C}$ l'ens de ts les nb.
- "l'ens des longueurs alg sur une droite" Mais c'est quoi une droite si on ne sait pas ce qu'est $\mathbb{R}$? Comment je sais que ce n'est pas $\mathbb{Q}$?
- "nombres" → choses qu'on peut additionner, soustraire, multiplier, diviser
  ↳ corps
- "comment ça se différencie de $\mathbb{C}$?" → (totalement) ordonné "sur une droite" y en a qui sont à gauche d'autres à droite
- "comment ça se différencie de $\mathbb{Q}$? des nb décimaux ? des nb alg ?"
- "sans trou" "tous les nb possibles" une propriété de "continuité" en fait de "complétude" qu'on peut exprimer à l'aide de la notion de borne supérieure.

Ce sont toutes les notions que nous allons voir dans le $\boxed{\text{1er } \S}$

Ensuite comme promis nous reverrons les notions de limites pour les suites réelles et d'autres notions associées. §2

Nous ferons une petit aparté sur la notion de développement décimal (qui pourrait d'ailleurs être une autre façon de définir les nb réels comme on le verra en DM) §3, qui est plutôt l'angle d'approche que l'on a au collège/lycée ; puis une nouvelle aparté de théorie des ensembles avec la notion de dénombrabilité (qui distingue $\mathbb{R}$ de $\mathbb{Q}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{A}$ ...)

Enfin, après les suites, nous étudierons les fonctions réelles sous l'angle de la topologie et leurs propriétés liées à celles de $\mathbb{R}$, puis des notions de convergence pour les suites et séries de fonctions que nous reverrons dans les chap. ultérieurs avec encore une fois un point de vue topologique. §§

§1 Définitions de $\mathbb{R}$ et premières propriétés

D'abord, comme annoncé dans l'intro, la notion de corps, et avant cela celle de groupe. On fait comme si on ne connaissait pas $\mathbb{R}$ pour l'instant, mais $\mathbb{Q}$ oui.

(Rappel)

Def 1.1 Un ensemble G muni d'une opération $*$ est un groupe si les prop suivantes sont satisfaites :

- (associativité) $\forall x,y,z \in G, \quad x*(y*z) = (x*y)*z$
- (élément neutre) $\exists e \in G$ t.q $\forall x \in G, \quad e*x = x*e = x$ (et alors e est unique)
- (symétrique) $\forall x \in G, \ \exists y \in G$ tq $x*y = y*x = e$ (et alors y est unique et noté x^{-1})

On dit que G est un groupe abélien si en outre

- (commutativité) $\forall x,y \in G, \quad x*y = y*x$

exo chercher d'autres exemples/ contre-exemples

(Rappel) Une opération ou loi de composition interne est juste une application $*$ de $G\times G$ dans G. On note $x*y$ l'image de (x,y) par cette application.

Ex : $(\mathbb{Z},+)$, ~~$(\mathbb{N},+)$~~, ~~$(\mathbb{Q},\times)$~~, ..., $(Bij(E),\circ)$ ← non abélien en général (à partir de 3 éléments)

Def 1.2 On appelle corps un ensemble K muni de deux opérations notées $+$ et $\cdot$ (ou $\times$) vérifiant les prop suivantes :

(i) $(K,+)$ est un gr commutatif, dont l'élément neutre est noté 0 ;

(ii) $(K\setminus\{0\},\cdot)$ __________ , __________ 1

(iii) la loi $\cdot$ est distributive sur la loi $+$:

$x.(y+z) = x.y + x.z \quad \forall x,y,z \in K$ (facile à retenir, comme ce que vous savez sur $\mathbb{R}$ depuis le collège)

Remarque Au sens strict la def ci-dessus est celle d'un corps commutatif. On peut aussi déf. les corps gauches en enlevant la commutativité mais ça n'interviendra pas ici.

