CC1 Partie Analyse – Correction

Janvier 2019

Problème 2 : fonction exponentielle, évolution d'une population

Partie A : la fonction exponentielle

1.1. La fonction f est supposée dérivable sur $\mathbb{R}$ donc par produit et composition, la fonction $g : x \mapsto f(x)f(-x)$ l'est aussi, et sa dérivée vérifie :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) &= f'(x)f(-x) + f(x)(-f'(-x)) \\ &= f'(x)f(-x) - f(x)f'(-x) \\ &= f(x)f(-x) - f(x)f(-x) \quad \text{car } f \text{ est solution de } y' = y \\ &= 0\end{aligned}$$

La fonction g est donc constante sur $\mathbb{R}$ (intervalle). Or $g(0) = f(0)^2 = 1$ (car f est solution de $(E) : y' = y$ *avec la condition* $y(0) = 1$). On a donc bien :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = f(x) \times f(-x) = 1.$$

1.2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, d'après la question précédente, $f(x)f(-x) = 1 \neq 0$, donc en particulier $f(x)$ ne peut être nul. Autrement dit, f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

1.3. Soit g une fonction dérivable solution de (E) sur $\mathbb{R}$ telle que $g(0) = 1$. Comme f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ d'après 1.2, la fonction $\varphi : x \mapsto \frac{g(x)}{f(x)}$ est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables, et sa dérivée satisfait :

$$\varphi' = \frac{g'f - f'g}{g^2} = \frac{gf - fg}{g^2} \equiv 0.$$

La fonction φ est donc constante sur $\mathbb{R}$, égale à $\varphi(0) = \frac{g(0)}{f(0)} = 1$. Autrement dit, $f = g$.

1.4. Soit $a \in \mathbb{R}$. D'après la question 1.2, $f(a) \neq 0$ donc la fonction $\psi : x \mapsto \frac{f(a+x)}{f(a)}$ est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\psi'(x) = \frac{f'(a+x)}{f(a)} = \frac{f(a+x)}{f(a)} = \psi(x).$$

Autrement dit, ψ est solution de (E). Comme en outre $\psi(0) = \frac{f(a)}{f(a)} = 1$, d'après la question précédente, on a $\psi = f$, i.e :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{f(a+x)}{f(a)} \quad \text{ou encore} \quad f(a+x) = f(a)f(x).$$

Ceci étant vrai pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a bien finalement :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad f(a+b) = f(a)f(b).$$

1.5. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, d'après la question précédente,

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 \geq 0.$$

Comme en outre f ne s'annule pas d'après 1.2, f est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

2.1. La valeur $(1+\frac{x}{n})^n$ est bien définie pour tout entier $n > 0$, donc a fortiori pour tout $n > |x| \geq 0$. De plus, pour tout $n > |x|$,

$$\frac{|x|}{n} < 1 \quad \text{donc} \quad -1 < -\frac{x}{n} < 1 \quad \text{et par suite} \quad 0 < 1 - \frac{x}{n} < 2.$$

En particulier, $u_n(-x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$ est non nul, donc $v_n(x) = \frac{1}{u_n(-x)}$ est bien défini.

2.2. Soit $a \in]-1, +\infty[$. Démontrons par récurrence que la proposition

$$P(n) : (1+a)^n \geq 1 + na$$

est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Initialisation : $P(1) : 1 + a \geq 1 + a$ est trivialement vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $P(n)$ vraie. Alors

$$\begin{aligned}(1+a)^{n+1} = \underbrace{(1+a)}_{>0}(1+a)^n &\geq (1+a)(1+na) \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= 1 + a + na + na^2 = 1 + (n+1)a + na^2 \geq 1 + (n+1)a.\end{aligned}$$

La proposition $P(n+1)$ est donc vraie.

On a donc montré par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, (1+a)^n \geq 1 + na,$$

et ce pour tout $a \in]-1, +\infty[$.

2.3.i. Soit n un entier tel que $n > |x|$. Alors $u_n(x)$ et $u_{n+1}(x)$ sont bien définis et non nuls, et on a :

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) \times \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = u_n(x) \times \frac{\left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n} = u_n(x) \times \left(1 + \frac{x}{n}\right) \times \frac{\left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+1}},$$

ce qu'on voulait montrer.

2.3.ii.

$$\left(\frac{1+\frac{x}{n+1}}{1+\frac{x}{n}}\right)^{n+1} = \left(1 + \left(\frac{1+\frac{x}{n+1}}{1+\frac{x}{n}} - 1\right)\right)^{n+1}.$$

