

Équations différentielles

I. Équation différentielle linéaire d'ordre 1

A. Équation homogène.

1. *Cours.* Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Donner l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' = \alpha y$ (on ne demande pas de démonstration).
2. Soit I un intervalle de \mathbb{R} , $a : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $A : I \rightarrow \mathbb{R}$ une primitive de a .
 - (a) Montrer que pour tout $c \in \mathbb{R}$, la fonction $t \in I \mapsto ce^{-A(t)}$ est solution de l'équation différentielle $(EH) : y'(t) + a(t)y(t) = 0$.
 - (b) Soit $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ une solution de (EH) . On définit $c : t \in I \mapsto y(t)e^{A(t)}$. Calculer c' et en déduire que c est une fonction constante.
 - (c) En déduire l'ensemble $\text{Sol}(EH)$ des solutions de (EH) .
 - (d) Montrer que c'est un sous-espace vectoriel de l'espace $C^1(I, \mathbb{R})$ des fonctions de classe C^1 sur I . En donner une base, et en déduire sa dimension.
 - (e) On fixe $t_0 \in I$. Montrer que pour tout $c_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique solution de (EH) valant c_0 en t_0 .
 - (f) *Exemple.* Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y' = (1+t)y$.

B. Équation avec second membre. Soit I un intervalle de \mathbb{R} , a et $b : I \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions continues, et (E) l'équation différentielle $y' + a(t)y = b(t)$. À nouveau, on fixe $t_0 \in I$.

1. Supposons qu'on connaisse une solution $p : I \rightarrow \mathbb{R}$ de (E) . Montrer que $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ est solution de (E) si et seulement si $y - p$ est solution de l'équation homogène associée $(EH) : y' + a(t)y = 0$. En déduire $\text{Sol}(E)$ en fonction de p et de $\text{Sol}(EH)$.
2. Si maintenant on ne connaît pas de solution de (E) , on en trouve une (et en fait toutes) grâce à la méthode dite *de la variation de la constante*. Soit $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Posons $c : t \in I \mapsto y(t)e^{\int_{t_0}^t a(s)ds}$, de sorte que pour tout $t \in I$, $y(t) = c(t)e^{-\int_{t_0}^t a(s)ds}$ (on reconnaît l'expression des solutions de (EH) , sauf qu'ici c varie, d'où le nom de la méthode).
 - (a) Calculer c' en fonction de y et y' .
 - (b) Montrer que $y \in \text{Sol}(E)$ si et seulement si $c'(t) = b(t)e^{\int_{t_0}^t a(s)ds}$. Soit F la primitive de la fonction de droite s'annulant en t_0 . L'exprimer sous forme d'une intégrale à paramètre.
 - (c) Donner l'ensemble des solutions de (E) . De quel type d'espace s'agit-il ?
 - (d) Montrer que pour tout $c_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique solution de (E) valant c_0 en t_0 .
 - (e) *Application.* Déterminer l'ensemble des solutions de $ty' + y = \frac{1}{1-t}$ sur $I =]0, 1[$.

II. Équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants

Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$. On considère d'abord l'équation différentielle homogène $(EH) : ay'' + by' + cy = 0$. Le *polynôme caractéristique* de l'équation est par définition $\chi(X) = aX^2 + bX + c$.

1. Des solutions de l'équation homogène.

- (a) Montrer que si r est une racine réelle de $\chi(X)$, $t \in \mathbb{R} \mapsto e^{rt}$ est solution de (EH) , et que si c'est une racine double, $t \in \mathbb{R} \mapsto te^{rt}$ est également solution.