Notations Dans un corps K on note :

- $-x$ l'opposé de x (le sym. de x pour l'addition)
- $1/x$ ou x^{-1} l'inverse de x (sym. de x pour la multiplication)
- xy au lieu de $x\cdot y$

Ex de corps $(\mathbb{Q},+,\times)$ (addition et multiplication usuelles)

Alors ça c'était pour le côté "nombres". Maintenant pour le côté "algébrique" l'ordre.

Def 1.3 Un ordre sur un ensemble E est une relation, notée $\leq$, telle que :

- (réflexivité) $\forall x \in E$, $x \leq x$
- (transitivité) si $x \leq y$ et $y \leq z$, $x \leq z$
- (antisymétrie) si $x \leq y$ et $y \leq x$ alors $x = y$

On dit que l'ordre est total si en outre

- $\forall x, y \in E$, on a $x \leq y$ ou $y \leq x$ ("ou" non exclusif)

Un ensemble muni d'un ordre (total) est dit (totalement) ordonné

exo
d'autres exemples ?

ex $\leq$ sur $\mathbb{N}$ est un ordre total

$\subset$ sur les sous-ensembles d'un ensemble est un ordre non total

(on peut avoir $A \not\subset B$ et $B \not\subset A$:


)

Rappel Une relation sur un ensemble E est une partie $\mathcal{R}$ de $E \times E$
on dit que x et y satisfont cette relation si $(x,y) \in \mathcal{R}$
dans le cas où la relation est un ordre on écrit $x \leq y$ ssi $(x,y) \in \mathcal{R}$

Notations On écrit $x < y$ si $x \leq y$ et $x \neq y$
$x \geq y$ si $y \leq x$

On a le corps, l'ordre, il nous manque la fameuse "borne sup" -
Def en 2 temps, importante et assez subtile.

manque
corps
ordonné
ici
p. I.7

Def 1.4 (Imp) Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné et $A \subset E$.

1) On dit que le sous ensemble A est majoré (dans E) s'il existe $x \in E$ tq $x \geq y$ $\forall y \in A$. Un tel x est appelé $\boxed{\text{un}}$ majorant de A (dans E).

(⚠ en général il n'y en a pas qu'un)

2) S'il existe $x \in E$ tel que
(i) x est un majorant de A
(ii) si y est un majorant de A ds E, alors $y \geq x$

alors il est unique, on l'appelle borne supérieure de A et on le note $\sup(A)$

exo

Def équivalente (cf page suivante)

Remarque/exo

Exo

(i). définir de façon similaire un sous-ens. minoré, un minorant et une borne inférieure.

(ii). ⚠ tout ensemble majoré n'admet pas forcément une borne sup (dans $\mathbb{N}$ oui, dans $\mathbb{R}$ ça fait partie de la def, mais dans $\mathbb{Q}$:

$\{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 2\}$ est majoré (par 2 par exemple)

mais n'admet pas de borne sup dans $\mathbb{Q}$ (il en admettra bien sûr une ds $\mathbb{R}$, connue sous la notation $\sqrt{2}$, mais ici on ne sait pas encore ce que sont les réels donc on ne sait pas ce qu'est $\sqrt{2}$. Ceci dit l'idée est bien que $\sqrt{2}$, quelle que en soit la def, est irrationnel, en autrement dit sans utiliser $\sqrt{2}$, que $x^2 = 2$ n'a pas de solution rationnelle)

cf ci-après.

Par contre si un ss. ens majoré admet une borne sup, comme dit dans la def. celle-ci est unique.

Exo

Preuve Supposons qu'il existe x_1 et x_2 comme dans la def
x_2 est un majorant de d'après la prop(ii) pr x_1, $x_2 \geq x_1$
de façon symétrique $x_1 \geq x_2$
dc par antisymétrie de la relation d'ordre, $x_1 = x_2$ □

(iii) même si $m = \sup(A)$ existe, on n'a pas forcément $m \in A$

ex. $[0,1[$ 1 satisfait bien la def mais $1 \notin [0,1[$.
$\hat{\mathbb{Q}}$

Si $m \in A$, m est le + gd élément de A car $m \in A$ et $m \geq x$ $\forall x \in A$.

avant

Définition équivalente Soit $A \subset E$ et $\mathcal{M}$ l'ensemble des majorants de A.

