



**UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES**  
**Facultad de Ciencias Exactas y Naturales**  
**Departamento de Física**

**Tesis de Licenciatura**

**Sobre la construcción geométrica del espectro de modelos de  
Wess-Zumino-Witten**

**Gastón Barboza**

**Director:** Estanislao Herscovich  
**Codirector:** Mariano Suárez-Álvarez

septiembre 2021

# Contenidos

<b>Agradecimientos</b>	<b>iii</b>
<b>Introducción</b>	<b>iv</b>
<b>1 Teoría topológica de campos</b>	<b>1</b>
1.1 Axiomas . . . . .	1
1.2 Modelos sigma . . . . .	3
1.3 Mecánica cuántica . . . . .	4
1.4 Formulación funtorial . . . . .	5
<b>2 Preliminares matemáticos para la construcción de un modelo de Wess-Zumino-Witten</b>	<b>7</b>
2.1 Preliminares geométricos . . . . .	7
2.1.1 Variedades complejas . . . . .	7
2.1.2 Superficies de Riemann . . . . .	10
2.1.3 Fibrados de línea . . . . .	10
2.2 Preliminares algebraicos . . . . .	12
2.2.1 Álgebras de Lie . . . . .	12
2.2.2 Grupos de Lie . . . . .	15
2.2.3 Grupo de lazos . . . . .	17
2.2.4 Extensiones centrales . . . . .	18
2.2.5 Sistemas de raíces de un álgebra de Lie simple compleja . . . . .	19
2.2.6 Correspondencia entre grupos de Lie compactos y complejos . . . . .	20
2.2.7 Álgebras de Lie afines . . . . .	22
<b>3 Acción de Wess-Zumino-Witten</b>	<b>24</b>
3.1 Acción de WZW para una superficie de Riemann cerrada . . . . .	24
3.1.1 Término cinético . . . . .	24
3.1.2 Término de WZW . . . . .	25
3.2 Acción de WZW para una superficie de Riemann compacta con borde . . . . .	26
3.2.1 Prerrequisitos: el fibrado de línea . . . . .	26
3.2.2 La acción en una superficie de Riemann compacta con borde . . . . .	28
<b>4 Simetría de gauge del modelo de WZW</b>	<b>33</b>
4.1 Extensiones centrales por $\mathbb{C}^*$ . . . . .	33
4.1.1 Construcción de la extensión central . . . . .	33
4.1.2 Extensión central del grupo de lazos . . . . .	35
4.2 Un grupo dado por la complexificación de un compacto . . . . .	39

4.3	La acción de $\widehat{LG}_k^{\mathbb{C}}$ sobre $L_{\text{WZW}}^k$ . . . . .	39
<b>5</b>	<b>Espectro de un modelo de Wess-Zumino-Witten</b> . . . . .	<b>41</b>
5.1	El álgebra afin . . . . .	41
5.2	Representaciones de peso máximo . . . . .	43
5.2.1	Condición de integralidad . . . . .	45
<b>A</b>	<b>Descomposición de Birkhoff</b> . . . . .	<b>48</b>
	<b>Bibliografía</b> . . . . .	<b>52</b>

# Agradecimientos

En primer lugar agradezco a mi director Estanislao Herscovich, por estar siempre presente y dispuesto a responder, sin importar el tiempo que lleve. Su paciencia solo es comparable con el alcance de sus conocimientos. Agradezco a mi codirector Mariano Suárez-Álvarez, por su apoyo.

Quiero agradecer a Cami, por acompañarme siempre y en todo sentido. A mi familia: mi papá, por el tiempo y cariño que me dio, mi hermana, por hacerme siempre pensar de maneras distintas, y mi mamá, por los momentos que compartí con ella. También a mis amigos: Tomy, por su compañía en la facultad y fuera, Gonza, por escucharme, entenderme y empujarme a seguir, Bruno, por toda la amistad que tuvimos y tenemos, Mati, por todas las charlas que hemos compartido.

También agradezco a los jurados por tomarse el tiempo de leer este trabajo, y a Silvana Ponce-Dawson y el Departamento de Física por su apoyo.

