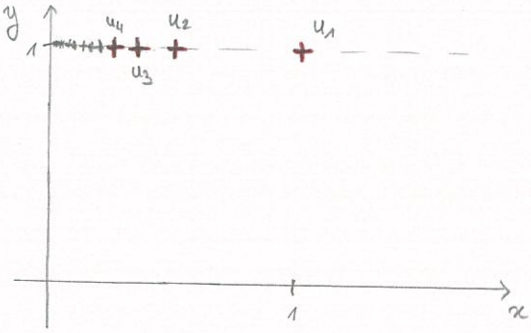
Corrigé — Feuille 4 : Topologie dans $\mathbb{R}^n$

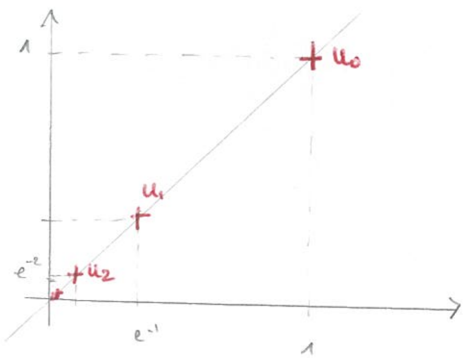
Exercice 1 (a)



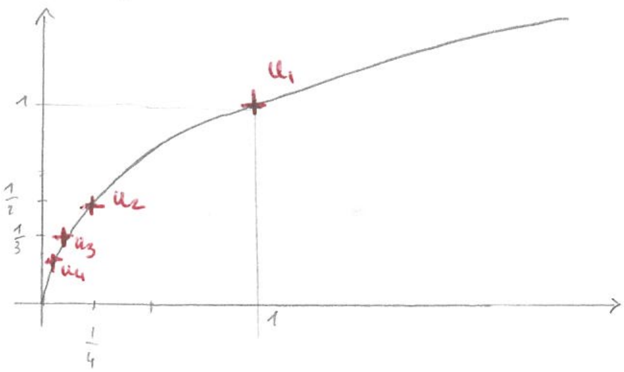
Rappel : Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((x_n,y_n))_n$ de $\mathbb{R}^2$ converge dans $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ (pour n'importe quelle norme $\|\cdot\|$) vers $l = l_1, l_2 \in \mathbb{R}^2$ si et seulement si les suites réelles $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers l_1 et l_2 respectivement (dans $\mathbb{R}$).

Ici, $x_n = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $y_n = 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. Donc $(u_n)_n$ est convergente, de limite $(0,1)$.

(b) Posons $u_n = (x_n, y_n) = (e^{-n}, e^{-n})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
$\forall n \in \mathbb{N}, x_n = y_n$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 0$ donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, de limite $(0,0)$.



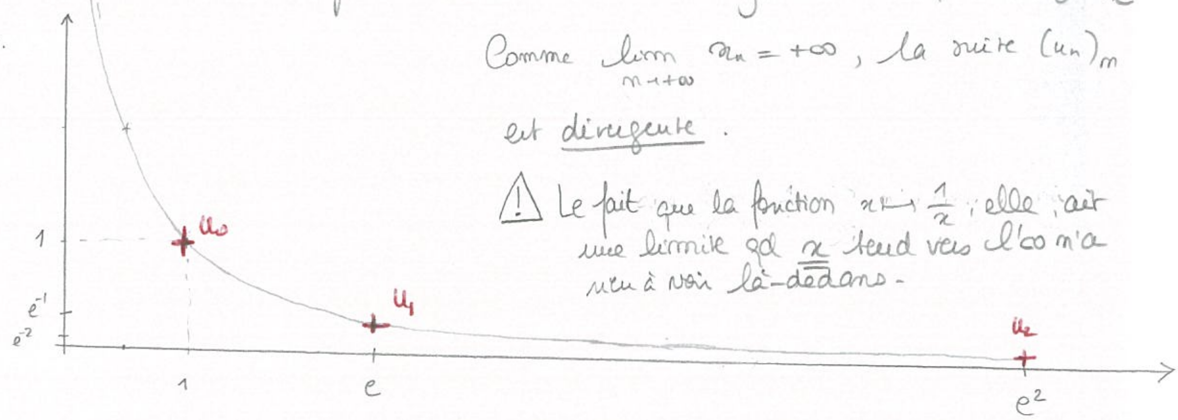
(c) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, posons $u_n = (x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right)$. On remarque que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $y_n = \sqrt{x_n}$ donc les points de la suite (u_n) se trouvent sur le graphe de la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$.



En outre, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 0$

Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers l'origine $(0,0)$.

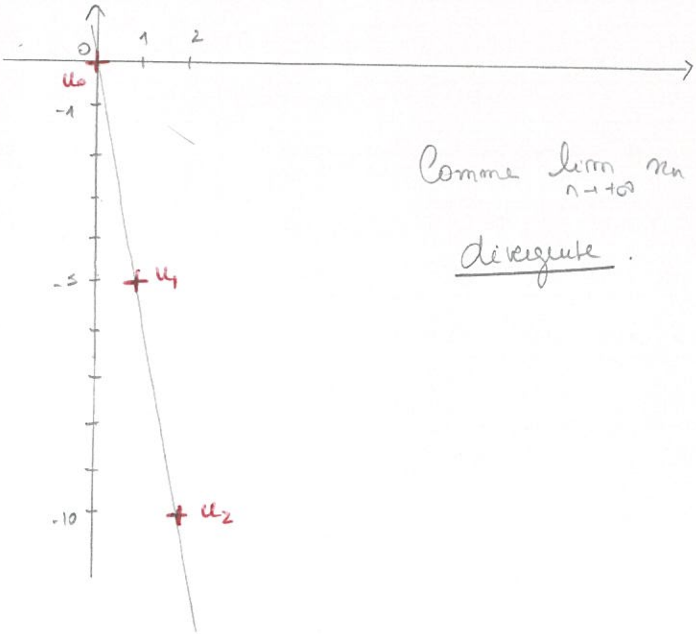
(d) $\forall n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = (x_n, y_n) = (e^n, e^{-n})$. On remarque que $y_n = \frac{1}{x_n}$, donc les termes de la suite sont des points de la branche d'hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x}$, $y, x > 0$.



Comme $\lim_{n \to +\infty} x_n = +\infty$, la suite $(u_n)_n$ est <u>divergente</u>.