A possède une borne sup $\Leftrightarrow$ M possède un plus petit élément et sup(A) est ce + petit élément

Retour sur $A = \{x \in \mathbb{Q}, x^2 \leq 2\}$

On a vu que A était majoré. Supposons par l'absurde que A admet une borne sup $m \in \mathbb{Q}$. Montrons que $m^2 = 2$ et arrivons à une contradiction.

On a $m > 0$ car $1 \in A$

a) $\underline{\text{si } m^2 > 2}$ montrons qu'on peut trouver $\varepsilon \in \mathbb{Q}, \varepsilon > 0$ tq $2 < (m-\varepsilon)^2 < m^2$

on aura alors $x = m - \varepsilon$ majorant de A (puisque $y \geq x \Rightarrow y^2 > 2$)

et $x < m$ ce qui sera une contradiction ac $m = \sup A$

$\forall \varepsilon \in]0, m[$ $\quad 2 < (m-\varepsilon)^2 < m^2 \iff 2 < (m-\varepsilon)^2 \iff 2\varepsilon m - \varepsilon^2 < m^2 - 2$

(l'autre inégalité est triviale pour $\varepsilon < m$)

donc $\varepsilon = \dfrac{m^2 - 2}{2m}$ (qui est bien rationnel) convient. □

Ainsi $\underline{m^2 \leq 2}$.

b) $\underline{\text{si } m^2 < 2}$ même idée ! on va trouver $x \in A$ tq $x > m$ ce qui contredira "m majorant".

On cherche x de la forme $m + \varepsilon$ ac $(m+\varepsilon)^2 \leq 2$

ce qui équivaut à $2\varepsilon m + \varepsilon^2 \leq \underbrace{2 - m^2}_{>0}$ or il existe des rationnels >0 aussi petits

qu'on veut donc... mais on peut en donner un explicite : $\dfrac{2-m^2}{m+2}$. □

(exo)

Ainsi $m^2 \geq 2$

donc $\underline{m^2 = 2}$

c) m s'écrit $\dfrac{p}{q}$ ac $p, q \in \mathbb{N}^*$ et $\operatorname{pgcd}(p,q) = 1$; alors $p^2 = 2q^2$ donc p est pair : $p = 2\tilde{p}$

donc $2q^2 = 4\tilde{p}^2$ dc $q^2 = 2\tilde{p}^2$ donc q est pair, ce qui contredit $p \wedge q = 1$.

On a donc exclu tous les cas.

$\underline{A \text{ ne possède pas de borne sup dans } \mathbb{Q}}$.

$\boxed{\text{Def } 1.5}$ On dit qu'un ensemble ordonné $(E, \leq)$ possède la propriété de la borne sup si toute partie non vide et majorée de E admet une borne sup.

On vient de montrer que $\mathbb{Q}$ n'a pas la propriété de la borne sup ce qui "empêche" de résoudre les équations alg. de la forme $x^2 = 2$. D'où le besoin d'un corps + gd.

la def de $\mathbb{R}$ comblera cette lacune.

Rq/exo que serait la "propriété de la borne inf" ?

Rq un ens ordonné a l'une ssi il a l'autre.