# Introducción

El objetivo de la tesis es exponer de manera matemáticamente rigurosa una teoría de campos de Wess-Zumino-Witten, escribiendo resultados que en la literatura física son ya conocidos, pero que muchas veces carecen de explicación firme y/o clara en su enunciación y demostración. La teoría cuántica de campos sufre de problemas importantes en la definición de sus objetos; en particular, la integral de Feynman no está construida de manera rigurosa en dimensión 4, que es el caso de interés físico. Como solución se han propuesto distintos sistemas axiomáticos, uno de los cuales es la teoría topológica de campos, formalizada por M. Atiyah [1] a partir del trabajo de G. Segal [26] para teorías conformes, cuyos axiomas establecen las propiedades que debe cumplir un objeto geométrico general para comportarse como si fuese una integral de caminos sobre un espacio de funciones. Por lo tanto, se comienza buscando directamente una función de partición cuántica para campos clásicos (es decir, funciones suaves del espacio-tiempo a valores en alguna variedad u objetos similares), a diferencia de una teoría constructiva como aquella dada por los axiomas de Gårding-Wightman, en donde se busca cuantizar los campos estableciendo una correspondencia con operadores sobre un espacio de Fock.

Este procedimiento se puede aplicar de manera directa a una teoría de Wess-Zumino-Witten (WZW), que está dada por un modelo sigma de dimensión 2 para campos que toman valores en un grupo de Lie. Los modelos de WZW fueron introducidos por J. Wess y B. Zumino en [29] y se relacionan con la teoría de campos conforme 2-dimensional, como explican E. Witten en [30], y V. Knizhnik y A. Zamolodchikov en [13]; sus aplicaciones a la teoría de cuerdas son explicadas por D. Gepner y Witten en [8]. Estas teorías de campos han sido ampliamente utilizadas en física teórica. En particular, como ejemplo podemos mencionar que el modelo de WZW con grupo de Lie no compacto dado por el cubrimiento universal de  $SL_2(\mathbb{R})$  fue utilizado por J. Maldacena y H. Ooguri para describir una teoría de cuerdas bosónica en un espacio anti-de Sitter de dimensión 3 en [18], [19], [20].

Se construirá de manera geométrica el espectro de la teoría para el caso compacto, siguiendo principalmente las exposiciones de [14] y [4], buscando aclarar pasos intermedios y omisiones.

# Capítulo 1

## Teoría topológica de campos

### 1.1 Axiomas

Daremos una introducción sobre las ideas generales de una teoría topológica de campos sin todos sus detalles técnicos, siguiendo las líneas de [5]. En este trabajo se presentará la teoría para el caso particular de un espacio-tiempo  $\Sigma$  que tomaremos como una variedad riemanniana compacta orientada con métrica  $g$  y un conjunto de campos  $C_\Sigma$ , funciones de  $\Sigma$  a valores en algún espacio de llegada, que tomaremos como un grupo de Lie. Las mismas ideas pueden igualmente formularse para otros casos, como el de una teoría de gauge, donde los campos son conexiones sobre  $\Sigma$ .

Sobre los campos definiremos una acción, es decir, una función

$$S_\Sigma : C_\Sigma \rightarrow \mathbb{R}$$

que satisface los axiomas que siguen, definiendo una teoría clásica.

(C.1) **Simetría:** dado otro espacio-tiempo  $(\Sigma', g')$  y una isometría  $f : \Sigma' \rightarrow \Sigma$  que preserva la orientación e induce un mapa  $f^* : C_\Sigma \rightarrow C_{\Sigma'}$ , debemos tener  $S_{\Sigma'}(f^*\varphi) = S_\Sigma(\varphi)$  para cualquier  $\varphi \in C_\Sigma$ . El caso particular  $\Sigma' = \Sigma$ ,  $g' = g$  implica que la acción es invariante ante las simetrías del espacio-tiempo. Dependiendo de la teoría, el espacio-tiempo puede tener estructura adicional, y se debe considerar  $f$  un homomorfismo de la categoría correspondiente.

(C.2) **Orientación:** si  $-\Sigma$  es  $\Sigma$  con la orientación opuesta, entonces para cualquier  $\varphi \in C_\Sigma$  debemos tener

$$C_{-\Sigma} = C_\Sigma \quad \text{y} \quad S_{-\Sigma}(\varphi) = -S_\Sigma(\varphi).$$

Esto se vincula con la unitariedad para la teoría (ver a continuación).

(C.3) **Aditividad:** si  $\Sigma_1, \Sigma_2$  son espacio-tiempos, sea  $\Sigma = \Sigma_1 \sqcup \Sigma_2$ . Entonces para cualesquiera  $\varphi_i \in C_{\Sigma_i}$  con  $i = 1, 2$ , notamos  $\varphi = \varphi_1 \sqcup \varphi_2$  y debemos tener

$$C_\Sigma \simeq C_{\Sigma_1} \times C_{\Sigma_2} \quad \text{y} \quad S_\Sigma(\varphi) = S_{\Sigma_1}(\varphi_1) + S_{\Sigma_2}(\varphi_2).$$

