L3 Mathématiques
Parcours A 2018–2019

Contrôle Continu n°2

Durée : 3h
Documents, téléphones et appareils électroniques interdits

Exercice 1 : Suites de fonctions à paramètre
Soit $\alpha > 0$. On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ par, pour $x > 0$,

$$f_n(x) = n^\alpha x \exp(-nx).$$

1. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction f que l'on déterminera.
2. Pour quelles valeurs de α la convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}^+$?
3. Pour quelles valeurs de α la convergence est-elle uniforme sur $]\varepsilon, +\infty[$ avec $\varepsilon > 0$?

Exercice 2 : Suites de fonctions monotones
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que la suite converge simplement vers f.

1. Montrer que si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n - f$ est monotone, alors la convergence est uniforme.
2. Est-ce que la condition
$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ f_n \text{ est monotone} \tag{1}$$
est suffisante pour garantir la convergence uniforme ?

Exercice 3 : Espaces discrets
Soit X un ensemble non vide et $\delta > 0$. Soit $d : X \times X \to \mathbb{R}$ une distance telle que

$$\forall (x,x') \in X^2, \qquad x \neq x' \Rightarrow d(x,x') > \delta. \tag{D}$$

1. Donner un exemple d'une telle distance en justifiant proprement que l'application choisie est bien une distance et qu'elle vérifie la propriété (D).
2. Pour tout $x \in X$ décrire la boule $B(x,r)$ avec $r < \delta$.
3. Quelles sont les parties ouvertes de X ? Justifier.
4. Quelles sont les parties fermées de X ? Justifier.
5. Quels sont les suites convergentes de $X^{\mathbb{N}}$? Justifier.

T.S.V.P.

Exercice 4 : Quelques sous-espaces de l'espace des fonctions bornées
Soit $I = [a, b]$ un intervalle borné de $\mathbb{R}$ et soit $\mathscr{F} = \mathscr{F}(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{R}$.
On considère le sous-espace $\mathscr{B} = \mathscr{B}(I,\mathbb{R}) \subset \mathscr{F}$ des fonctions bornées de I dans $\mathbb{R}$ et l'application $\|\cdot\|_\infty : \mathscr{B} \to \mathbb{R}$ définie par, pour tout $f \in \mathscr{B}$,

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in I} |f(x)|.$$

1. Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ définit une norme sur $\mathscr{B}$.
2. Quelles sont les suites convergentes pour cette norme ? Justifier.
3. Redémontrer proprement qu'une limite uniforme de fonctions bornées est bornée.

I. Les fonctions croissantes
Soit $\mathscr{A} \subset \mathscr{F}$ le sous-espace des fonctions croissantes.

4. Montrer que $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}$.
5. Montrer que $\mathscr{A}$ est une partie fermée de $\mathscr{B}$.

II. Les fonctions continues
Soit $\mathscr{C} = \mathscr{C}(I,\mathbb{R}) \subset \mathscr{F}$ le sous-espace des fonctions continues sur $[a,b]$.

6. Montrer que $\mathscr{C} \subset \mathscr{B}$. On redémontrera proprement le résultat de cours correspondant.
7. Montrer que $\mathscr{C}$ est une partie fermée de $\mathscr{B}$. On redémontrera proprement le résultat de cours correspondant.

III. Les fonctions dérivables
Soit $\mathscr{D} = \mathscr{D}(I,\mathbb{R}) \subset \mathscr{F}$ le sous-espace des fonctions dérivables.

8. Montrer proprement qu'une fonction dérivable est continue et en déduire que $\mathscr{D} \subset \mathscr{C}$.
9. Est-ce que $\mathscr{D}$ est une partie fermée de $\mathscr{B}$? Justifier.
10. Est-ce que $\mathscr{D}$ est une partie ouverte de $\mathscr{B}$? Justifier.

IV. Les fonctions réglées
On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ est une *fonction en escalier* s'il existe $n > 0$ et une suite $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ tels que f est constante sur $]x_i, x_{i+1}[$ pour tout $i \in \{0,1,\ldots,n-1\}$.
On note $\mathscr{E} \subset \mathscr{F}$ le sous-espace des fonctions en escaliers.
On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ est *réglée* si f est la limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier. On note $\mathscr{R}$ l'ensemble des fonctions réglées de I dans $\mathbb{R}$.

11. Montrer que $\mathscr{R}$ est un sous-espaces vectoriel de $\mathscr{F}$.
12. Montrer que $\mathscr{E} \subset \mathscr{B}$.
13. En déduire que $\mathscr{R} \subset \mathscr{B}$.
14. Montrer que $\mathscr{R}$ est une partie fermée de de $\mathscr{B}$.

Suite page 2

V. Continue $\Rightarrow$ réglée

Soit $f \in \mathscr{C}$ et soit $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $k \in \{0,1,\dots n\}$ on note $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$ et on définit la fonction en escalier $\varphi_n \colon I \to \mathbb{R}$ définie par, pour tout $k \in \{0,1,\dots,n-1\}$ et tout $x \in]x_k, x_{k+1}[$,

$$\varphi_n(x) = f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right)$$

et, pour tout $k \in \{0,1,\dots,n\}$, $\varphi_n(x_k) = f(x_k)$.

15. Rappeler le Théorème de Heine.
16. Montrer que $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f.
17. En déduire que $\mathscr{C} \subset \mathscr{R}$.

Barème indicatif : 3/2/3/12