1
2
3
4
5

MAT303

Premier Semestre — 2018-2019

Premier Contrôle Continu

1. (a) Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel muni d'une norme $\| \ \|$. Donner la définition d'adhérence et d'intérieur d'un ensemble $S \subseteq \mathbb{E}$.

(b) Soit $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$. Calculer l'adhérence et l'intérieur de $\mathbb{Z}$, où $\mathbb{R}$ est muni de la norme donnée par la valeur absolue.

2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application $f(x,y) = x^2 + y^2 + 1$. On considère l'ensemble $F =]-1,1] \cup [5,10[\subseteq \mathbb{R}$.

(a) Calculer l'ensemble $E = f^{-1}(F)$ et le représenter graphiquement.

(b) Donner la définition d'un ensemble fermé de $\mathbb{R}^2$ pour une norme N donnée. Puis d'un ouvert et d'un borné.

(c) L'ensemble E est-il fermé ? Ouvert ? Borné ?

3. On rappelle que, étant donné une norme $N : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ et une application linéaire bijective $\phi : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$, on définit la norme $N_\phi : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ via $N \circ \phi$. On dit que deux normes N et N' sur $\mathbb{E}$ sont *linéairement liées* s'il existe une application linéaire bijective $\phi : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ telle que $N' = N_\phi$.

(a) Soit $N = \| \ \|_\infty : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la norme infini et soit $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire donnée par la matrice

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

On suppose que ϕ est bijective, *i.e.* $ad - bc \neq 0$. A quel type de figure géométrique appartient la boule unité fermée $\bar{B}$ de la norme N_ϕ ? La décrire précisément en termes de a, b, c et d.

(b) Donner un exemple de deux normes N et N' sur $\mathbb{R}^2$ qui ne soient pas linéairement liées.

4. On considère un espace vectoriel $\mathbb{E}$. Soit $\langle \, , \rangle : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ un produit scalaire sur $\mathbb{E}$ et soit $N(v) = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ la norme associée. Montrer que

$$N(v+w)^2 + N(v-w)^2 = 2N(v)^2 + 2N(w)^2, \qquad \text{(PAR)}$$

pour tous $v, w \in \mathbb{E}$. Interpréter (PAR) de façon géométrique.

5. Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux espaces vectoriels, munis des normes $N_\mathbb{E} : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ et $N_\mathbb{F} : \mathbb{F} \to \mathbb{R}$, respectivement.

Suite à la page suivante →

(*a*) On définit $N(v,w) = \max(N_{\mathbb{E}}(v), N_{\mathbb{F}}(w))$, pour tous $v \in \mathbb{E}$ et $w \in \mathbb{F}$. Démontrer que N est une norme sur $\mathbb{E} \times \mathbb{F}$.

(*b*) Soient $S \subseteq \mathbb{E}$ et $T \subseteq \mathbb{F}$. Montrer que

$$\partial(S \times T) = (\partial S \times \bar{T}) \cup (\bar{S} \times \partial T).$$