(C.4) **Localidad:** dada una subvariedad orientada  $\Pi \hookrightarrow \Sigma$  de codimensión 1, sea  $\tilde{\Sigma}$  el espacio obtenido cortando la variedad en  $\Pi$ , como se muestra en la Figura 1.1. Cada  $\varphi \in C_\Sigma$  define un  $\tilde{\varphi} \in C_{\tilde{\Sigma}}$  que satisface  $\tilde{\varphi}|_\Pi = \tilde{\varphi}|_{-\Pi}$ ; es decir, tenemos el egalizador

$$C_\Sigma \hookrightarrow C_{\tilde{\Sigma}} \begin{array}{c} \xrightarrow{r_+} \\ \xrightarrow{r_-} \end{array} C_\Pi$$

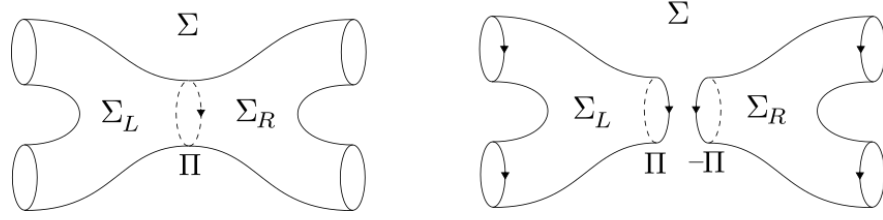


Figura 1.1: Una variedad cerrada  $\Sigma$  cortada en dos mitades según una subvariedad  $\Pi$ .

donde  $r_{\pm}$  denota la restricción a los bordes nuevos  $\pm\Pi$ . Entonces este axioma establece que

$$S_{\Sigma}(\varphi) = S_{\tilde{\Sigma}}(\tilde{\varphi}).$$

Vemos que este axioma implica que para cualquier  $\varphi \in C_{\Sigma}$ , tenemos

$$S_{\Sigma}(\varphi) = S_{\Sigma_L}(\varphi|_{\Sigma_L}) + S_{\Sigma_R}(\varphi|_{\Sigma_R}).$$

Es decir, la acción es local en el sentido de que para un corte arbitrario, el comportamiento del campo de un lado del corte no afecta la teoría del otro lado.

Estos axiomas deben ser tomados como hoja de ruta, es decir, definen el marco general de la teoría, pero pueden ser ligeramente modificados de ser necesario según cada formulación. Esto es aún más relevante en el caso cuántico.

Esta teoría la podemos cuantizar si podemos definir en ella una función de partición  $Z_{\Sigma}$  integrando la amplitud de probabilidad  $\exp[-S_{\Sigma}(\varphi)]$  sobre todos los campos. En el caso de un espacio-tiempo sin borde ( $\partial\Sigma = \emptyset$ ), uno quisiera tener una medida  $\mu_{\Sigma}$  en  $C_{\Sigma}$  y calcular

$$Z_{\Sigma} = \int_{C_{\Sigma}} \exp[-S_{\Sigma}(\varphi)] d\mu_{\Sigma}(\varphi) \in \mathbb{C}.$$

Para un espacio-tiempo con borde, se deberían imponer condiciones de contorno, seleccionando el dominio de integración como

$$C_{\Sigma}(\psi) = \{\varphi \in C_{\Sigma} \mid \varphi|_{\partial\Sigma} = \psi\} \quad \text{donde } \psi \in C_{\partial\Sigma}.$$

La función de partición entonces representaría un elemento de un espacio  $E_{\partial X}$  de funciones de  $C_{\partial\Sigma}$  a valores complejos, dada por

$$Z_{\Sigma} : C_{\partial\Sigma} \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{tal que} \quad Z_{\Sigma}(\psi) = \int_{C_{\Sigma}(\psi)} \exp[-S_{\Sigma}(\varphi)] d\mu_{\Sigma}(\varphi) \quad (1.1)$$

Como ya se anticipó, el problema es que esta medida  $\mu_{\Sigma}$  no puede construirse rigurosamente de manera general. Lo que se hace para sortear el problema es suponer que la medida existe, ver qué implica ello para los cuatro axiomas arriba mencionados, e incorporar esos resultados como axiomas nuevos. Nos limitaremos a enunciar qué resulta de ese proceso.

