Université Grenoble Alpes — **Licence Sciences et Technologies**
MAT 402 — **Année 2017-2018**

Corrigé Seconde Session

Exercice 1

1. (1 point) Soit $n \in \mathbb{N}$. f_n est bien définie et C^1 sur $[0,1]$ comme quotient d'une fonction C^1 sur $[0,1]$ par une fonction C^1 ne s'annulant pas sur $[0,1]$ (en fait minorée par 1). Pour tout $x \in [0,1]$,

$$f_n'(x) = \frac{(1+n^2x^2) - x \times 2n^2x}{(1+n^2x^2)^2} = \frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2} = \frac{(1-nx)(1+nx)}{(1+n^2x^2)^2},$$

qui est du signe de $1-nx$ car $1+nx \geq 1$ ($n \geq 0$ et $x \geq 0$) et $(1+n^2x^2)^2 \geq 1$. Par suite, f_n est croissante sur $[0, \frac{1}{n}]$ et décroissante sur $[\frac{1}{n}, 1]$. Comme elle est en outre positive sur $[0,1]$, on a

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = \max_{x\in[0,1]} f_n(x) = f_n(\tfrac{1}{n}) = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

donc la suite de fonctions $(f_n)_n$ CVU vers la fonction nulle sur $[0,1]$.

2. (2 points) Soit $x \in [0,1]$. On a vu que $f_n'(x) = \frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}$. Si $x=0$, $f_n'(x) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc $(f_n'(0))_n$ tend vers 1. Si $x > 0$, $1-n^2x^2 \underset{n\to\infty}{\sim} -n^2x^2$ et $(1+n^2x^2)^2 \underset{n\to\infty}{\sim} n^4x^4$ (termes de plus haut degré en n) donc

$$f_n'(x) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n^2x^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Finalement, $(f_n')_n$ CVS sur $[0,1]$ vers la fonction g valant 1 en 0 et 0 sur $]0,1]$. La convergence n'est pas uniforme par contraposée du théorème de continuité d'une limite uniforme de fonctions continues, les f_n' étant continues et g ne l'étant pas.

3. (1 point) Non. f est la fonction nulle, de dérivée la fonction nulle, différente de g !

Exercice 2

1. (1,5 points + 1 bonus) Pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \quad \text{et} \quad \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n.$$

Pour $x = \pm 1$, les séries de TG x^n et $(-1)^n$ sont grossièrement divergentes, donc le domaine de convergence est l'intervalle ouvert $]-1,1[$ pour les deux.

2. (4 points) Soit f une fonction développable en série entière autour de l'origine, donc de la forme $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sur un intervalle de la forme $]-R,R[$ avec $R > 0$. D'après le cours, on a alors sur $]-R,R[$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \quad \text{donc} \quad x f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n$$

(le premier terme est nul) et

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \quad \text{donc} \quad x^2 f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n$$

(les deux premiers termes sont nuls). Ainsi, f est solution de (E) sur $I =]-R,R[\cap]-1,1[$ si et seulement si

$$\forall x \in I, \quad 4\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + 4\sum_{n=0}^{+\infty} na_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{x}{1-x} = x\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n$$

i.e. si et seulement si

$$\forall x \in I, \quad \sum_{n=0}^{+\infty}(4n(n-1)+4n-1)a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(4n^2-1)a_n x^n \sum_{n=1}^{+\infty} x^n$$

ce qui équivaut (I étant un intervalle ouvert non vide centré en 0) à

$$-a_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1,\ a_n = \frac{1}{4n^2-1}.$$

Reste à vérifier que ceci définit effectivement une série entière de rayon de CV non nul. C'est le cas car a_n est une fonction rationnelle de n (cours). Plus précisément, le rayon est 1. On a donc trouvé une (unique) solution de (E) DSE au voisinage de 0, la fonction $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{4n^2-1}$.

