Devoir surveillé du 23 avril 2018

Documents, calculatrices, et téléphones portables sont interdits.
La clarté de la rédaction sera prise en compte dans l'évaluation.
Durée de l'épreuve : 1 heure 30. Les exercices sont indépendants.
Barème approximatif : cours sur 2 points ; exercice 1 sur 4 points ; exercice 2 sur 8 points ; exercice 3 sur 6 points.

Question de cours

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Montrer que pour tout $r \in [0, R[$, cette série entière converge normalement sur $\overline{D}(0, r)$.

Exercice 1

Calculer les rayons de convergence des séries entières suivantes :

$$\text{(a)} \sum_{n\geq 0} \frac{n^3+1}{n^2+n+1} z^n\,; \quad \text{(b)} \sum_{n\geq 0} \frac{e^n}{n!} z^n\,; \quad \text{(c)} \sum_{n\geq 0} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+1}.$$

Exercice 2

On considère l'équation différentielle suivante (d'inconnue y) :

$$\forall x \in\,]-1,1[, \quad xy'(x) + y(x) = \ln(1-x). \tag{1}$$

1. Donner le développement en série entière de $x \mapsto \ln(1-x)$ sur $]-1,1[$.
2. Supposant que $y :]-1,1[\to \mathbb{R}$ est une solution de (1) développable en série entière autour de 0, montrer que ses coefficients sont déterminés de façon unique, et donner leur expression.
3. Montrer que la série entière ainsi construite a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1.
4. Calculer explicitement la somme S de cette série entière.
5. Montrer que S est solution de (1).

Exercice 3

Lorsque $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue par morceaux et 2π-périodique, ses coefficients de Fourier réels sont donnés par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x, \quad b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x.$$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique valant -1 sur $[-\pi, 0[$, et 1 sur $[0, \pi[$.

1. Donner l'allure du graphe de f (sur $[-2\pi, 2\pi]$).
2. Calculer les coefficients de Fourier réels de f.
3. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$ (en donnant l'énoncé du théorème utilisé).