Posons $a = \frac{1+\frac{x}{n+1}}{1+\frac{x}{n}} - 1$. On a déjà vu que $1 + \frac{x}{n+1}$ et $1 + \frac{x}{n}$ étaient strictement positifs donc $a > -1$. On peut donc appliquer l'inégalité de Bernoulli, qui nous donne :

$$(1+a)^{n+1} \geq 1 + (n+1)a$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}\left(\frac{1+\frac{x}{n+1}}{1+\frac{x}{n}}\right)^{n+1} &\geq 1 + (n+1)\left(\frac{1+\frac{x}{n+1}}{1+\frac{x}{n}} - 1\right) \\ &= 1 + (n+1) \times \frac{\frac{x}{n+1} - \frac{x}{n}}{1+\frac{x}{n}} \\ &= 1 + x\frac{\frac{n+1}{n+1} - \frac{n+1}{n}}{1+\frac{x}{n}} \\ &= 1 - \frac{\frac{x}{n}}{1+\frac{x}{n}} = \frac{1}{1+\frac{x}{n}}.\end{aligned}$$

On a donc bien
$$\left(\frac{1+\frac{x}{n+1}}{1+\frac{x}{n}}\right)^{n+1} \geq \frac{1}{1+\frac{x}{n}}.$$
2.3.iii. Pour tout $n > |x|$, $u_n(x) \neq 0$ donc 2.3.i donne
$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} &= \underbrace{\left(1+\frac{x}{n}\right)}_{\geq 0} \times \left(\frac{1+\frac{x}{n+1}}{1+\frac{x}{n}}\right)^{n+1} \\ &\geq \left(1+\frac{x}{n}\right) \times \frac{1}{1+\frac{x}{n}} \quad \text{d'après 2.3.ii} \\ &\geq 1.\end{aligned}$$
La suite $(u_n(x))_{n>|x|}$ étant à termes positifs, ceci montre qu'elle est croissante.
2.4. D'après ce qui précède, la suite $(u_n(-x))_{n>|x|}$ est à termes strictement positifs et croissante, donc la suite $(v_n(x))_{n>|x|} = \left(\frac{1}{u_n(-x)}\right)_{n>|x|}$ est décroissante.
2.5.i.
$$\begin{aligned}v_n(x) - u_n(x) = v_n(x)\left(1 - \frac{u_n(x)}{v_n(x)}\right) &= v_n(x)(1 - u_n(x)u_n(-x)) \\ &= v_n(x)\left(1 - \left(1+\frac{x}{n}\right)^n\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\right) \\ &= v_n(x)\left(1 - \left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n\right).\end{aligned}$$
2.5.ii. Par hypothèse sur n, $0 \leq \frac{x^2}{n^2} < 1$ donc $0 < 1 - \frac{x^2}{n^2} \leq 1$ et par conséquent $0 < \left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n \leq 1$, ce qui entraîne : $0 \leq 1 - \left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n < 1$. Comme $v_n(x)$ est positif, la formule obtenue à la question précédente montre donc que $v_n(x) - u_n(x) \geq 0$.
2.5.iii. D'après 2.5.i., il suffit de montrer que $1 - \left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n \leq \frac{x^2}{n}$, ce qui équivaut à :
$$1 - \frac{x^2}{n} \leq \left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n,$$
ce qui est immédiat d'après l'inégalité de Bernoulli appliquée à $a = -\frac{x^2}{n^2} \in]-1, 0]$.
2.6. La suite $(v_n(x))_{n>|x|}$ est décroissante et positive donc convergente. La suite $(\frac{x^2}{n})_{n>|x|}$ tend vers 0. Le produit $(v_n(x)\frac{x^2}{n})_{n>|x|}$ tend donc vers 0. Or d'après 2.5.ii. et 2.5.iii., pour tout $n > |x|$,
$$0 \leq v_n(x) - u_n(x) \leq v_n(x)\frac{x^2}{n}.$$
D'après le théorème des gendarmes, la suite $(v_n(x) - u_n(x))_{n>|x|}$ converge elle aussi vers 0. Les suites $(u_n(x))_{n>|x|}$ et $(v_n(x))_{n>|x|}$ étant respectivement croissante (cf. 2.3.iii.) et décroissante (cf. 2.4), ceci achève de montrer qu'elles sont adjacentes, et donc convergentes vers la même limite, que l'on note $f(x)$ (cf. question suivante).
2.7.i. Par définition,
$$f(0) = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{0}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} 1 = 1.$$

2.7.ii. L'inégalité de gauche de l'encadrement est précisément l'inégalité admise appliquée à $a = x_0$ et $k = h$. Soit maintenant $h \in]-1,1[$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} f(x_0+h) - f(x_0) \leq \frac{h}{1-h} f(x_0) &\Leftrightarrow f(x_0+h) \leq \left(\frac{h}{1-h}+1\right) f(x_0) = \frac{1}{1-h} f(x_0) \\ &\Leftrightarrow (1-h)f(x_0+h) \leq f(x_0) \quad \text{car } 1-h>0 \\ &\Leftrightarrow f(x_0+h) - f(x_0) \leq hf(x_0+h) \\ &\Leftrightarrow f(x_0) - f(x_0+h) \geq -hf(x_0+h) \\ &\Leftrightarrow f((x_0+h)+(-h)) - f(x_0+h) \geq (-h)f(x_0+h) \end{aligned}$$

Cette dernière inégalité découle de l'inégalité admise appliquée à $a = (x_0+h)$ et $k = -h$. On a donc bien :

$$\forall h \in]-1,1[,\ hf(x_0) \leq f(x_0+h) - f(x_0) \leq \frac{h}{1-h} f(x_0).$$

