Contrôle continu 1

Les exercices peuvent être traités indépendamment. La qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Aucun matériel (calculatrice, téléphone portable, etc.) ou document n'est autorisé. Le barème est donné à titre indicatif et pourra être légèrement modifié. Les questions plus difficiles sont marquée d'une ($\star$).
Durée : 45 minutes

Exercice 1 (13 pts)**.** Soit $\sigma \in S_9$ la permutation définie par :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 6 & 1 & 8 & 3 & 4 & 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

1. Décomposer σ en produit de cycles à supports disjoints.
2. Décomposer ces cycles en produits de permutations.
3. Calculer la signature de σ.
4. Quels sont les points fixes de σ ?
5. Donner l'inverse σ^{-1} de σ.
6. Calculer σ^{22} et donner sa décomposition en produit de cycles à supports disjoints.
7. ($\star$) Détérminer le plus petit entier $\ell \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sigma^\ell = \mathrm{id}$.

Exercice 2 (6 pts)**.** Dans le plan P muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on note $R_\theta : P \to P$ la rotation d'angle θ autour de l'origine O. On considère l'ensemble d'applications

$$G = \{R_0, R_{\pi/2}, R_\pi, R_{3\pi/2}\}.$$

1. Montrer que G, muni de la loi de composition des applications, forme un groupe. Est-il abélien ?
2. Donner la table de ce groupe. La comparer à celle du groupe $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$.

Exercice 3 (6 pts)**.** Soient E, F, G des ensembles non vides et $f : E \to F$ et $g : F \to G$ des applications. Montrer que si f et g sont bijectives, $g \circ f : E \to G$ l'est aussi.
La réciproque est-elle vraie quels que soient E, F, G, $f : E \to F$ et $g : F \to G$?

Exercice 4 (Bonus)**.** Justifier que tout élément de S_4 différent de l'identité appartient à une et une seule des catégories suivantes : les transpositions, les produits de deux transpositions à supports disjoints, les 3-cycles, les 4-cycles. Parmi ces catégories, lesquelles sont constituées de permutations de signature égale à 1 ? On note $\mathcal{A}_4$ l'ensemble des éléments de S_4 de signature 1. Déterminer le cardinal de $\mathcal{A}_4$.