Una teoría cuántica se formula sobre variedades cerradas (sin borde) de dimensión  $d$ , que llamamos espaciales, y variedades de dimensión  $d+1$  que llamamos espacio-tiempos. Denotamos a  $\Pi$  como un elemento genérico de los primeros, y  $\Sigma$ , de los segundos. A cada  $\Pi$  asignamos un espacio de Hilbert cuántico  $E(\Pi)$ , como, por ejemplo, algún espacio de funciones  $\{Z : C_{\Pi} \rightarrow \mathbb{C}\}$ . A cada espacio-tiempo le asignamos un vector en  $E(\partial\Sigma)$ , que llamaremos la función de partición o de correlación  $Z_{\Sigma} \in E(\partial\Sigma)$ , y satisface los axiomas enumerados a continuación.

(Q.1) **Simetría:** Si  $f : \Pi' \rightarrow \Pi$  es una isometría, existe un mapa inducido  $f_* : E(\Pi') \rightarrow E(\Pi)$ . Si  $F : \Sigma' \rightarrow \Sigma$  es una isometría que induce un mapa  $\partial F : \partial\Sigma' \rightarrow \partial\Sigma$ , entonces  $(\partial f)_*(Z_{\Sigma'}) = Z_\Sigma$ . Como en el caso anterior, esto puede extenderse a otras simetrías dadas por estructura adicional.

(Q.2) **Orientación:**  $E(-\Pi) \simeq \overline{E(\Pi)}$  (el espacio de Hilbert conjugado) y  $Z_{-\Sigma} = \overline{Z_\Sigma}$

(Q.3) **Multiplicatividad:**  $E(\Pi_1 \sqcup \Pi_2) \simeq E(\Pi_1) \otimes_{HS} E(\Pi_2)$  y  $Z_{\Sigma_1 \sqcup \Sigma_2} = Z_{\Sigma_1} \otimes_{HS} Z_{\Sigma_2}$ , donde  $\otimes_{HS}$  indica el producto tensorial como espacio de Hilbert, es decir, la clausura del producto tensorial usual, con el producto dado por  $\langle v \otimes w, v' \otimes w' \rangle = \langle v, v' \rangle \langle w, w' \rangle$ .

(Q.4) **Ley de pegado:** Si  $\Pi \hookrightarrow \Sigma$  es subvariedad, y  $\tilde{\Sigma}$  se obtiene cortando  $\Sigma$  en  $\Pi$ , entonces

$$E(\partial\tilde{\Sigma}) = E(\partial\Sigma \sqcup \Pi \sqcup -\Pi) \simeq E(\partial\Sigma) \otimes_{HS} E(\Pi) \otimes_{HS} \overline{E(\Pi)} \quad (1.2)$$

Podemos tomar traza sobre  $\Pi$  contrayendo con el producto interno, *i.e.* definimos

$$\text{Tr}_\Pi : E(\partial\tilde{\Sigma}) \rightarrow E(\partial\Sigma)$$

a partir de la identificación (1.2) y la aplicación  $v \otimes w \otimes \bar{w}' \mapsto v \langle w, w' \rangle$ . Entonces este axioma nos dice que  $\text{Tr}_\Pi Z_{\tilde{\Sigma}} = Z_\Sigma$ .

Como dijimos anteriormente, estos axiomas se deben satisfacer en espíritu, no de forma concreta. Pueden resultar demasiado fuertes, como se explica en la Sección 1.3.

## 1.2 Modelos sigma

Podemos aplicar la teoría topológica de campos a los llamados modelos sigma; esto nos da la mecánica cuántica para el caso de dimensión 1, mientras que la teoría de Wess-Zumino-Witten se construirá a partir del caso de dimensión 2. Para definir un modelo sigma tomaremos un espacio-tiempo  $\Sigma$  que tomaremos como una variedad riemanniana compacta orientada con métrica  $g$ , una variedad objeto  $M$  con métrica  $h$  (posiblemente semidefinida y/o degenerada), y campos  $\varphi \in C^\infty(\Sigma, M)$ . Podremos definir la energía de estos campos a partir de la construcción que sigue.

**Definición 1.1.** Definimos la densidad de energía de un campo  $|d\varphi|^2 \in C^\infty(\Sigma)$  como la composición de

1. la sección  $\sigma_g : \Sigma \rightarrow T^{\otimes 2}\Sigma$  inducida por la métrica, dada en coordenadas por  $g^{ij}\partial_i \otimes \partial_j$ ,
2. el mapa  $d\varphi^{\otimes 2} : T^{\otimes 2}\Sigma \rightarrow T^{\otimes 2}M$  dado por el diferencial del campo,
3. la métrica del espacio objeto  $h : \Gamma(TM)^{\otimes 2} \rightarrow \mathbb{R}$ .