On va faire la démo en cours car elle permet de manipuler ce formalisme

Preuve : Soit $\mathcal{M} \subset E$ l'ensemble des minorants de A. Par hypothèse, $\mathcal{M} \neq \emptyset$.
$\mathcal{M}$ est majoré puisque tout élément de A (supposé non vide !) est un majorant de $\mathcal{M}$; donc $\mathcal{M}$ admet une borne sup, notons-la m.
Vérifions que c'est le + gd élément de $\mathcal{M}$, donc l'$\inf(A)$

- si $y \in A$, y est un maj de $\mathcal{M}$, donc $m \leq y$ (par déf de la borne sup de $\mathcal{M}$)
  Ainsi m est un minorant de A ($\forall y \in A$, $m \leq y$) donc $m \in \mathcal{M}$
- par déf de la borne sup de $\mathcal{M}$ tjs, $\forall y \in \mathcal{M}$, $y \leq m$. CQFD

On a toutes les notions (corps, ordre, borne sup). On a oublié un petit ingr. On veut une forme de compatibilité entre la structure de corps et celle d'ordre

Déf 1.6 On appelle corps (totalement) ordonné un corps K muni d'un ordre total $\leq$ vérifiant
(i) $\forall x, y, z \in K$, $y \leq z \Rightarrow x + y \leq z + y$
(ii) $\forall x, y \in K$, $(x \geqslant 0 \text{ et } y \geqslant 0) \Rightarrow xy \geqslant 0$.

Ex : $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ en est un.

On énonce maintenant (sans démonstration...) le résultat fondamental de ce chapitre :

Thm 1.1 Il existe un unique (à isomorphisme près) corps ordonné possédant la propriété de la borne supérieure. On le note $\mathbb{R}$ $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$. Il "contient $\mathbb{Q}$" au sens où il existe un (unique) morphisme injectif de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Question/exo morphisme de quoi ? Que veut dire "unique à isomorphisme près" ?

Ce thm fondamental est surprenamment tardif :

(i) - méthode des coupures de Dedekind (1872)
(ii) - classe d'équivalence des suites de Cauchy (Meray 1869, Cantor 1872) "complétion de $\mathbb{Q}$"
(iii) - par les segments emboîtés
(iv) - par les dev^t décimaux.

idée : (ii) il "manque" des nb de $\mathbb{Q}$: les limites de certaines suites qui devraient converger. On rajoute ces "limites" qui n'existe pas et on étend la structure de corps ordonné à ces nv "nombres".
abstrait mais efficace. Fait exactement ce qu'on veut.

(iv) moins abstrait mais les propriétés voulues sont + difficiles à démontrer (c'est souvent comme ça en maths, et c'est ce qui en fait la beauté : le compromis)

on a envie de dire que les nb réels c'est des choses de la forme

1234,5678... avec éventuellement une infinité de chiffres après la virgule. Sauf que définir une addition et une multiplicat° là-dessus c'est moins évident qu'il n'y paraît...

Nous ici : on admet que ça existe et on va déduire de la def (gges axiomes donc) toutes les propriétés "intuitives" de $\mathbb{R}$ que vous avez tjs utilisées jusque là.

C'est ça aussi la beauté des maths. Distinguer ce qui définit un objet des prop. qui découlent de cette def, réduire à l'essentiel une def, sans redondance.

Proposition 1 Si $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tq $n\varepsilon > x$

("bcp de très petits finissent par faire qqc de très gros")

On dit que $\mathbb{R}$ est archimédien (c'est aussi vrai pour $\mathbb{Q}$)

Démonstration (A l'aide des seules prop qu'on connaît de $\mathbb{R}$!)

Si $x \leq 0$, n'importe quel n convient.

Supposons donc $x > 0$ et notons $A = \{n\varepsilon,\ n \in \mathbb{N}^*\}$.

borne sup (Si la conclusion est fausse, x est un majorant de A, donc A (qui est non vide) admet une borne sup $m > 0$.

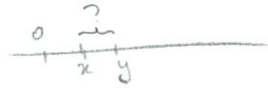
corps ordonné (Comme $m - \varepsilon < m$, $m - \varepsilon$ n'est pas un majorant de A dc $\exists\, n \in \mathbb{N}^*$ tq $m - \varepsilon < n\varepsilon$, soit $m < (n+1)\varepsilon$, mais $(n+1)\varepsilon \in A$! contradiction □

Proposition 2 Si $x, y \in \mathbb{R}$ tq $x < y$, $\exists\, r \in \mathbb{Q}$ tq $x < r < y$.