⚠ Le fait que la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$, elle, ait une limite qd x tend vers l'∞ n'a rien à voir là-dedans.

(e) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n := (x_n, y_n) = (2n, -5n)$ satisfait $y_n = -\frac{5}{2} x_n$ donc les termes de la suite sont sur la droite vectorielle d'équation $y = -\frac{5}{2}x$



Comme $\lim_{n \to +\infty} x_n = +\infty$, la suite (u_n) est <u>divergente</u>.

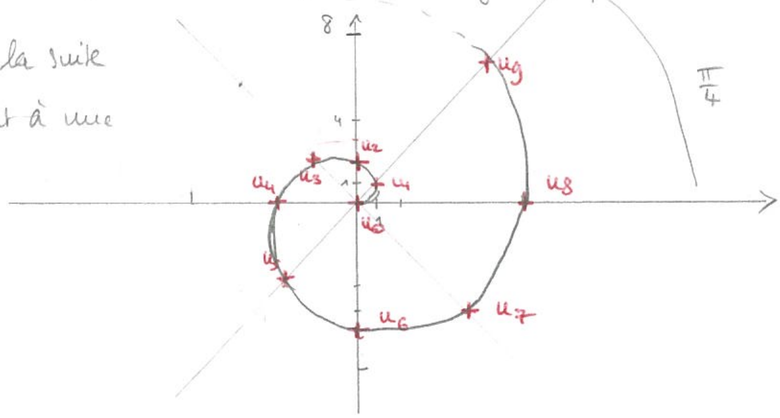
(f) $\forall n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = \left(n \cos n\frac{\pi}{4}, n \sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)\right) = n \underbrace{\left(\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right), \sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)\right)}_{\in \mathbb{S}^1 \text{ (cercle unité de } \mathbb{R}^2\text{)}}$

périodique de période 8

En particulier $\|u_n\|_2 = n \longrightarrow +\infty$

donc (u_n) est <u>divergente</u> (plus simple que de montrer que (x_n) ou (y_n) est divergente ici)

(Les points de la suite appartiennent à une spirale)



Exercice 2 Rappel : toute les normes sur $\mathbb{R}^2$ sont équivalentes. En particulier, il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tq $\alpha \| \|_1 \leq \| . \|_2 \leq \beta \| \|_1$

ie $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \alpha \|(x,y)\|_1 \leq \|(x,y)\|_2 \leq \beta \|(x,y)\|_1$

Plus précisément, • $\left(\|(x,y)\|_2\right)^2 = x^2 + y^2 \leq |x|^2 + |y|^2 + 2|xy| = \|(x,y)\|_1^2$

donc par positivité des normes, $\|(x,y)\|_2 \leq \|(x,y)\|_1$

(cela suffit en fait à résoudre l'exercice, mais déterminons tout de même la seconde constante)

$\|(x,y)\|_1^2 = |x|^2 + |y|^2 + 2|xy|$. Or pour tt $a, b \in \mathbb{R}$ $2ab \leq a^2 + b^2$

puisque $a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2 \geq 0$

donc $\|(x,y)\|_1^2 \leq 2(|x|^2 + |y|^2)$, ce qui équivaut (toujours par positivité des normes) à $\|(x,y)\|_1 \leq \sqrt{2} \|(x,y)\|_2$

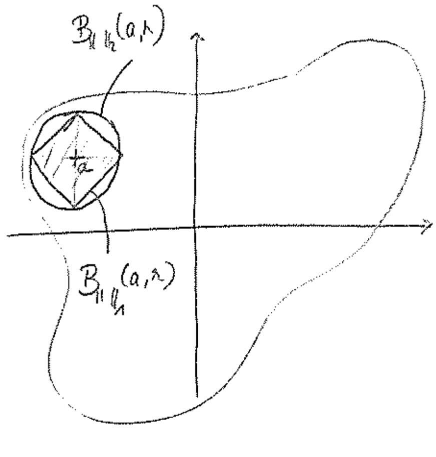
Finalement, dans $\mathbb{R}^2$, $\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}} \| \cdot \|_1 \leq \| \cdot \|_2 \leq \| \cdot \|_1}$. $(*)$

Revenons à l'exercice : soit $a \in U$. Comme U est ouvert pour la norme $\| \|_2$, il existe $r > 0$ tq $B_{\|.\|_2}(a,r) \subset U$

Mais $B_{\| \|_1}(a,r) \subset B_{\|.\|_2}(a,r)$. En effet,

En effet, si $x \in B_{\|.\|_1}(a,r)$, $\|x-a\|_1 < r$, donc d'après $(*)$ $\|x-a\|_2 < r$ également, ie $x \in B_{\| \|_2}(a,r)$

Donc $\forall a \in U, \exists r > 0$ tq $B_{\| \|_1}(a,r) \subset U$, ce qui signifie que U est ouvert pour la norme $\|.\|_1$



Soit maintenant F un fermé pour $\| \|_2$. Alors ${}^cF$ est un ouvert pour $\| \|_2$, donc pour $\|.\|_1$ d'après ce qui précède, donc son complémentaire, F, est un fermé pour $\|.\|_1$.

Enfin soit K un compact pour $\|\cdot\|_2$. K est fermé et borné pour $\|\cdot\|_2$. Donc K est fermé pour $\|\cdot\|_1$ d'après ce qui précède, et il existe $C \in \mathbb{R}_+$ tq $\forall p \in K$, $\|p\|_2 \leq C$. Mais alors $\forall x \in K$, $\|p\|_1 \leq \sqrt{2}\, C$ d'après (*).
K est donc fermé et borné pour $\|\cdot\|_1$, et on est en dimension finie, donc K est compact pour $\|\cdot\|_1$

(*) <u>Exercice 3</u> 1(a) <u>$\{v\}$ n'est pas ouvert</u> dans $\mathbb{R}^n$ (muni de n'importe quelle norme puisqu'elles sont toutes équivalentes) on prend dorénavant $\|\cdot\|_2$

sauf si $n=0$ auquel cas $\{v\} = \{0\} = \mathbb{R}^0$ tout entier donc à la fois ouvert et fermé.
En effet, si $n \geq 1$, $\forall r > 0$, $B(v,r) \not\subset \{v\}$ (elle contient par ex $v + \frac{r}{2} e_1 \neq v$)
donc $\{v\}$ ne contient pas un voisinage de v.

