Université Grenoble Alpes — **Licence Sciences et Technologies**
MAT 402 — **Année 2017-2018**

Examen Final

Documents, calculatrices, et téléphones portables sont interdits.
La clarté de la rédaction sera prise en compte dans l'évaluation.
Durée de l'épreuve : 2 heures. Les exercices sont indépendants.
Barème approximatif : exercice 1 sur 2 points ; exercice 2 sur 5 points ; exercice 3 sur 5 points ; exercice 4 sur 6 points.

Exercice 1. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $f_n(x) = nx^2e^{-nx}$.

1. Etudier sa convergence (simple, uniforme) sur $\mathbb{R}_+$.
2. La série de fonctions $\left(\sum_{n\geqslant 0} f_n\right)$ converge-t-elle normalement sur $\mathbb{R}_+$? Sur $[3, +\infty[$?

Exercice 2. On considère la série de fonctions $(\sum_{n\geq 1} u_n)$ avec u_n définie sur l'intervalle $I =]-1, +\infty[$ par

$$u_n(x) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}.$$

1. Montrer que sa somme $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right)$ est bien définie sur I.
2. Soit $[a, b]$ un intervalle contenu dans I. Justifier qu'il existe $C > 0$ tel que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [a, b],\ |u_n(x)| \leqslant \frac{C}{n(n+a)}.$$
En déduire que S est continue sur $[a, b]$, puis sur I.
3. En énonçant le théorème utilisé, exprimer $\int_0^1 S(x)dx$ comme la somme d'une série numérique. Montrer que
$$\int_0^1 S(x)dx = \lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n)\Big).$$
Cette dernière limite s'appelle la constante γ d'Euler.
4. Calculer $S(x+1) - S(x)$ pour tout $x \in I$.
5. Donner un équivalent de S en $(-1)^+$.

Exercice 3. Soit α un réel fixé.

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{z^n}{n^\alpha}$.
2. Justifier par un résultat du cours que l'on énoncera, que l'application $L_\alpha : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n^\alpha}$ est C^∞ sur $]-1, 1[$.
3. Montrer que
$$\forall x \in]-1, 1[, \quad L_\alpha(-x) + L_\alpha(x) = 2^{1-\alpha}L_\alpha(x^2).$$

4. Pour tout $x \in]-1,1[$, établir une relation entre $L'_{\alpha+1}(x)$ et $L_\alpha(x)$ (en justifiant soigneusement), puis exprimer $L_{\alpha+1}(x)$ à l'aide de L_α et d'une intégrale.
5. Pour $x \in]-1,1[$, exprimer simplement $L_\alpha(x)$ en fonction de x (sans signe $\sum$) lorsque $\alpha = 0, -1$ et 1.

Exercice 4. On rappelle les expressions des coefficients de Fourier d'une fonction f continue par morceaux et 2π-périodique sur $\mathbb{R}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)dt \quad \text{et} \quad b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)dt.$$

On considère la fonction f, 2π-périodique et impaire, définie par

$$\forall x \in]0,\pi], \; f(x) = \pi - x \quad \text{et} \quad f(0) = 0.$$

1. Tracer le graphe de f. Quelle est la valeur de f en 0 ?
2. Calculer les coefficients de Fourier de f et écrire la série de Fourier de f.
3. Quelle est la limite simple de la série de Fourier de f sur $\mathbb{R}$? Justifier. Cette limite est-elle uniforme ?
4. En appliquant des théorèmes du cours (dont on énoncera soigneusement les hypothèses et dont on justifiera qu'elles sont satisfaites ici) calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.