CC2

La clarté de la rédaction sera prise en compte. Les réponses aux exercices doivent être justifiées.

Question de cours. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction, $a \in \mathbb{R}^2$ et $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$. Donner la définition de la dérivée directionnelle en a selon le vecteur $\vec{u}$, lorsqu'elle existe.

Exercice 0. Soient $m, n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que si une application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est lipschitzienne, alors elle est uniformément continue sur $\mathbb{R}^n$.
2. La réciproque est-elle vraie ? On pourra utiliser une fonction continue $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ qui n'est k-lipschitzienne pour aucun $k \in \mathbb{R}$.

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = \frac{x^4-y^4}{x^2+2y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.

1. (a) Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
   (b) Montrer que f est continue en $(0,0)$.
2. Déterminer les dérivées partielles de f en tout point $(x,y) \neq (0,0)$.
3. Montrer que f admet des dérivées partielles en 0.
4. Les dérivées partielles de f sont-elles continues en $(0,0)$?
5. En déduire que f est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On rappelle que f est dite *coercive* si $f(x) \to +\infty$ quand $\|x\| \to +\infty$.

1. Dans cette question, on suppose f coercive.
   (a) Montrer qu'un ensemble de niveau $N_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^2, f(x) = \lambda\}$ est un compact de $\mathbb{R}^2$.
   (b) Montrer qu'un ensemble de sous-niveau $S_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^2, f(x) \leqslant \lambda\}$ est un compact de $\mathbb{R}^2$.
   (c) En déduire que f est minorée et atteint son minimum.
2. On considère maintenant la fonction $g : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto xy \in \mathbb{R}$.
   (a) Décrire les ensembles de niveau de g.
   (b) Ces ensembles sont-ils fermés ? compacts ?
   (c) La fonction g est-elle coercice ?

Exercice 3. Déterminer l'ensemble de définition des dérivées partielles de $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto |x| + |y|$. Exprimer la différentielle de f aux points où elle est définie.