(b) <u>$\{v\}$ est fermé</u> : toute suite convergente de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\{v\}$ (donc constante égale à v !) a sa limite dans $\{v\}$ (puisqu'égale à v !)

(c) $\{v\}$ est inclus dans une boule (de rayon 0) donc est borné. Puisqu'il est en outre fermé et qu'on est en dim finie <u>il est compact</u>

---

2) Dans $\mathbb{R}^0$, $\{v_1, \dots, v_k\}$ est nécessairement réduit à $\{0\}$ et on est ramené à la question précédente.
Dans $\mathbb{R}^n$ avec $n \geq 1$

(a) <u>$\{v_1 — v_k\}$ n'est pas ouvert</u>, comme précédemment $\forall r>0$, $B(v_1, r) \not\subset \{v_1 \cdots v_k\}$;
Pour changer, on peut donner comme argument que $B(v,r)$ est un ensemble <u>infini</u> puisqu'il contient $\{ v + t e_1, t \in [0, r[\}$ (avec $v_t \neq v_{t'}$ si $t \neq t'$)
(et $\|v_t - v\|_2 = t\|e_1\|_2 < r$) alors que $\{v_1 — v_k\}$ est fini.

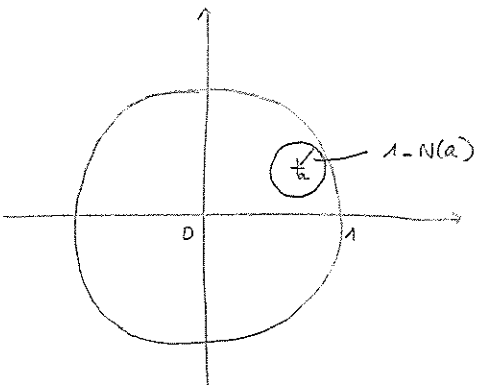
(b) et (c) $\{v_1, \; v_k\}$ est fermé / compact comme union finie de fermés / compacts.

(*) Dans cet exercice et dans la suite, beaucoup de réponses peuvent être raccourcies si l'on admet que dans un espace vectoriel normé (E,N), les seuls sous-ensembles ouverts et fermés à la fois sont E et $\emptyset$.

3) Dans cette question, $\mathbb{R}^2$ est supposé muni d'une norme N

(a) $\underline{B_N(0,1) \text{ est ouverte}}$. En effet, soit $a \in B_N(0,1)$ (ie tq $N(a) < 1$)

Alors $B_N(a, \underbrace{1-N(a)}_{>0}) \subset B_N(0,1)$



En effet, $\forall x \in B_N(a, 1-N(a))$,

$N(a-x) < 1 - N(a)$ donc

$$\begin{aligned} N(x) &= N(a+(x-a)) \\ &\leq N(a) + N(x-a) \\ &< N(a) + (1-N(a)) = 1 \end{aligned}$$

donc $x \in B_N(0,1)$.

Donc $B_N(0,1)$ est un ouvert (pour N).

(b) $\underline{B_N(0,1) \text{ n'est pas fermé}}$. En effet, soit $v \in \mathbb{R}^2$ tq $N(v) = 1$ (il en existe ! il suffit de prendre $w \neq 0$ (de sorte que $N(w) \neq 0$) et de poser $v = \frac{w}{N(w)}$, qui satisfait $N(v) = \frac{N(w)}{N(w)}$ par homogénéité).

Alors la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = \left(\left(1-\frac{1}{n}\right)v\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers v dans $(\mathbb{R}^2, N)$

$\left(N(a_n - v) = N\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)v - v\right) = \left|\frac{1}{n}\right| N(v) = \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \right)$, et $a_n \in B_N(0,1)$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\left(N(a_n) = 1 - \frac{1}{n} < 1\right)$

mais la limite $v \notin B_N(0,1)$ $(N(v) = 1)$.

(c) $\underline{B_N(0,1) \text{ n'est}}$ pas fermé donc n'est $\underline{\text{a fortiori}}$ $\underline{\text{pas compact}}$ (puisque compact $\Rightarrow$ (fermé et borné), et ce en toute dimension, même ∞).

(a') La boule unité fermée $\overline{B}_N(0,1)$ n'est pas ouverte. En effet, elle contient le v de la question précédente (tq $N(v) = 1$), mais $\forall r > 0$, $\left(1+\frac{r}{2}\right)v \in B_N(v, r)$ $\notin \overline{B}_N(0,1)$

car $N\left(\left(1+\frac{r}{2}\right)v\right) = 1 + \frac{r}{2} > 1$

(b') $\overline{B}_N(0,1)$ est fermée. En effet, si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \left(\overline{B}_N(0,1)\right)^{\mathbb{N}}$ est une suite convergente dans $(\mathbb{R}^2, N)$, de limite a, alors $N(a_n) \leq 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$ et cela entraîne $N(a) \leq 1$. (la fonction $N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ est 1-lip donc C^0), ie $a \in \overline{B}_N(0,1)$.

(c') $\overline{B}_N(0,1)$ est fermée et évidemment bornée, et on est en dimension finie donc elle est compacte.

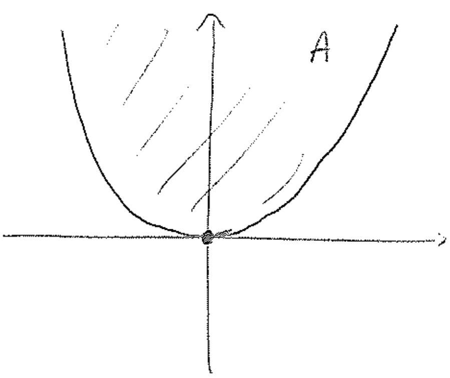
---

4)(b) $A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geqslant x^2 \right\} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - x^2 \geqslant 0 \right\} = f^{-1}\left([0,+\infty[\right)$

avec $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto y - x^2 \end{array}$ continue car polynomiale.

Comme $[0,+\infty[$ est un fermé de $\mathbb{R}$ (toute suite réelle positive convergente a une limite positive, ou son complémentaire $]-\infty,0[$ est ouvert ...), A est fermé dans $\mathbb{R}^2$ comme image réciproque d'un fermé de $\mathbb{R}$ par une application C^0 de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

(a)



$(0,0) \in A$ mais $\forall r>0,\ (0,-\frac{r}{2}) \notin A$, $(0,-\frac{r}{2}) \in B((0,0),r)$

donc $B((0,0),r) \not\subset A$

Donc A n'est pas ouvert.