La energía del campo entonces está dada por

$$E_\Sigma(\varphi) = \int_\Sigma |d\varphi|^2 d\text{vol}_\Sigma \underset{(\text{coord.})}{=} \int_\Sigma \frac{\partial\varphi^a}{\partial x^i} \frac{\partial\varphi^b}{\partial x^j} h_{ab} g^{ij} \sqrt{\det g_{ij}} dx^1 \dots dx^{\dim\Sigma}$$

**Observación 1.2.** Para ser más explícitos, la sección  $\sigma_g$  de  $T^{\otimes 2}\Sigma$  se construye a partir de la métrica  $g \in \Gamma(T_2\Sigma)$  notando que podemos definir para cada  $p \in \Sigma$  un isomorfismo

$$g_p^\flat : T_p\Sigma \rightarrow T_p^*\Sigma \quad \text{dado por} \quad g_p^\flat(X_p) = g|_p(X_p, -).$$

Denotamos su inversa como  $(g_p^\flat)^{-1} := g_p^\sharp$ . Como esto es posible para cada  $p \in \Sigma$ , estas inversas definen una función  $C^\infty(T^*\Sigma, T\Sigma)$ , que al componerla con el apareamiento natural  $\langle \cdot, \cdot \rangle : T\Sigma \otimes T^*\Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  da un elemento de

$$C^\infty(T^*\Sigma \otimes T^*\Sigma, \mathbb{R}) \simeq \Gamma(T\Sigma \otimes T\Sigma).$$

Su expresión en coordenadas está dada a partir de la identidad  $g(g^\sharp(dx^i), g^\sharp(dx^j)) = g^{ij} = [g_{ij}]^{-1}$ , donde  $g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j)$ .



### 1.3 Mecánica cuántica

En esta sección seguimos las líneas de [2]. Supongamos  $\Sigma = [0, t] \subset \mathbb{R}$  puramente temporal, y tomemos  $M = \mathbb{R}^n$  como espacio de llegada: entonces un campo será una curva  $\gamma : [0, t] \rightarrow \mathbb{R}^n$ . El borde de  $\Sigma$  está dado por

$$\partial([0, t]) = \{t\} \cup -\{0\},$$

donde el signo  $-$  indica la orientación. Denotando  $E(\{\sigma\}) = E_\sigma$  para  $\sigma = 0, t$ , por los axiomas (Q.2) y (Q.3) tenemos

$$E(\partial\Sigma) \simeq E_t \otimes_{HS} \overline{E_0}.$$

Por el teorema de representación de Riesz, si  $V$  es un espacio de Hilbert, tenemos que  $\overline{V} \simeq V'$  el espacio dual continuo, y existe un isomorfismo entre el producto tensorial de espacios de Hilbert  $V'_1 \otimes_{HS} V_2$  y los operadores de Hilbert-Schmidt  $HS(V_1, V_2)$ . Estos son los operadores continuos  $T : V_1 \rightarrow V_2$  que satisfacen

$$\sum_{i \in I} \langle T v_i, T v_i \rangle_2 < \infty,$$

donde  $\{v_i\}_{i \in I}$  es una base de Hilbert de  $V_1$  (un conjunto ortonormal que genera un subespacio denso en  $V_1$ ), y donde  $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$  denota el producto interno en  $V_2$ . Esta definición resulta independiente de la elección de base. Entonces tenemos que

$$E(\partial\Sigma) \simeq HS(E_0, E_t). \quad (1.3)$$

Para un borde dado por un conjunto de un solo elemento  $\sigma$ , el conjunto de campos definidos sobre este borde está dado por los puntos de  $\mathbb{R}^n$ , ya que como espacio vectorial tenemos el isomorfismo

$$C_{\{\sigma\}} = \{x : \{\sigma\} \rightarrow \mathbb{R}^n\} \simeq \mathbb{R}^n.$$

Siguiendo la motivación de la sección anterior, queremos un  $E_\sigma$  como un espacio de Hilbert que contenga funciones suaves  $f : C_{\{\sigma\}} \rightarrow \mathbb{C}$ . Tomamos entonces  $E_\sigma = L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ , las funciones de cuadrado integrable con la relación de equivalencia  $f \sim g$  si  $f$  coincide con  $g$  en casi todas partes. El producto interno usual  $\langle f, g \rangle = \int \bar{f} g \, d\text{vol}_M$  le da a este espacio estructura de un espacio de Hilbert. Por lo tanto, se interpreta a la función de partición  $Z_{[0,t]}^{\text{TFT}} \in HS(E_0, E_t)$  como un operador de Hilbert-Schmidt que evoluciona una función de onda inicial  $f_0 \in E_0$  a una condición final  $f_t \in E_t$  con  $E_0 = L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) = E_t$ .

