Corrigé CC

Exercice 6 la fonction $x \mapsto (\ln(x))^2$ est croissante sur $[1,+\infty[$ donc
(ln y est ↗ et ≥ 0)

$\forall k \geqslant 2$:

$$\forall t \in [k-1, k] \quad (\ln(t))^2 \leqslant (\ln(k))^2 \leqslant (\ln(t+1))^2$$

donc par croissance de l'intégrale,

$$\int_{k-1}^{k} (\ln(t))^2 dt \leqslant \underbrace{\int_{k-1}^{k} (\ln(k))^2 dt}_{(\ln(k))^2} \leqslant \int_{k-1}^{k} (\ln(t+1))^2 dt$$

Par sommation pour $k = 2$ à n + Chasles

chgt de var $u = t+1$ (translation)

$$v_n := \int_1^n (\ln(t))^2 dt \leqslant \underbrace{\sum_{k=2}^{n} (\ln(k))^2}_{\substack{= u_n \\ (\ln(1)=0)}} \leqslant \int_1^n (\ln(t+1))^2 dt = \int_2^{n+1} (\ln(u))^2 du =: w_n$$

d'après la primitive donnée par l'énoncé

$$v_n = \left[x(2 - 2\ln x + (\ln x)^2)\right]_1^n = n(2 - 2\ln n + \ln(n)^2) - 2 = 2n - 2n\ln n + n\ln(n)^2 - 2$$

comme $\ln(n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$

$2n - 2n\ln n - 2 = o(n\ln(n)^2)$

donc $v_n \underset{+\infty}{\sim} n(\ln n)^2$

$$w_n = \left[x(2 - 2\ln x + (\ln x)^2)\right]_2^{n+1} = (n+1)\left(2 - 2\ln(n+1) + (\ln(n+1))^2\right) - 2(2 - 2\ln 2 + (\ln(2))^2)$$

$w_n \sim (n+1)(\ln(n+1))^2$ pour la im raison que ci contre

or $\frac{n+1}{n} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 1$ donc $n+1 \sim n$

et $\ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

donc $= o(\ln(n))$

donc $(\ln(n+1)) \underset{+\infty}{\sim} \ln n$

et a fortiori $(\ln(n+1))^2 \sim (\ln n)^2$

donc finalement $w_n \sim n(\ln(n))^2$ également

donc par encadrement

$\left(0 \leqslant u_n - v_n \leqslant w_n - v_n = o(v_n) \text{ donc}\right)$ $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \underset{+\infty}{\sim} \boxed{n(\ln n)^2}$