(c) A n'est pas borné $\left(((0,n))_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}} \text{ et } \|(0,n)\| \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty \right)$

donc n'est a fortiori pas compact.

---

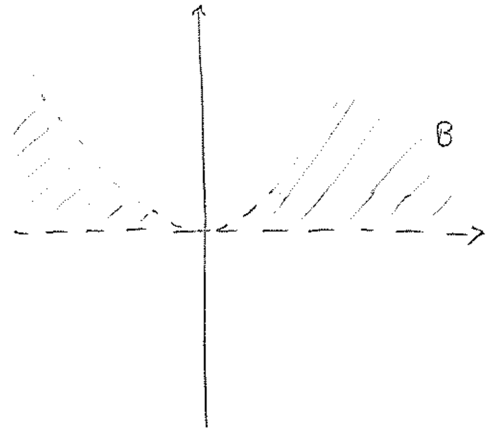
5)(a) $B = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y < x^2 \right\} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0 \right\} \cap \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - x^2 < 0 \right\}$

$\left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0 \right\} = \underline{\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*}$ ouvert comme produit d'ouverts, (ou à la main)

$\left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - x^2 < 0 \right\} = f^{-1}\left( ]-\infty,0[\right)$ [f de la question précédente] ouvert comme image réciproque d'un ouvert par une application continue

Donc B est ouvert comme intersection finie d'ouverts

(b)



$\left(\left(\frac{1}{n},\frac{1}{2n^2}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \in B^{\mathbb{N}^*}$

$\left(\forall n\in\mathbb{N}^*,\ 0<\underbrace{\frac{1}{2n^2}}_{=\,y_n}<\underbrace{\frac{1}{n^2}}_{=\,x_n^2}\right)$

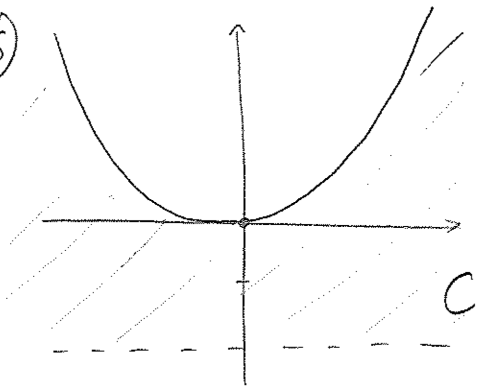
et converge vers $(0,0) \notin B$.

Donc <u>B n'est pas fermé</u>.

(c) B n'est pas fermé donc n'est a fortiori <u>pas compact</u>.

---

6)



$C = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid -2 < y \leq x^2\}$

(a) <u>C n'est pas ouvert</u> car ne contient pas de voisinage de $(0,0)$, qui lui appartient (on ne détaille pas, on a déjà vu ce type d'argument)

(b) <u>C n'est pas fermé</u> car $\left((0,-2+\frac{1}{n})\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \in C^{\mathbb{N}^*}$ converge dans $\mathbb{R}^2$ vers $(0,-2) \notin C$

(c) C n'est pas fermé donc <u>pas compact</u>.

---

7)(a) $D = \left\{ \frac{1}{2^n}, n\in\mathbb{N}\right\}$ <u>n'est pas ouvert dans $\mathbb{R}$</u>. En effet, un ouvert non vide de $\mathbb{R}$ contient un intervalle ouvert non vide, qui est non dénombrable, or D est dénombrable

(b) <u>D n'est pas fermé dans $\mathbb{R}$</u>. En effet, $\left(\frac{1}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in D^{\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$ vers 0, qui n'appartient pas à D.

(c) D n'est pas fermé donc <u>pas compact</u>.

---

8)(a) $E = \{2^n, n\in\mathbb{N}\}$ <u>n'est pas ouvert</u> pour la même raison que D (cf 7.)

(b) <u>E est fermé</u>. En effet $^cE = \left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}}]2^k, 2^{k+1}[\right) \cup]-\infty, 1[$, ouvert comme réunion d'int. ouverts

(c) E n'est pas borné ($|2^n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$) donc pas compact.

---

9) a) $\mathbb{Q}$ n'est pas ouvert pour la même raison que D et E (cf 7 et 8).

b) $\mathbb{Q}$ n'est pas fermé car $\sqrt{2}$ (par exemple) est limite d'une suite de rationnels mais $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

c) $\mathbb{Q}$ n'est donc pas compact.

Exercice 4 A chaque étape k, notons C_k la réunion des carrés centraux que l'on retire. C'est un ouvert comme union finie d'ensembles ouverts (comme produits d'intervalles ouverts). Et par construction, le tapis de Sierpinski T est

$$\underbrace{[0,1]^2 \cap \underbrace{\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} \underbrace{{}^cC_k}_{\text{fermé}}\right)}_{\text{fermé comme intersection de fermés}}}_{\text{fermé (idem) + borné} \implies \text{compact}}$$

et cet ensemble n'est pas ouvert car, notamment, il contient $(0,0)$ mais aucune boule ouverte centrée en ce point.

Exercice 5 à la fin

Exercice 6 1. Faux Considérer la suite $(u_n)_n$ définie par $u_n = \begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ pair} \\ n \text{ si } n \text{ impair} \end{cases}$.

2. Faux Considérer la suite $\left(n\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right), n\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)_n$ par exemple.

3. Faux cf 6 de l'exo 3.

4. Vrai $\emptyset$ et E (dans (E,N) evn) sont à la fois ouverts et fermés.

5. Vrai (et c'est même la définition).

6. Faux $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[= \{0\}$ qui n'est pas ouvert dans $\mathbb{R}$.
$\underset{\mathbb{R}}{\cap}$

7. Vrai (Cours)

8. Vrai (cours)

9 Vrai s'il est non vide (car il contient une boule ouverte centrée en l'un de ses points, ie un intervalle ouvert non vide, et celui-ci contient un segment de bornes distinctes).