3. (1,5 points) On vient de voir que cette fonction était définie sur $]-1,1[$, et continue sur cet intervalle par propriétés des séries entières, mais on nous en demande un peu plus. On remarque que les fonctions $f_n : x \in [-1,1] \mapsto \frac{x^n}{4n^2-1}$, pour $n \geq 1$, sont continues sur $[-1,1]$ et satisfont $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{4n^2-1} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{4n^2}$, terme général *positif* d'une série convergente. Donc par critère de comparaison de séries numériques positives, $(\sum_n \|f_n\|_\infty)$ converge, i.e. $(\sum_n f_n)$ CVN donc CVU sur $[-1,1]$, donc sa somme φ est bien définie et continue sur $[-1,1]$ comme somme d'une série de fonctions continues convergeant uniformément sur $[-1,1]$.

4. (1 point) Par décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $\frac{1}{4X^2-1} = \frac{1}{(2X-1)(2X+1)}$, il existe α et $\beta \in \mathbb{R}$ tels que

$$\frac{1}{4X^2-1} = \frac{\alpha}{2X-1} + \frac{\beta}{2X+1} = \frac{\alpha(2X+1)+\beta(2X-1)}{4X^2-1} = \frac{2(\alpha+\beta)X + (\alpha-\beta)}{4X^2-1}.$$

Cette égalité entre fractions rationnelles est satisfaite si et seulement si

$$2(\alpha+\beta) = 0 \quad \text{et} \quad \alpha - \beta = 1$$

i.e. si et seulement si $\alpha = -\beta = \frac{1}{2}$. En particulier, pour tout $n \geq 1$ (de sorte que $4n^2 - 1 \neq 0$),

$$\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right).$$

5. (1,5 points) Pour tout $u \in]-1,1[$,

$$\begin{aligned}
\ln\sqrt{\frac{1+u}{1-u}} &= \frac{1}{2}\left(\ln(1+u) - \ln(1-u)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{u^{n+1}}{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{u^{n+1}}{n+1}\right) \quad \text{(cours)} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left((-1)^n + 1\right)\frac{u^{n+1}}{n+1}.
\end{aligned}$$

Or $(-1)^n+1=2$ pour n pair et 0 pour n impair donc on ne conserve dans la somme que les termes d'indice $2p$, $p\in\mathbb{N}$, de sorte que

$$\ln\sqrt{\frac{1+u}{1-u}}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{u^{2p+1}}{2p+1},$$

ce qui donne bien le DSE voulu de la fonction donnée sur $]-1,1[$.

6. (1 point) Soit $x\in]0,1[$ et $u=\sqrt{x}$. Alors :

$$H(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{2n+1}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{u^{2n}}{2n+1}=\frac{1}{u}\ln\sqrt{\frac{1+u}{1-u}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right).$$

7. (1,5 points) Pour $x\in]0,1[$,

$$\begin{aligned}
\varphi(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{4n^2-1}&=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{x^n}{2n-1}-\frac{x^n}{2n+1}\right)\\
&=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{2n-1}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{2n+1}\right)\\
&=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^{k+1}}{2k+1}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{2n+1}-1\right)\\
&=\frac{1}{2}((x-1)H(x)-1)\\
&=\frac{x-1}{4\sqrt{x}}\ln\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)-\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Problème

1.a. (0,5 point) Dessin.

1.b. (2 points) f est paire donc pour tout $n\in\mathbb{N}$, $b_n(f)=0$ et

$$\begin{aligned}
a_n(f)&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(t)\cos(nt)dt\\
&=\frac{2}{\pi}\int_0^{a}\cos(nt)dt\\
&=\begin{cases}\frac{2a}{\pi} & \text{si } n=0\\ \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^a=\frac{2\sin(na)}{\pi n} & \text{si } n\neq 0.\end{cases}
\end{aligned}$$

Sa série de Fourier est donc la série de fonctions

$$\left(x\in\mathbb{R}\mapsto\frac{a_0(f)}{2}+\sum_{n\in\mathbb{N}^*}a_n(f)\cos(nx)\right)=\left(x\in\mathbb{R}\mapsto\frac{a}{\pi}+\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{2\sin(na)}{\pi n}\cos(nx)\right).$$

1.c. (2 points) (On continue à fixer a quelconque dans $]0,\pi[$) f est constante par morceaux donc C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$ (mais pas continue) et 2π-périodique. On peut donc lui appliquer le théorème de Dirichlet qui affirme qu'en tout point x où f est continue, f est égale à la somme de sa série de Fourier. En particulier en 0 (f étant continue sur $[0,a[$ et par parité sur $]-a,0]$), on obtient :

$$1=f(0)=\frac{a}{\pi}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2\sin(na)}{\pi n}\underbrace{\cos(n\times 0)}_{1}$$

ce qui donne bien (par multiplication par π, déplacement de a et division par 2)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(na)}{n} = \frac{\pi - a}{2}.$$