2.7.iii. D'après 2.7.ii, pour tout $h \in]0,1[$,

$$f(x_0) \leq \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \leq \frac{1}{1-h} f(x_0)$$

et pour tout $h \in]-1,0[$,

$$\frac{1}{1-h} f(x_0) \leq \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \leq f(x_0)$$

Les membres de gauche et de droite ayant pour limite commune $f(x_0)$ quand h tend vers 0, d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \quad \text{existe et vaut } f(x_0).$$

Autrement dit, f est dérivable en x_0, de dérivée $f(x_0)$: $f'(x_0) = f(x_0)$. Ceci étant vrai pour tout réel x_0, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et solution de l'équation différentielle (E). On a donc finalement montré l'existence et l'unicité de la solution de :

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Partie B : évolution d'une population

1. Le théorème de Cauchy-Lipschitz garantit l'existence et l'unicité de N qui, par définition, est la *solution maximale* du *problème de Cauchy* :

$$\begin{cases} y' = ry(1-\frac{y}{K}) \\ y(0) = N_0, \end{cases}$$

celui-ci étant de la forme

$$\begin{cases} y' = F(y) \\ y(0) = N_0. \end{cases}$$

avec $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 (localement lipschitzienne suffirait).

2.1. N est dérivable sur I et, en tant que solution de (E), satisfait :

$$\forall t \in I, \quad N'(t) = rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right).$$

Or par hypothèse, pour tout $t \in I$, $N(t) > 0$ et $\frac{N(t)}{K} < 1$ donc $N'(t) > 0$. La fonction N est donc strictement croissante sur I.

2.2. N est croissante et majorée (par K) donc admet une limite finie $\ell \leq K$ en $+\infty$.

2.3. Supposons que $\ell < K$. Comme N tend vers ℓ en $+\infty$, $1 - \frac{N}{K}$ tend vers $1 - \frac{\ell}{K} > 0$. En particulier, il existe $T > 0$ tel que, pour tout $t \geq T$, $N(t) \geq \frac{\ell}{2}$ et $1 - \frac{N(t)}{K} \geq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\ell}{K}\right)$. Notons α ce nombre strictement positif. On a alors

$$\forall t \geq T, \quad N'(t) = rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) \geq \frac{r\ell\alpha}{2}$$

puis par croissance de l'intégrale :

$$\forall t \geq T,\ N(t) - N(T) = \int_T^t N'(s)ds \geq \frac{r\ell\alpha}{2}(t - T) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

ce qui entraîne $\lim_{t\to+\infty} N(t) = +\infty$. Ceci contredit l'hypothèse : $\forall t \in I, N(t) < K$. Ainsi, "$l < K$" est impossible, donc comme $\ell \leq K$, on a forcément $\ell = K$.

3.1. N est strictement positive et dérivable sur I, donc g est bien définie et elle aussi strictement positive et dérivable sur I, et sa dérivée satisfait :

$$g' = -\frac{N'}{N^2} = -\frac{rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)}{N^2} = -\frac{r}{N} + \frac{r}{K} = -rg + \frac{r}{K}.$$

Autrement dit, g est solution sur I de l'équation différentielle $(E') : y' = -ry + \frac{r}{K}$.

3.2. Nous avons affaire à une équation différentielle linéaire d'ordre un à coefficients constants avec second membre. Ses solutions maximales sont définies sur $\mathbb{R}$ et de la forme : *solution générale de l'équation homogène (i.e. sans second membre) associée + solution particulière de l'équation avec second membre.* L'équation homogène associée $(E'') : y' = -ry$ a pour solutions les fonctions de la forme $t \in \mathbb{R} \mapsto Ce^{-rt}$, avec $C \in \mathbb{R}$. D'autre part, la fonction constante égale à $\frac{1}{K}$ est clairement solution de (E'). (E') a donc pour solutions l'ensemble des fonctions de la forme

$$t \in \mathbb{R} \mapsto Ce^{-rt} + \tfrac{1}{K}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

En particulier, g est de cette forme : il existe $C_0 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall t \in I, \quad g(t) = C_0 e^{-rt} + \tfrac{1}{K}.$$

Comme en outre $g(0) = \frac{1}{N(0)} = \frac{1}{N_0}$, on a : $C_0 + \frac{1}{K} = \frac{1}{N_0}$, soit $C_0 = \frac{1}{N_0} - \frac{1}{K}$, et donc

$$\forall t \in I, \quad g(t) = \left(\tfrac{1}{N_0} - \tfrac{1}{K}\right)e^{-rt} + \tfrac{1}{K} = \tfrac{1}{K}\left(1 + \left(\tfrac{K}{N_0} - 1\right)e^{-rt}\right)$$

et finalement

$$\forall t \in I, \quad N(t) = \frac{1}{g(t)} = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{N_0} - 1\right)e^{-rt}}.$$

3.3. $\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{K}{N_0} - 1\right)e^{-rt} = 0$ donc on retrouve

$$\lim_{t\to+\infty} N(t) = K.$$