Équations différentielles

I. Équation différentielle linéaire d'ordre 1

A. Équation homogène. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $t_0 \in I$, $a : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $A : I \to \mathbb{R}$ une primitive de a.

1. Montrer que pour tout $c \in \mathbb{R}$, la fonction $t \in I \mapsto ce^{-A(t)}$ est solution de l'équation différentielle $(EH) : y' + a(t)y = 0$. On note en particulier f_1 la solution $t \in I \mapsto e^{-A(t)}$.

2. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une solution de (EH). On définit $c : t \in I \mapsto f(t)e^{A(t)}$ (de sorte que $f(t) = c(t)f_1(t)$ pour tout $t \in I$). Justifier que c est dérivable, calculer c' et en déduire que c est une fonction constante.

3. En déduire l'ensemble $\mathrm{Sol}(EH)$ des solutions de (EH).

4. Montrer que c'est un sous-espace vectoriel de l'espace $C^1(I, \mathbb{R})$ des fonctions de classe C^1 sur I, dont on donnera une base et dont on précisera la dimension.

5. Montrer que pour tout $c_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique solution de (EH) valant c_0 en t_0.

6. *Exemple.* Déterminer les solutions des équations différentielles $y' = \alpha y$ (pour $\alpha \in \mathbb{R}$) et $y' = (1 + t)y$.

B. Équation avec second membre. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, a et $b : I \to \mathbb{R}$ des fonctions continues, et (E) l'équation différentielle $y' + a(t)y = b(t)$. On note encore A une primitive de a sur I et f_1 la fonction $t \in I \mapsto e^{-A(t)}$. On fixe enfin $t_0 \in I$.

1. Supposons qu'on connaisse une solution $p : I \to \mathbb{R}$ de (E). Montrer que $f : I \to \mathbb{R}$ est solution de (E) si et seulement si $f - p$ est solution de l'équation homogène associée (EH) : $y' + a(t)y = 0$. En déduire $\mathrm{Sol}(E)$ en fonction de p et de $\mathrm{Sol}(EH)$.

2. Si maintenant on ne connaît pas de solution de (E), on en trouve une (et en fait toutes) grâce à la méthode dite *de la variation de la constante*. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Posons $c : t \in I \mapsto f(t)e^{A(t)}$, de sorte que pour tout $t \in I$, $f(t) = c(t)f_1(t)$ (cela ressemble à l'expression des solutions de (EH), sauf qu'ici c *varie*, d'où le nom de la méthode).
   (a) Calculer c' en fonction de f et f'.
   (b) Montrer que $f \in \mathrm{Sol}(E)$ si et seulement si $c'(t) = b(t)e^{A(t)}$. Soit F la primitive s'annulant en t_0 de la fonction $t \in I \mapsto b(t)e^{A(t)}$. L'exprimer sous forme d'une intégrale à paramètre.
   (c) Donner l'ensemble des solutions de (E). De quel type d'espace s'agit-il ? Vérifier que l'on retrouve le résultat du 1 avec $p = F \times y_1$.
   (d) Vérifier que pour tout $c_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique solution de (E) valant c_0 en t_0.
   (e) *Application.* Déterminer l'ensemble des solutions de $ty' + y = \frac{1}{1-t}$ sur $I =]0, 1[$.

II. Équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants

Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$. On considère d'abord l'équation diff. homogène $(EH) : y'' + \alpha y' + \beta y = 0$. Le *polynôme caractéristique* de l'équation est par définition $\chi(X) = X^2 + \alpha X + \beta$.

1. **Des solutions de l'équation homogène.**
   (a) Montrer que si r est une racine réelle de $\chi(X)$, $t \in \mathbb{R} \mapsto e^{rt}$ est solution de (EH), et que si c'est une racine double, $t \in \mathbb{R} \mapsto te^{rt}$ est également solution.

(b) Montrer que si $\lambda + i\omega$, $\lambda, \omega \in \mathbb{R}$, est une racine complexe de $\chi(X)$, les fonctions $t \in \mathbb{R} \mapsto e^{\lambda t}\cos(\omega t)$ et $t \in \mathbb{R} \mapsto e^{\lambda t}\sin(\omega t)$ sont solutions de (EH) (on pourra commencer par adapter le début de la question précédente au cas où $r \in \mathbb{C}$).