10 Faux Déjà dans $\mathbb{R}$ ça ne marche pas : $\mathbb{Z}$ est fermé dans $\mathbb{R}$, $2\pi\mathbb{Z}$ aussi, mais $\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$ est dense ds $\mathbb{R}$ ($\overline{\mathbb{Z}+2\pi\mathbb{Z}} = \mathbb{R}$) mais $\mathbb{Z}+2\pi\mathbb{Z} \neq \mathbb{R}$ (l'un est dénombrable l'autre non) donc $\overline{\mathbb{Z}+2\pi\mathbb{Z}} \neq \mathbb{Z}+2\pi\mathbb{Z}$, donc $\mathbb{Z}+2\pi\mathbb{Z}$ n'est pas fermé

Dans $\mathbb{R}^2$ on peut prendre $\mathbb{Z}\times\mathbb{R}$ et $(\mathbb{Z}+2\pi\mathbb{Z})\times\mathbb{R}$.

Exercice 7 (La correction qui suit a été donnée en TD de L2, d'où l'extrême détail. Elle peut être bien simplifiée si on a la notion de limite d'une fonction de $\mathbb{R}^2$ ds $\mathbb{R}$, et les thm associés, ce qui n'était pas le cas dans ce cours)

Exercice 7 a) $f(x,y) = \dfrac{xy}{|x|+|y|}$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (Cette fonction est bien définie en dehors de $(0,0)$ car $(x,y) \neq (0,0) \Rightarrow |x|+|y| > 0$)

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \quad |f(x,y)| = \frac{|x|.|y|}{|x|+|y|} = \underbrace{\frac{|x|}{|x|+|y|}}_{\leq 1} \times |y| \leq |y| \leq \|(x,y)\|_2$$

Donc $\forall \varepsilon > 0$, en posant $\eta = \varepsilon > 0$, on a : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$,

$$\|(x,y)\|_2 < \eta \Longrightarrow |f(x,y)| < \varepsilon$$

ou encore $\|(x,y) - (0,0)\|_2 < \eta \Rightarrow |f(x,y) - 0| < \varepsilon$

Donc f est prolongeable par continuité en $(0,0)$, en posant $f((0,0)) = 0$

Remarque : de manière générale, si on a une fonction f définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x_0,y_0)\}$ et que l'on arrive à trouver $\ell \in \mathbb{R}$ tel que,

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(x_0,y_0)\}, \quad |f(x,y) - \ell| \leq C . \|(x,y) - (x_0,y_0)\|_2^{\alpha} \quad (*)$$

avec C et α des constantes > 0

Alors on peut prolonger f par continuité en (x_0,y_0) en posant $f((x_0,y_0)) = \ell$.

En effet, $\forall \varepsilon > 0$, en posant $\eta = \left(\frac{\varepsilon}{C}\right)^{1/\alpha}$, on a : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(x_0,y_0)\}$,

$$\|(x,y) - (x_0,y_0)\|_2 < \eta \Rightarrow |f(x_0,y_0) - \ell| < \varepsilon$$

Ce qui assure la continuité de la fonction prolongée en (x_0,y_0).

On peut trouver naturellement une telle majoration $(*)$ comme dans l'exemple ci-dessus, ou on peut poser $(x - x_0, y - y_0) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ (coordonnées polaires centrées en (x_0,y_0)) et chercher une majoration de la forme $|f(x,y) - \ell| \leq C . r^{\alpha}$ en isolant les r et en majorant la partie où il reste des θ.

Si au contraire on obtient $f(x,y) - l =$ une expression qui ne tend pas vers 0 quand r tend vers 0 pour un θ donné, alors le prolongement par l ne sera pas continue (cf exemple ultérieur).

b) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$

Remarque intuitive : dans l'exemple précédent, on avait un terme "d'ordre 2" en x et y au numérateur et un terme "d'ordre 1" au dénominateur, donc au voisinage de $(0,0)$ dans $\mathbb{R}^2$, le numérateur devenait négligeable par rapport au dénominateur, ce qui entraînait une limite nulle en $(0,0)$.
Ce n'est pas le cas ici : numérateur et dénominateur sont du même ordre. Ceci dit il faut pousser l'étude plus loin pour démontrer l'absence de limite.

On propose deux méthodes très proches dans l'idée mais moins dans la forme.

Méthode 1

Remarque préliminaire : Si f est prolongeable par continuité en $(0,0)$ par $l \in \mathbb{R}$, alors $\forall v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$
$f_v : t \longmapsto f(tv)$ doit l'être en 0 (c'est une fonction de $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ dans $\mathbb{R}$) par l également (indépendamment de v)

Attention, cette condition n'est pas suffisante. On verra un contre-exemple.

En effet si $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \|(x,y)\|_2 < \eta \Rightarrow |f(x,y) - l| < \varepsilon$
alors $\forall \varepsilon > 0$, en posant $\eta' = \dfrac{\eta}{\|v\|_2} > 0$, $\forall t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, |t| < \eta' \Rightarrow \|tv\|_2 < \eta$
$\Rightarrow |f(tv) - l| < \varepsilon$

ie $\lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ \neq}} f(tv) = l$.

On est juste en train de dire que si une fonction f sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ se prolonge par continuité en $(0,0)$, alors c'est aussi le cas pour les restrictions de f à aux droites $\mathbb{R}v$, et leurs prolongements en $(0,0)$ doivent coïncider)

Retour à l'exercice On va trouver v_1 et $v_2 \in \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ tq f_{v_1} et f_{v_2} n'ont pas la même limite en 0 :

$v_1 = (0,1)$: $f(tv_1) = f(0,t) = \frac{0}{t^2} = 0 \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$

$\neq$

$v_2 = (1,1)$: $f(t \times v_2) = f(t,t) = \frac{t^2}{2t^2} = \frac{1}{2} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{2} \neq 0$

$\neq$

Donc f n'est pas prolongeable par continuité en $(0,0)$.

Méthode 2 (en polaires) si $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta) \neq (0,0)$

$f(x,y) = \dfrac{r^2 \cos\theta \sin\theta}{r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)} = \cos\theta \sin\theta$ (indépendant de r mais dépendant de θ : vaut 0 pour $\theta = 0$ et $\frac{1}{2}$ pour $\theta = \frac{\pi}{4}$)

donc f n'admet pas de limite en $(0,0)$.