Buscaremos entonces  $Z_{[0,t]}^{\text{TFT}}$  el caso de un modelo sigma unidimensional. La formulación tradicional de la función de partición está dada por

$$Z_{[0,t]} = \int_{C_{[0,t]}(\gamma)} \exp\left[-\frac{1}{i\hbar} E(\gamma)\right] d\mu_\Sigma(\gamma) = \int_{x_0}^{x_t} \exp\left[-\frac{1}{i\hbar} \int_0^t |d\gamma|^2 d\sigma\right] d\mu_\Sigma(\gamma),$$

donde los campos  $\gamma$  son curvas de  $[0, t]$  en  $\mathbb{R}^n$ , e integramos sobre aquellos campos compatibles con las condiciones de borde, es decir, las curvas que valen  $x_0$  en 0 y  $x_t$  en  $t$ . En este caso resulta posible darle un valor a esta integral: partimos  $[0, t]$  en  $N$  intervalos iguales, e interpolamos  $\gamma$  linealmente en cada uno de ellos. El conjunto de estos caminos es biyectivo con  $(\mathbb{R}^n)^{N-1}$ , y podemos así realizar la integral para obtener un número  $J_N$ , para luego tomar el límite  $N \rightarrow \infty$ . Tomando esta definición, se llega a la expresión

$$Z_{[0,t]}(x_0, x_t) = \left(\frac{m}{2\pi i t}\right) \exp\left[\frac{mi(x_t - x_0)^2}{t}\right]$$

(ver [2], ecuación 1.12). Esta expresión la podemos tomar como el núcleo de un operador

$$\begin{aligned} Z_{[0,t]}^{\text{TFT}} : L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}) &\rightarrow L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}) \\ f_0(x) &\mapsto f_t(x) = \int_{\mathbb{R}^n} Z_{[0,t]}(x, x') f_0(x') \, dx' \end{aligned}$$

Este operador además puede escribirse como

$$Z_{[0,t]}^{\text{TFT}} = \exp\left(-\frac{it}{\hbar}H\right) \quad \text{donde } Hf = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{Z_{[0,t]}^{\text{TFT}} - \text{Id}}{t} f,$$

y satisface el axioma (Q.2) de orientación,  $Z_{[t,0]}^{\text{TFT}} = \overline{Z_{[0,t]}^{\text{TFT}}}$ . Su núcleo satisface una ley de pegado

$$Z_{[0,t]}(x_0, x_t) = \int_{\mathbb{R}^n} Z_{[0,t']}(x_0, x_{t'}) Z_{[t',t]}(x_{t'}, x_t) dx_{t'}$$

y resulta un propagador de la ecuación de Schrödinger. Estas son todas situaciones deseables; sin embargo, este operador nunca podrá ser de Hilbert-Schmidt, ya que estos solo pueden ser unitarios en dimensión finita. Esto muestra los riesgos de tomar los axiomas de manera literal, ya que tales como fueron presentados (en este caso la multiplicatividad (Q.3)) resultaron demasiado fuertes como para describir esta teoría como una teoría topológica de campos.

## 1.4 Formulación funtorial

Una realización usual de estos axiomas, que no seguiremos en detalle, es la de un functor entre la categoría  $n\text{Cob}$  de  $n$ -cobordismos y  $\text{Vect}_k$ , espacios vectoriales orientados sobre un cuerpo  $k$ . Haremos un breve resumen de la presentación de [17], ya que esta es la formulación más usual hoy en día de una teoría topológica de campos.

La categoría  $n\text{Cob}$  tiene como objetos variedades cerradas y orientadas de dimensión  $n - 1$ . Dados dos objetos  $\Sigma_{\text{in}}$  y  $\Sigma_{\text{out}}$ , una flecha entre ellos es una  $n$ -variedad orientada  $M$  cuyo borde es  $\Sigma \cup \Sigma'$ , a menos de difeomorfismos, y tal que la normal de  $\Sigma_{\text{in}}$  apunte al interior de  $M$  y la normal de  $\Sigma_{\text{out}}$  apunte al exterior, como en la Figura 1.2.