Comme f est C^1 par morceaux, elle est a fortiori C^0 par morceaux, donc on peut lui appliquer en outre le théorème de Parseval qui affirme que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(t))^2 dt = \frac{a_0(f)^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n(f)^2 + b_n(f)^2)$$

soit par parité et avec les calculs antérieurs

$$\frac{1}{\pi} \int_0^a dt = \frac{a}{\pi} = \frac{a^2}{\pi^2} + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(na)}{\pi^2 n^2}$$

ce qui donne bien (après multiplication par π^2, soustraction de a^2 et division par 2)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(na)}{n^2} = \frac{a(\pi - a)}{2}.$$

2.a. (2 points) La formule (1) signifie précisément que la série de fonctions $(\sum_{n\in\mathbb{N}^*} s_n)$ admet pour limite simple sur $]0, \pi[$ la fonction $a \mapsto \frac{\pi - a}{2}$.
Pour $x = 0$ ou π, $s_n(x) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ donc $(\sum_{n\in\mathbb{N}^*} s_n(x))$ converge et a pour somme 0.
Les fonctions s_n étant toutes impaires, si $(\sum_{n\in\mathbb{N}^*} s_n(x))$ converge pour un réel x vers un réel $g(x)$, $(\sum_{n\in\mathbb{N}^*} s_n(-x)) = (\sum_{n\in\mathbb{N}^*} -s_n(x))$ CV vers $-g(x)$. Donc $(\sum_{n\in\mathbb{N}^*} s_n)$ CVS sur $[-\pi, \pi]$ et la limite simple g est impaire. Enfin, comme les s_n sont 2π-périodiques, ceci entraîne que $(\sum_{n\in\mathbb{N}^*} s_n)$ converge en fait simplement sur $\mathbb{R}$ tout entier et que sa somme est 2π-périodique. Finalement, cette somme est l'unique fonction g impaire et 2π-périodique telle que

$$\forall x \in]0, \pi[, \quad g(x) = \frac{\pi - x}{2} \quad et g(0) = g(\pi) = 0.$$

(Dessin).

2.b. (0,5 point) La convergence ne peut être uniforme sur $\mathbb{R}$ car les s_n sont continues (fonctions trigonométriques) alors que g ne l'est pas.

3.a. (1 point) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\|s_n^2\|_\infty = \frac{1}{n^2}$, TG d'une série convergente, donc par définition $(\sum s_n^2)$ CVN sur $\mathbb{R}$.

3.b. (1 point) La formule (2) affirme que

$$\forall x \in]0, \pi[, \quad h(x) = \frac{x(\pi - x)}{2}.$$

Par ailleurs, on a clairement $h(0) = h(\pi) = 0$. h étant paire et 2π-périodique (par les mêmes arguments qu'en 2.a), ces propriétés la déterminent complètement.

4.a. (2 points) Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$ donc $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}$.
Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$h(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(nx)}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - \cos(2nx)}{2n^2},$$

et comme $\frac{1}{2n^2}$ est le TG d'une série CV par le critère de Riemann et $\frac{\cos(2nx)}{2n^2}$ est majoré en valeur absolue par $\frac{1}{2n^2}$ donc également sommable par comparaison, on peut écrire :

$$h(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2nx)}{2n^2} = \frac{\pi^2}{12} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2nx)}{2n^2}$$

d'après l'indication de l'énoncé.

4.b. (1,5 points) On vient de déterminer un développement de h en série trigonométrique sur $\mathbb{R}$ et on a vu (ou presque) que la convergence était normale donc uniforme. D'après le cours, la série trigonométrique en question est alors nécessairement la série de Fourier de h. Autrement dit, les coefficients de Fourier de h sont les suivants :

$$a_0(f) = 2 \times \frac{\pi^2}{12} = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_{2n}(f) = -\frac{1}{2n^2} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ a_{2n+1}(f) = b_n(f) = 0.$$