Justifions-le : Si f était prolongeable par continuité en $(0,0)$ par $\ell \in \mathbb{R}$, on aurait :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \eta > 0 \text{ tq } \|(x,y)\|_2 < \eta \Rightarrow |f(x,y) - \ell| < \varepsilon$$

et a fortiori tq $(\|(x,y)\|_2 < \eta$ et $\|(x',y')\|_2 < \eta) \Rightarrow |f(x,y) - f(x',y')|$

$\leqslant$

("deux pts assez proches de $(0,0)$ doivent avoir des images proches") $|f(x,y) - \ell| + |\ell - f(x',y')|$

$<$

2ε

Mais posons $\varepsilon = \frac{1}{4}$. $\forall \eta > 0$, on peut trouver (x,y) et $(x',y') \in B_{\|.\|_2}((0,0), \eta)$

tq $|f(x,y) - f(x',y')| \geqslant 2\varepsilon = \frac{1}{2}$. Il suffit de prendre

$(x,y) = \frac{\eta}{2}(\cos 0, \sin 0)$, où f vaut 0

et $(x',y') = \frac{\eta}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}, \sin\frac{\pi}{4}\right)$, où f vaut $\frac{1}{2}$.

f n'est donc pas prolongeable par continuité en $(0,0)$.

Cet argument se généralise bien sûr au cas où $\cos\theta\sin\theta$ est remplacé par n'importe quelle fonction qui n'a pas de limite indépendante de θ quand r tend vers 0.

c) $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Même idée que pour a) (numérateur d'ordre 4 et dénominateur d'ordre 2)

$|f(x,y)| = \underbrace{\dfrac{x^2}{x^2+y^2}}_{\leq 1} \cdot y^2 \leq \|(x,y)\|_2^2$ $(*)$ On est dans le cas de la remarque avec $C=1$ et $\alpha=2$.

Soit $\varepsilon>0$. Posons $\eta = \sqrt{\varepsilon} > 0$. Alors $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$,

$$\|(x,y)\|_2 < \eta \Rightarrow |f(x,y)| \leq \|(x,y)\|_2^2 < \varepsilon$$

f est donc prolongeable en $(0,0)$ par 0.

Rq Comme vu en TD on pouvait passer en polaire et écrire :

si $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$, $|f(x,y)| = \left|\dfrac{r^4\cos^2\theta\sin^2\theta}{r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}\right| = |r^2\cos^2\theta\sin^2\theta| \leq \underset{\|(x,y)\|_2^2}{\underset{\shortparallel}{r^2}}$ $(**)$

et on a envie d'écrire $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} r^2 = 0$ mais il semble que $\lim\limits_{(x,y)\to(\cdot,\cdot)} [\ldots]$ n'ait pas été défini en cours donc autant éviter et revenir à la définition comme ci-dessus. En tout cas la majoration $(**)$ obtenue grâce aux coordonnées polaires est la même que $(*)$.

d) $f(x,y) = \dfrac{1+x^2+y^2}{y}\sin y$ sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ (erreur dans l'énoncé, cette fonction n'est pas définie sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$)

Il s'agit ici de savoir si l'on peut prolonger f par continuité en une infinité de points !

Commençons par remarquer (et il faut le faire à chaque fois qu'on peut !) qu'on peut écrire $f(x,y) = g(x,y) \times h(x,y)$ avec

$$g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & 1+x^2+y^2 \end{array} \quad \text{et} \quad h : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}\times\mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \dfrac{\sin y}{y} \end{array}$$

La première est polynomiale donc continue en tout point de $\mathbb{R}^2$. (pour le redémontrer à la main, cf ci-après). Il suffit donc de vérifier que h se prolonge en une fonction $\tilde{h}$ continue sur $\mathbb{R}^2$ et le prolongement $g\times\tilde{h}$ de f à $\mathbb{R}^2$ sera alors continu comme produit de fonctions continues.

<u>Lemme</u> : $k : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $y \mapsto \frac{\sin y}{y}$ se prolonge par continuité par 1 en 0
(on utilise pour cela un DL à l'ordre 2 de sin en 0)

<u>Corollaire</u> : $h : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \frac{\sin y}{y}$ se prolonge par continuité à $\mathbb{R}\times\{0\}$ par 1,

ie : la fonction $\tilde{h} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \begin{cases} h(x,y) & \text{si } y\neq 0 \\ 1 & \text{si } y = 0 \end{cases}$ est C^0 sur $\mathbb{R}^2$.

<u>Preuve</u> • C'est la composée de $\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & y\end{array}$ et du prolongement $\tilde{k} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de k, qui sont toutes deux continues sur leur ensemble de définition donc la composée est continue.

• ou à la main : $\tilde{k}$ est continue en 0 donc

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists \eta>0,\ \forall y\in\mathbb{R}^*,\ |y|<\eta \Rightarrow |k(y)-1|<\varepsilon$$

Mais alors $\forall x_0\in\mathbb{R}$,

$\forall\varepsilon>0$, en prenant le η ci-dessus, $\forall (x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$, :

$$\|(x,y)-(x_0,0)\|_2<\eta \Rightarrow |y-0|<\eta \Rightarrow |\underbrace{\tilde{h}(x,y)}_{\substack{= \\ k(y) \\ \text{ou } 1}} - \underbrace{\tilde{h}(x_0,0)}_{\substack{= \\ 1}}|<\varepsilon$$

Donc $\tilde{h}$ est continue en $(x_0,0)$, $\forall x_0\in\mathbb{R}$.

Ceci conclut le prolongement par continuité de f.

<u>Avec les limites</u>, on aurait pu raccourcir les choses en disant que :

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} 1+x^2+y^2 = 1+x_0^2 \text{ (à justifier) et } \lim_{(x,y)\to(x_0,0)} \frac{\sin y}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y} = 1$$

cf justification ci-dessus

donc $\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} f(x,y)$ existe et vaut $1+x_0^2$, donc f est prolongeable par continuité.