("$\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$")

Preuve On va le déduire de la propriété d'Archimède (qu'on a déduite elle-m de...)

quitte à translater x et y par un m entier, on peut supposer $x > 0$

Idée 

si on dilate assez cet intervalle il devient de largeur >1 (archimède) et dans un int de largeur >1, on va pouvoir trouver un entier. En contractant, on aura alors le rationnel voulu (corps ordonné)

- On choisit $q \in \mathbb{N}^*$ pour que $q\underbrace{(y-x)}_{>0} > 1$ (archimède)
- on note $m = \min\{m \in \mathbb{N}^*,\ qx < m\}$ (ss ensemble non vide de $\mathbb{N}^*$ dc admet un min)

On a alors $qx < m$ et $m-1 \leq qx$ soit $m \leq qx+1 < qx + q(y-x) = qy$
soit $qx < m < qy$ et donc $x < \underbrace{\frac{m}{q}}_{\in \mathbb{Q}} < y$ cqfd □

Proposition 3 (existence de la racine carrée) Si $x \in \mathbb{R}$ et $x > 0$, $\exists ! y \in \mathbb{R}, y > 0$ tq $y^2 = x$.

Rq pas vrai ds $\mathbb{Q}$, donc il va falloir utiliser la seule prop de $\mathbb{R}$ que $\mathbb{Q}$ n'a pas : la prop de la borne sup

Preuve • unicité si $y_1^2 = y_2^2 = x$, $y_1^2 - y_2^2 = 0 = (y_1 - y_2)\underbrace{(y_1+y_2)}_{\substack{>0 \\ dc \neq 0}}$ donc $y_1 - y_2 = 0$ ie $y_1 = y_2$ □

• existence (penser à $\sqrt{2}$) Soit $A = \{ z \in \mathbb{R} \mid z > 0$ et $z^2 < x \}$

A est non vide (prendre par exemple $z = \frac{x}{1+x}$)

A est majoré (par $1+x$ par exemple)

Notons $y = \sup(A)$ (>0)

Affirmation $y^2 = x$.

exercice → La preuve est essentiellement la même que dans le cas $x = 2$

Supposons que $y^2 > x$ et cherchons $\varepsilon > 0$ tq $(y-\varepsilon)^2 > x$ de sorte que y n'est pas le + petit majorant. On veut $y^2 - 2\varepsilon y + \varepsilon^2 > x$ soit $2\varepsilon y - \varepsilon^2 < \underbrace{y^2 - x}_{>0}$; pour cela il suffit que $2\varepsilon y < y^2 - x$ ou encore

$\frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{1}{2y} > \frac{1}{y^2 - x}$ Caractère archimédien → prendre $\varepsilon = \frac{1}{n}$ avec n assez gd.

Supposons que $y^2 < x$ preuve similaire. □

Rq De la même façon on peut définir $x^{1/n}$ $\forall x \in \mathbb{R}, x > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Rq Il peut être commode de définir $\sup(A)$ également pour A vide et A non majoré. On posera respectivement $\sup(\emptyset) = -\infty$
$\sup(\text{non maj.}) = +\infty$

et même convention pour inf.

On note $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\} =$ " $[-\infty, +\infty]$ "

⚠ ce n'est pas un corps

∞ pourquoi ?

mais on peut définir quelques conventions d'écriture commodes pour la suite

I.10

- $\forall x \in \mathbb{R}$, $x + (+\infty) = +\infty$, $x + (-\infty) = -\infty$, $\frac{x}{+\infty} = \frac{x}{-\infty} = 0$
- $\forall x > 0$, $x \times (+\infty) = +\infty$, $x \times (-\infty) = -\infty$
- $\forall x < 0$, $x \times (+\infty) = -\infty$, $x \times (-\infty) = +\infty$.