Séries entières

(fin de correction)

6b

$$\forall u \in]-1,1[, \quad \ln\sqrt{\frac{1+u}{1-u}} = \frac{1}{2}\Big(\ln(1+u) - \ln(1-u)\Big)$$

$u \longmapsto -\ln(1-u)$ est la primitive s'annulant en 0 de $u \longmapsto \frac{1}{1-u}$ donc par intégration terme à terme du DSE $\frac{1}{1-u} = \sum_{k=0}^{+\infty} u^k$ sur son intervalle ouvert de convergence,

$$\forall u \in]-1,1[, \quad -\ln(1-u) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{u^{k+1}}{k+1}.$$

De même, on obtient $\forall u \in]-1,1[, \ \ln(1+u) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{u^{k+1}}{k+1}$

(ou en appliquant la formule précédente à $-u \in]-1,1[$)

Ainsi, $\forall u \in]-1,1[$,

$$\ln\sqrt{\frac{1+u}{1-u}} = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{u^{k+1}}{k+1} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{u^{k+1}}{k+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty} \left((-1)^k + 1\right) \frac{u^{k+1}}{k+1}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} 2 \cdot \frac{u^{2n+1}}{2n+1} \quad \text{(les termes d'ordre impair s'annulent)}$$

$$= h(u).$$

6.c

$$\forall x \in]0,1[, \quad H(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\sqrt{x})^{2n}}{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\sqrt{x})^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{x}} h(\sqrt{x}).$$

Ainsi, $H(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \ln\sqrt{\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)$.

6.d

$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{4n^2-1} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x^n}{2n-1} - \frac{x^n}{2n+1}\right)$ or les séries $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{2n-1}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{2n+1}$ sont convergentes (le rayon de cv des séries entières correspondantes est 1, par exemple)

Donc on peut écrire $\varphi(x) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2n-1} - \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1}}_{H(x) - \frac{x^0}{2\cdot 0+1} = H(x)-1}\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{k+1}}{2k+1} - H(x) + 1\right)$$

(changement d'indice $k=n-1$)

$$= \frac{1}{2}\left((x-1)H(x) + 1\right)$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{x}}(x-1)\ln\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{4\sqrt{x}}(x-1)\ln(1+\sqrt{x}) - \frac{1}{4\sqrt{x}}(x-1)\ln(1-\sqrt{x}) + \frac{1}{2}$$

6.e • $x \mapsto \frac{1}{4\sqrt{x}}(x-1)\ln(1+\sqrt{x})$ est continue en 1 donc tend vers sa valeur en 1, 0, quand $x \to 1^-$

• $\frac{1}{4\sqrt{x}}(x-1)\ln(1-\sqrt{x}) = \underbrace{\frac{-\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x}}}_{\xrightarrow[x\to 1^-]{} -\frac{1}{2}} \underbrace{(1-\sqrt{x})\ln(1-\sqrt{x})}_{\xrightarrow[x\to 1^-]{} 0}$

car $\lim_{y\to 0^+} y\ln y = 0$ (croissance comparée)

Donc par sommation, $\lim_{x\to 1^-} \varphi(x) = \frac{1}{2}$.

6.f La série entière $\left(\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{4n^2-1}\right)$ est à coeff positif, de rayon $R>0$, et $\lim_{x\to 1^-} \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{4n^2-1}}_{\varphi(x)}$ existe et est finie. Donc d'après la première partie, $\left(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{4n^2-1}\right)$ converge et $S := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \lim_{x\to 1^-} \varphi(x) = \frac{1}{2}$.

7. $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2(k-1)+1} - \frac{1}{2k+1}\right)$

On reconnaît une somme télescopique, donc $S_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2(1-1)+1} - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)$

Et comme $\frac{1}{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on retrouve $S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{2}$.