Preuve de la continuité de $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto 1+x^2+y^2$

Il s'agit de montrer que $\forall (x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$,

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists \eta>0,\ \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \|(x,y)-(x_0,y_0)\|_2<\eta \Rightarrow |g(x,y)-g(x_0,y_0)|<\varepsilon$$

Mais
$$|g(x,y)-g(x_0,y_0)| = \left| \|(x,y)\|_2^2 - \|(x_0,y_0)\|_2^2 \right|$$

$$= \left| \|(x,y)\|-\|(x_0,y_0)\| \right| \times \left| \|(x,y)\|+\|(x_0,y_0)\| \right|$$

inégalité triangulaire (2 fois)

$$\leq \|(x,y)-(x_0,y_0)\| \left(2\underbrace{\|(x_0,y_0)\|}_{r_0} + \|(x,y)-(x_0,y_0)\| \right) \quad (*)$$

Étant donné $\varepsilon>0$, posons $\eta = \min\left(\frac{\varepsilon}{3r_0+1}, r_0+1\right) > 0$ (à chercher au brouillon)

Alors $\|(x,y)-(x_0,y_0)\|<\eta \Rightarrow (*) < \frac{\varepsilon}{3r_0+1} \times (3r_0+1) = \varepsilon$, ce qu'on voulait. □

e) $f(x,y) = \dfrac{x^2}{|y|+x^2}$ Un bon réflexe à avoir (qui est un cas particulier de la méthode 1 employée en b)) est de regarder ce qui se passe sur les axes de coordonnées :

$\forall y\neq 0,\ f(0,y) = 0 \xrightarrow[y\to 0]{} 0$

$\forall x\neq 0,\ f(x,0) = 1 \xrightarrow[x\to 0]{} 1$

$0 \neq 1$ donc f n'admet pas de limite en $(0,0)$

(avec les notations de b), nous venons de montrer que pour $v_1=(0,1)$ et $v_2=(1,0)$, f_{v_1} et f_{v_2} n'ont pas la même limite en 0)

f) $f(x,y) = \dfrac{\sin x + \sin y}{|x|+|y|}$ On remarque que $f(x,0) = \dfrac{\sin x}{|x|}$, qui n'admet pas de limite qd $x\to 0$

$\left(\lim_{x\to 0^+} f(x,0) = 1 \neq -1 = \lim_{x\to 0^-} f(x,0)\right)$

A fortiori f n'admet pas de limite en $(0,0)$.

g) Un exemple supplémentaire pour tester la méthode polaire sur un exemple un peu plus compliqué que a) :

$$f(x,y) = \frac{x^2 y^3}{3x^4 + 8y^2}$$ (bien défini sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Pourquoi ?)

si $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$,

$$|f(x,y)| = \left| \frac{r^2\cos^2\theta \; r^3 \sin^3\theta}{3r^4\cos^4\theta + 8r^2\sin^2\theta} \right|$$

si $\|(x,y)\|_2 < 1$, i.e. $r<1$, $r^4 \leq r^2$ donc $0 < 3r^4\cos^4\theta + 8r^4\sin^2\theta \leq 3r^4\cos^4\theta + 8r^2\sin^2\theta$

et donc

$$|f(x,y)| \leq \frac{r^5 |\cos^2\theta \sin^3\theta|}{r^4 |3\cos^4\theta + 8\sin^2\theta|}$$ (on se ramène à une seule puissance au dénominateur)

$$\leq r \, g(\theta)$$

avec $g : [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$
$\theta \longmapsto \dfrac{|\cos^2\theta \sin^3\theta|}{|3\cos^4\theta + 8\sin^2\theta|}$

(bien définie car cos et sin ne s'annulent pas simultanément)

g est continue (comme composée d'applications usuelles continues) sur le compact $[0,2\pi]$ donc majorée par une constante $C>0$

On a donc montré que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, si $\underline{\|(x,y)\| < 1}$ $|f(x,y)| \leq C\|(x,y)\|$
A partir de là on raisonne comme dans a).

Exercice 8 1. $N_\lambda = f^{-1}(\{\lambda\})$, image réciproque d'un fermé (cf exo 3) par une application continue, donc <u>fermé</u>

En outre $f(x) \underset{\|x\|\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc il existe $R>0$ tq $\forall x \in \mathbb{R}^2$, $\|x\|>R \Rightarrow f(x)>\lambda$

Ainsi, $f^{-1}(\{\lambda\}) \subset \overline{B}((0,0),R)$ donc <u>N_λ est borné</u>

Comme on est en dim finie, N_λ est donc <u>un compact</u>.

2. Même preuve, en remarquant que $S_\lambda = f^{-1}(\underbrace{]-\infty,\lambda]}_{\text{fermé également}})$.

3. Posons $\lambda = f((0,0))$ (par exemple).

• S_λ est compact non vide et f est continue donc elle est minorée sur S_λ et atteint son minimum, que l'on note λ_0. $\lambda_0 \leq \lambda$ puisque $f(x) \leq \lambda$ $\forall x \in S_\lambda$

Donc a fortiori $\forall x \notin S_\lambda$ $f(x) > \lambda \geq \lambda_0$. Donc λ_0 est le minimum de f sur $\mathbb{R}^2$ tout entier (et il est atteint).

<u>Bilan</u> Une fonction <u>coercive</u> sur $\mathbb{R}^2$ est minorée et atteint son minimum.

Exercice 9 1. <u>Faux</u> considérer $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$\exp$ est C^0, $\mathbb{R}$ est fermé, mais $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+^*$ n'est pas fermé ds $\mathbb{R}$.

2 <u>Vrai</u> (cours)

3 <u>Faux</u> Considérer $\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. $\arctan^{-1}(\underbrace{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}_{\text{boule ouverte de centre 0 et de rayon } \frac{\pi}{2}}) = \underbrace{\mathbb{R}}_{\text{pas boule ouverte}}$

4. <u>Faux</u> (Une telle application est dite <u>propre</u>)

Considérer $\cos : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\cos^{-1}(\underbrace{[-1,1]}_{\text{Compact}}) = \underbrace{\mathbb{R}}_{\text{pas compact}}$

5 <u>Vrai</u> (Cours)

6. <u>Faux</u> Considérer $\tan :]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\longrightarrow \mathbb{R}$.