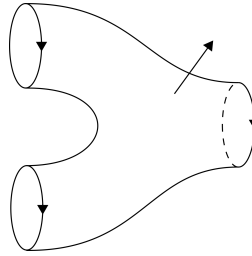


Figura 1.2: Un cobordismo entre  $S^1 \times S^1$  y  $S^1$

Más precisamente, si para un punto  $x \in \Sigma_{\text{in}}$ ,  $(v_1, \dots, v_{n-1})^t$  es una base positiva para  $T_x \Sigma$ , un vector  $w \in T_x M$  es una normal positiva si  $(v_1, \dots, v_{n-1}, w)$  es una base positiva para  $T_x M$ . Como  $M$  es una variedad con borde, una carta para  $U \subseteq M$  con  $U \cap \Sigma_{\text{in}} \neq \emptyset$  está dada por un mapa  $\phi : U \rightarrow H^n$  donde  $H^n$  es el semiespacio dado por

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \Lambda(x) \geq 0 \quad \text{donde } \Lambda : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ es un mapa lineal no nulo}\}.$$

Entonces esta normal apunta hacia el interior (respectivamente exterior) de  $M$  si para cada carta de  $M$ ,  $\varphi_* w$  apunta hacia el interior (respectivamente exterior) de  $H^n$ . Esto resulta bien definido e independiente del punto  $x$ .

Las variedades  $M$  se denominan cobordismos; el ejemplo más simple es el cilindro  $\Sigma \times I$  que vincula entre sí dos copias de  $\Sigma$ . La composición de cobordismos está definida por el pegado de las variedades en los bordes

comunes, para la cual el cilindro  $\Sigma \times I$  es la identidad. La unión disjunta de variedades y cobordismos le da estructura monoidal a la categoría. La categoría  $\text{Vect}_k$  junto al producto tensorial también es monoidal, con la identidad dada por el cuerpo  $k$ . Entonces una teoría topológica de campos asocia a cada variedad cerrada orientada  $\Pi$  de dimensión  $(n - 1)$  un espacio vectorial  $E(\Pi)$ , y a cada cobordismo orientado  $\Sigma$  de  $\Pi_0$  en  $\Pi_1$ , un mapa lineal  $Z_\Sigma$  de  $E(\Pi_0)$  en  $E(\Pi_1)$ , según los axiomas que siguen.

- (F.1) Dos cobordismos equivalentes  $\Sigma \simeq \Sigma'$  deben definir el mismo mapa  $Z_\Sigma$ .
- (F.2) El cilindro  $\Pi \times I$ , pensado como un cobordismo de  $\Pi$  en sí mismo, se envía a la identidad de  $E(\Pi)$ .
- (F.3) El pegado de dos cobordismos  $\Sigma$  y  $\Sigma'$  se envía a la composición de los mapas lineales  $Z_\Sigma$  y  $Z_{\Sigma'}$ .
- (F.4) La unión disjunta se envía a productos tensoriales. Es decir,  $\Pi \sqcup \Pi'$  se envía a  $E(\Pi) \otimes E(\Pi')$ , y  $\Sigma \sqcup \Sigma'$  se envía a  $Z_\Sigma \otimes Z_{\Sigma'}$ .
- (F.5) La variedad vacía  $\Pi = \emptyset$  se envía al cuerpo  $k$  y el cobordismo vacío (el cilindro sobre  $\emptyset$ ) al mapa identidad del cuerpo  $k$ .

Los primeros tres axiomas llevan a que una teoría topológica de campos es un funtor entre  $n\text{Cob}$  y  $\text{Vect}_k$ , y los últimos dos a que este funtor es monoidal.

## Capítulo 2

# Preliminares matemáticos para la construcción de un modelo de Wess-Zumino-Witten

Daremos una breve introducción a los objetos matemáticos requeridos para la construcción rigurosa de un modelo de Wess-Zumino-Witten para un grupo de Lie simple, conexo y simplemente conexo. No se explicarán conceptos básicos de topología y geometría diferencial; como referencia, se puede consultar [16, 22]. Como referencia para variedades complejas, ver [21, 28]. Para álgebras y grupos de Lie, se tomó material de [9, 12, 23]. Para la teoría de fibrados de línea y las extensiones centrales, se recomienda [15].

## 2.1 Preliminares geométricos

### 2.1.1 Variedades complejas

**Definición 2.1.** Sea  $(M, \{(U, z_U)\}_{U \in A})$  una variedad topológica de dimensión  $2n$  para  $n \in \mathbb{N}$ , que sea Hausdorff y satisfaga el segundo axioma de contabilidad. Esta variedad tiene una estructura **compleja holomorfa** de dimensión  $n$  si, dotando a cada carta de la estructura compleja canónica

$$i = \begin{pmatrix} 0 & -Id_d \\ Id_d & 0 \end{pmatrix},$$

los cambios de carta  $z_V \circ z_U^{-1} : z_U(U \cap V) \rightarrow z_V(U \cap V)$  resultan  $C^\infty$  y  $\mathbb{C}$ -lineales. Es decir, para cualquier  $U, V \in A$ , tenemos  $(z_V \circ z_U^{-1}) \circ i = i \circ (z_V \circ z_U^{-1})$ ,