- (b) Montrer que si $\alpha + i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, est une racine complexe de $\chi(X)$, les fonctions $t \in \mathbb{R} \mapsto e^{\alpha t} \cos(\beta t)$ et $t \in \mathbb{R} \mapsto e^{\alpha t} \sin(\beta t)$ sont solutions de (EH) .
- (c) Montrer que si $r_1 \neq r_2 \in \mathbb{R}$, les fonctions $t \in \mathbb{R} \mapsto e^{r_1 t}$ et $t \in \mathbb{R} \mapsto e^{r_2 t}$ sont linéairement indépendantes dans l'espace vectoriel $C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
- (d) Montrer que si $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}^*$, les fonctions $t \in \mathbb{R} \mapsto e^{\alpha t} \cos(\beta t)$ et $t \in \mathbb{R} \mapsto e^{\alpha t} \sin(\beta t)$ sont linéairement indépendantes dans l'espace vectoriel $C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
- (e) Montrer que pour tout $r \in \mathbb{R}^*$, les fonctions $t \in \mathbb{R} \mapsto e^{rt}$ et $t \in \mathbb{R} \mapsto te^{rt}$ sont linéairement indépendantes dans l'espace vectoriel $C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
- (f) En déduire, selon le discriminant du polynôme caractéristique $\chi(X)$ de (EH) , une famille libre de deux solutions de (EH) .

2. **Toutes les solutions de l'équation homogène.** Soient y_1 et y_2 deux solutions linéairement indépendantes de (EH) . On pose $w = y_1 y_2' - y_2 y_1'$.

- (a) Montrer que w est solution d'une ED linéaire homogène d'ordre 1 à préciser.

On suppose dorénavant que (y_1, y_2) est la famille trouvée en 1.(f).

- (b) Montrer que $w(0) \neq 0$ puis que $w(t) \neq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Soit $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable. On pose :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c}{a} & -\frac{b}{a} \end{pmatrix}, \text{ et pour tout } t \in \mathbb{R}, R(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{pmatrix} \text{ et } Y(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}.$$

- (c) Montrer que y est solution de (EH) si et seulement si pour tout $t \in \mathbb{R}$, $Y'(t) = AY(t)$.
- (d) Montrer que $R'(t) = A.R(t)$ et que $R(t)$ est inversible pour tout $t \in \mathbb{R}$.
- (e) On définit $C : t \in \mathbb{R} \mapsto (R(t))^{-1}Y(t)$, de sorte que $Y(t) = R(t)C(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Justifier que les coefficients de C sont des fonctions dérivables, et montrer que y est solution de (EH) si et seulement si C est une fonction constante.
- (f) En déduire que l'ensemble des solutions de (EH) est l'ensemble des fonctions de la forme $c_1 y_1 + c_2 y_2$ avec $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. De quel type d'espace s'agit-il ? En donner une base en fonction du signe du discriminant du polynôme caractéristique de (EH) .
- (g) Soit $(t_0, y_0, y_0') \in \mathbb{R}^3$. Montrer qu'il existe une unique $y \in \text{Sol}(EH)$ tel que $y(t_0) = y_0$ et $y'(t_0) = y_0'$.
- (h) *Exemple.* Résoudre $y'' + \omega^2 y = 0$, pour $\omega \in \mathbb{R}$.

3. **Équation avec second membre.** On considère maintenant l'équation $(E) : ay'' + by' + cy = d(t)$, où $d : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue.

- (a) Si p est une solution de (E) , exprimer $\text{Sol}(E)$ en fonction de p et de $\text{Sol}(EH)$ (on pourra s'inspirer de la question I.B.1).
- (b) *Cas particulier.* Montrer que si d est de la forme $t \mapsto e^{\lambda t} P(t)$, avec P polynomiale, (E) admet une solution de la même forme. On commencera par le cas où $\lambda = 0$. *Application.* Résoudre $y'' - 3y' + 2y = e^x(x + 1)$.
- (c) *Cas général.* Soit (y_1, y_2) une base de (EH) et $y \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un unique couple (c_1, c_2) de fonctions C^1 telles que
$$\begin{cases} c_1 y_1 + c_2 y_2 = y \\ c_1 y_1' + c_2 y_2' = y' \end{cases}$$
- (d) Montrer que y est solution de (E) si et seulement si

$$\begin{cases} c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0 \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' = d. \end{cases}$$

- (e) *Application.* Résoudre $y'' + y = \frac{1}{\cos(t)}$ sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.