(c) Montrer que si $r_1 \neq r_2 \in \mathbb{R}$, les fonctions $t \in \mathbb{R} \mapsto e^{r_1 t}$ et $t \in \mathbb{R} \mapsto e^{r_2 t}$ sont linéairement indépendantes dans l'espace vectoriel $C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(d) Montrer que si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\omega \in \mathbb{R}^*$, les fonctions $t \in \mathbb{R} \mapsto e^{\lambda t}\cos(\omega t)$ et $t \in \mathbb{R} \mapsto e^{\lambda t}\sin(\omega t)$ sont linéairement indépendantes dans l'espace vectoriel $C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(e) Montrer que pour tout $r \in \mathbb{R}^*$, les fonctions $t \in \mathbb{R} \mapsto e^{rt}$ et $t \in \mathbb{R} \mapsto te^{rt}$ sont linéairement indépendantes dans l'espace vectoriel $C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(f) En déduire, selon le discriminant du polynôme caractéristique $\chi(X)$ de (EH), une famille libre de deux solutions de (EH).

2. **Toutes les solutions de l'équation homogène.** Soient f_1 et f_2 deux solutions linéairement indépendantes de (EH). On pose $w = f_1 f_2' - f_2 f_1'$.

(a) Montrer que w est solution d'une ED linéaire homogène d'ordre 1 à préciser.

On suppose dorénavant que (f_1, f_2) est la famille trouvée en 1.(f).

(b) Montrer que $w(0) \neq 0$ puis que $w(t) \neq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ en utilisant (a).

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable. On pose :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\beta & -\alpha \end{pmatrix}, \text{ et pour tout } t \in \mathbb{R},\ R(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) & f_2(t) \\ f_1'(t) & f_2'(t) \end{pmatrix} \text{ et } F(t) = \begin{pmatrix} f(t) \\ f'(t) \end{pmatrix}.$$

(c) Montrer que f est solution de (EH) si et seulement si pour tout $t \in \mathbb{R}$, $F'(t) = AF(t)$.

(d) Montrer que $R'(t) = A.R(t)$ et que $R(t)$ est inversible pour tout $t \in \mathbb{R}$.

(e) On définit $C : t \in \mathbb{R} \mapsto (R(t))^{-1}F(t)$, de sorte que $F(t) = R(t)C(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Justifier que les coefficients de C sont des fonctions dérivables, et montrer que f est solution de (EH) si et seulement si C est une fonction constante.

(f) En déduire que l'ensemble des solutions de (EH) est l'ensemble des fonctions de la forme $c_1 f_1 + c_2 f_2$ avec $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. De quel type d'espace s'agit-il ?

(g) Soit $(t_0, y_0, y_0') \in \mathbb{R}^3$. Montrer qu'il existe un unique $f \in \mathrm{Sol}(EH)$ tel que $f(t_0) = y_0$ et $f'(t_0) = y_0'$.

(h) *Exemple.* Résoudre $y'' + \omega^2 y = 0$, pour $\omega \in \mathbb{R}$.

3. **Équation avec second membre.** On considère maintenant l'équation $(E) : y'' + \alpha y' + \beta y = b(t)$, où $b : I \to \mathbb{R}$ est une fonction continue.

(a) Si p est une solution de (E), exprimer $\mathrm{Sol}(E)$ en fonction de p et de $\mathrm{Sol}(EH)$ (on pourra s'inspirer de la question I.B.1).

(b) *Cas particulier.* Montrer que si b est de la forme $t \mapsto e^{\mu t}P(t)$, avec P polynomiale, (E) admet une solution de la même forme. On commencera par le cas où $\mu = 0$. *Application.* Résoudre $y'' - 3y' + 2y = e^x(x+1)$.

(c) *Cas général.* Soit (f_1, f_2) une base de (EH) et $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un unique couple (c_1, c_2) de fonctions C^1 telles que $\begin{cases} c_1 f_1 + c_2 f_2 = f \\ c_1 f_1' + c_2 f_2' = f' \end{cases}$.

(d) Montrer que f est solution de (E) si et seulement si

$$\begin{cases} c_1' f_1 + c_2' f_2 = 0 \\ c_1' f_1' + c_2' f_2' = b. \end{cases}$$

(e) *Application.* Résoudre $y'' + y = \frac{1}{\cos(t)}$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.