Exercice 5 $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, • $|x+y| \leq 2 \iff -2 \leq x+y \leq 2$

$\iff -2-x \leq y \leq 2-x$

Donc $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x+y| \leq 2\}$ est la bande comprise entre les droites affines d'équations $y = -2-x$ et $y = -x+2$

• $|x-y| > 1 \iff \begin{cases} (x \geq y \text{ et } x-y > 1) \text{ ie } \underline{x > y+1} \text{ ou encore } y < x-1 \\ \text{ou } (x \leq y \text{ et } y-x > 1) \text{ ie } \underline{y > x+1} \end{cases}$

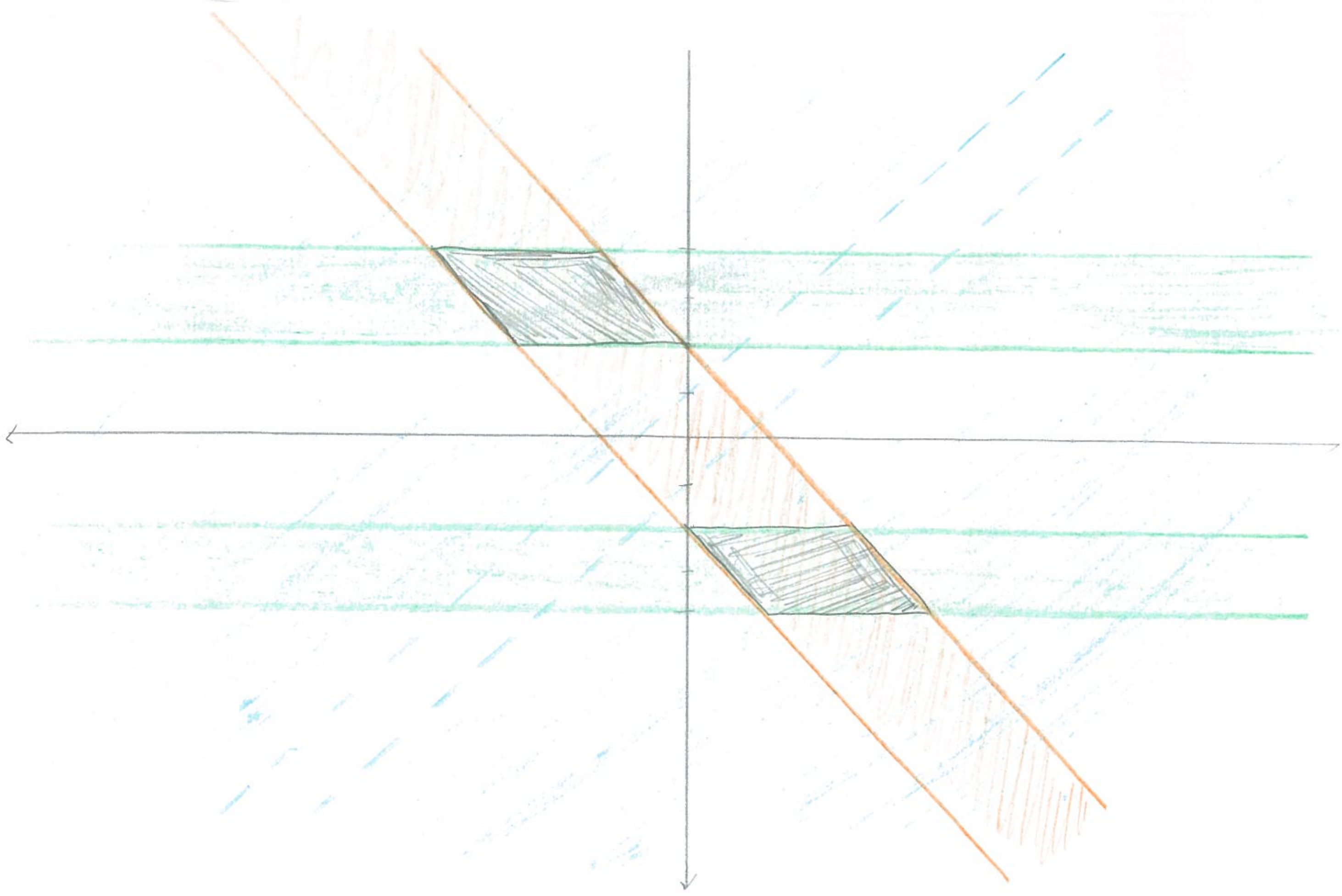
Donc $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x-y| > 1\}$ est la réunion du demi plan situé strictement en dessous de la droite d'éq. $y = x-1$ et du demi plan situé strictement au-dessus de ———— $y = x+1$.

• $||y|-3| \leq 1 \iff -1 \leq |y|-3 \leq 1 \iff 2 \leq |y| \leq 4$

$\iff \begin{cases} 2 \leq y \leq 4 \\ \text{ou } -4 \leq y \leq -2 \end{cases}$

Donc $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid ||y|-3| \leq 1\}$ est la réunion de deux bandes horizontales $\mathbb{R} \times [2,4]$ et $\mathbb{R} \times [-4,-2]$

E est l'intersection $A \cap B \cap C$:



On remarque sur le dessin qu'en fait $E = A \cap C$

En effet, $\forall (x,y) \in A \cap C$, $\begin{cases} -2 \leq x+y \leq 2 \\ 2 \leq y \leq 4 \end{cases}$ ou $\begin{cases} -2 \leq x+y \leq 2 \\ -4 \leq y \leq -2 \end{cases}$

Donc $\begin{cases} -2 \leq x+y \leq 2 \\ -8 \leq -2y \leq -4 \end{cases}$ ou $\begin{cases} -2 \leq x+y \leq 2 \\ 4 \leq -2y \leq 8 \end{cases}$

ce qui entraîne $-10 \leq x-y \leq -2$

donc $|x-y| = y-x \in [2,10]$

donc >1

ce qui entraîne $2 \leq x-y \leq 10$

donc $|x-y| = x-y \in [2,10]$

donc >1

Et dans les deux cas, $(x,y) \in B$, donc $\underbrace{A \cap C \cap B}_{= E} = A \cap C$

$A = f^{-1}(\underbrace{[-2,2]}_{\text{fermé de } \mathbb{R}})$ avec $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto x+y \end{array}$ continue car polynomiale

donc A est fermé comme image réciproque d'un fermé par une fct° C^0.

De même $C = g^{-1}([2,4])$ avec $g : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto |y| \end{array}$ C^0 comme composée de fct° C^0

donc C est fermé.

<u>E est donc fermé</u> comme intersection de fermé

<u>E est en outre borné</u> (on le voit sur le dessin) $\forall (x,y) \in E$, $|y| \leq 4$

et $|x| = |(x+y) - y| \leq |x+y| + |y| \leq 2+4 = 6$

Ainsi, <u>C est compact</u>.

<u>E n'est pas ouvert.</u> En effet $(0,2) \in E$ (cf dessin ou vérification directe)

mais pour tout $r > 0$ $(r<4)$ $B((0,2), r)_{\|\,\|_2} \not\subset E$ car $(0, 2-\frac{r}{2}) \in B((0,2),r)$ mais $\notin E$

$(|y| \notin [2,4])$