2017-2018 M1EEF – UGA

Feuille 4 : Topologie dans $\mathbb{R}^n$

Exercice 1. Cours.

1. Montrer *sans utiliser de théorème* que les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ sont équivalentes. Dessiner les boules unités des trois espaces vectoriels normés correspondants.
2. On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne $\|\cdot\|_2$. Soit U un ensemble ouvert pour cette norme. Justifier qu'il est également ouvert pour la norme $\|\cdot\|_1$. Même question avec un fermé, puis un compact.

Exercice 2. Convergence de suites dans $\mathbb{R}^2$. Représenter les suites suivantes dans $\mathbb{R}^2$. Lesquelles sont convergentes ?

$$\left(\tfrac{1}{n}, 1\right) \qquad \left(e^{-n}, e^{-n}\right) \qquad \left(1/n^2, 1/n\right) \qquad \left(e^{n}, e^{-n}\right)$$

$$(2n, -5n) \qquad (n\cos(n\pi/4), n\sin(n\pi/4)) \qquad \left(1 + \tfrac{(-1)^n}{n}, \sin(n\tfrac{\pi}{2})\right).$$

Exercice 3. Exemples. Parmi les ensembles suivants, lesquels sont ouverts, fermés, compacts ?

1. Le singleton $\{v\}$, où v est un élément de $\mathbb{R}^2$. Et dans $\mathbb{R}^n$?
2. L'ensemble $\{v_1, \cdots v_k\}$, où les v_j sont des éléments de $\mathbb{R}^2$. Et dans $\mathbb{R}^n$?
3. La boule unité ouverte (resp. fermée) de $\mathbb{R}^2$ pour une norme donnée.
4. L'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y \geqslant x^2\}$.
5. L'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 < y < x^2\}$.
6. L'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, -2 < y \leqslant x^2\}$.
7. L'ensemble de points $\{1/2^n, n \in \mathbb{N}\}$ dans $\mathbb{R}$.
8. L'ensemble de points $\{2^n, n \in \mathbb{N}\}$ dans $\mathbb{R}$.
9. Les rationnels $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

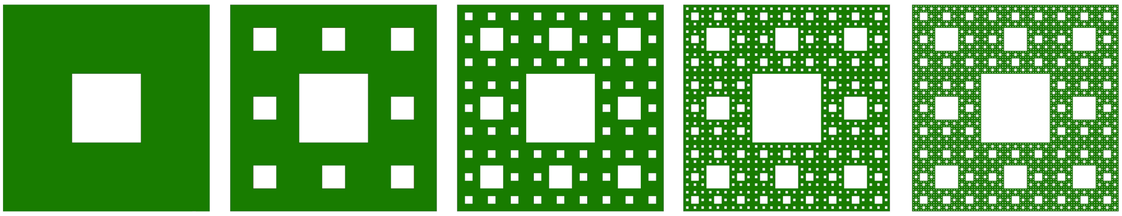
Exercice 4. Vrai/faux. Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses

1. Si $(u_n) \subset \mathbb{R}^2$ est une suite non bornée, alors $\|u_n\| \to +\infty$ pour toute norme de $\mathbb{R}^2$.
2. Soit $(x_n, y_n) \subset \mathbb{R}^2$ telle que $\|(x_n, y_n)\| \to +\infty$ alors $|x_n| \to +\infty$ ou $|y_n| \to +\infty$.
3. Si un ensemble n'est pas ouvert, alors il est fermé.
4. Un ensemble peut être ouvert et fermé en même temps.
5. Le complémentaire d'un ouvert est un fermé.
6. L'intersection quelconque d'ouverts est un ouvert.
7. L'intersection quelconque de fermés est un fermé.
8. Une union finie de compacts est un compact.
9. Un ouvert de $\mathbb{R}$ contient forcément un intervalle fermé $[a, b]$ avec $b > a$.
10. Si F et F' sont deux fermés de $\mathbb{R}^2$, la somme

$$F + F' = \{v \in \mathbb{R}^2 \ , \quad v = f + f' \text{ avec } f \in F \ , \quad f' \in F'\}$$

est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5. Le tapis de Sierpinski. On considère le carré fermé $[0,1]^2$ dans $\mathbb{R}^2$. On lui retire le carré ouvert $]1/3, 2/3[^2$, puis pour chaque carrés restant, on lui retire le carré ouvert central et on continue à itérer l'opération à l'infini. On obtient un tapis de Sierpinsky qui est un ensemble fractal. Cet ensemble est-il ouvert ? Fermé ? Compact ?



Exercice 6. Un sous-ensemble complexe. On considère l'ensemble

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ , \ |x+y| \leq 2 \ , \ |x-y| > 1 \text{ et } ||y|-3| \leq 1\} \ .$$

Représenter cet ensemble et dire s'il est ouvert ou fermé.

Exercice 7. Continuité. Peut-on prolonger par continuité en 0 les fonctions définies de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ dans $\mathbb{R}$ par les formules suivantes.

$$f(x,y) = \frac{xy}{|x|+|y|} \qquad f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \qquad f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$$

$$f(x,y) = \frac{1+x^2+y^2}{y}\sin(y) \qquad f(x,y) = \frac{x^2}{|y|+x^2} \qquad f(x,y) = \frac{\sin x + \sin y}{|x|+|y|} \ .$$

Exercice 8. Vrai/Faux Soit f une application continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$. Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1. L'image d'un fermé de $\mathbb{R}^n$ par f est fermé.
2. L'image réciproque d'un ouvert de $\mathbb{R}^m$ par f est ouverte.
3. L'image réciproque d'une boule ouverte de $\mathbb{R}^m$ est une boule ouverte de $\mathbb{R}^n$.
4. L'image réciproque d'un compact de $\mathbb{R}^m$ est un compact de $\mathbb{R}^n$.
5. L'image d'un compact de $\mathbb{R}^n$ est un compact de $\mathbb{R}^m$.
6. Soit B une partie bornée de $\mathbb{R}^n$ et $f : B \to \mathbb{R}^m$ une fonction continue sur B. Alors $f(B)$ est bornée.

Exercice 9. Existence du minimum d'une fonction coercive. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que f est *coercive*, c'est-à-dire que $f(x) \to +\infty$ quand $\|x\| \to +\infty$.

1. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, l'ensemble de niveau $N_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^2, f(x) = \lambda\}$ est un compact de $\mathbb{R}^2$. Est-ce forcément une "ligne" de niveau ?
2. Montrer que tout *sous-niveau* $S_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^2, f(x) \leqslant \lambda\}$ est un compact de $\mathbb{R}^2$.
3. En déduire que f est minorée et atteint son minimum.