

Interrogation 1

La clarté de la rédaction sera prise en compte. Les réponses aux exercices doivent être justifiées.

Questions de cours. Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Donner la définition de :
 - (a) une norme sur \mathbb{R}^n ;
 - (b) la boule unité ouverte de \mathbb{R}^n pour une norme N donnée ;
 - (c) un ouvert de \mathbb{R}^n muni d'une norme N ;
 - (d) un fermé de \mathbb{R}^n muni d'une norme N .

On donnera pour chacun un exemple dans le cas $n = 2$.

2. Soit N une norme sur \mathbb{R}^n et $r > 0$. Montrer que la boule ouverte $B_N(0, r)$ est un ouvert de \mathbb{R}^n .

Exercice 1 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = |y - \sin(x)|$. Représenter $f^{-1}(] - \infty, 1[)$. Cet ensemble est-il fermé ? Borné ?

Exercice 2 : Déterminer la plus petite constante $C > 0$ telle que $\|\cdot\|_\infty \leq C\|\cdot\|_1$ dans \mathbb{R}^2 .