**Observación 2.2.** La matriz  $i$  permite expresar las coordenadas como  $z_U = x_U + iy_U$  con  $x_U$  e  $y_U$  funciones a valores en  $\mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ , usando la identificación canónica  $\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$ , y entonces la variedad también tiene estructura real suave de dimensión  $2n$ . Desde este punto de vista, los cambios de coordenadas cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann, ya que para  $(x, y) \in z_U(U \cap V)$  y sus correspondientes  $(u, v) \in z_V(U \cap V)$ , las condiciones resultan

$$(-v, u) = (z_V \circ z_U^{-1})(-y, x) \quad \text{y} \quad (u, v) = (z_V \circ z_U^{-1})(x, y).$$

Esto implica que los cambios de coordenadas, vistos como difeomorfismos reales, poseen siempre determinante jacobiano positivo, lo que en particular nos dice que cualquier variedad compleja es orientable.

**Definición 2.3.** Una función holomorfa  $f : M \rightarrow N$  entre variedades complejas se define como una aplicación para la cual existen una carta  $(U, z_U)$  para cada  $p \in M$  con  $p \in U$ , y una carta  $(V, w_V)$  de  $N$  con  $f(p) \in V$ , tal que  $f(U) \subseteq V$  y tal que resulta holomorfa la aplicación

$$w_V \circ f \circ z_U^{-1} : z_U(U) \rightarrow w_V(V),$$

i.e.,  $i_N \circ Df|_p = Df|_p \circ i_M$ .

Sin embargo, no nos interesa solo estudiar funciones holomorfas, ya que estas no permiten a uno llegar muy lejos en el estudio de estructuras geométricas. La dificultad con las variedades complejas es que no existen particiones de la unidad holomorfas, por lo cual en general no hay métricas holomorfas, ni otras herramientas y estructuras típicas en geometría. Por lo tanto, buscamos estudiar funciones suaves pero retener de alguna manera la información adicional dada por la estructura compleja. Para ello, se estudia la siguiente construcción.

**Definición 2.4.** Para una variedad suave  $M$  de dimensión  $2n$ , se define una estructura **casi compleja** como un morfismo de fibrados vectoriales  $J : TM \rightarrow TM$  tal que  $J \circ J = -Id_{TM}$ .

**Observación 2.5.** No toda variedad suave tiene estructura casi compleja, pero sí cualquier variedad compleja, donde  $J$  está dado por la acción canónica de  $i$  en las bases coordenadas. Esta está bien definida, ya que, por la definición de los cambios de coordenadas, sus jacobianos conmutan con  $i$ .

*Demostración.* Esto lo mostramos para el caso  $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ ; su generalización es inmediata.

Supongamos cartas  $z_U : U \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z_U = x_U + iy_U$ ,  $z_V : V \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z_V = u_V + iv_V$ . Estos dan, para un  $T_p M$  con  $p \in U$ , las bases  $(\partial_x|_p, \partial_y|_p)$  y  $(\partial_u|_p, \partial_v|_p)$ . La motivación de la acción de  $i$  en los planos tangente y cotangente está dada por

$$i \begin{pmatrix} x_U|_p \\ y_U|_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_U|_p \\ x_U|_p \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{def.}} \begin{pmatrix} -id_x|_p = dy|_p \\ id_y|_p = dx|_p \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{def.}} \begin{pmatrix} i\partial_x|_p = \partial_y|_p \\ -i\partial_y|_p = \partial_x|_p \end{pmatrix}.$$

Entonces, usando una notación matricial para simplificar, los cambios de coordenadas actúan a través de la matriz

$$D = \left( \begin{array}{cc} \frac{\partial \text{Re}(z_V \circ z_U^{-1})}{\partial x} & \frac{\partial \text{Re}(z_V \circ z_U^{-1})}{\partial y} \\ \frac{\partial \text{Im}(z_V \circ z_U^{-1})}{\partial x} & \frac{\partial \text{Im}(z_V \circ z_U^{-1})}{\partial y} \end{array} \right) \Big|_{z_U(p)} = \left( \begin{array}{cc} \frac{\partial \text{Im}(z_V \circ z_U^{-1})}{\partial y} & -\frac{\partial \text{Im}(z_V \circ z_U^{-1})}{\partial x} \\ -\frac{\partial \text{Re}(z_V \circ z_U^{-1})}{\partial y} & \frac{\partial \text{Re}(z_V \circ z_U^{-1})}{\partial x} \end{array} \right) \Big|_{z_U(p)}.$$

y tenemos el resultado esperado:

$$i \begin{pmatrix} \partial_u|_p \\ \partial_v|_p \end{pmatrix} = iD \begin{pmatrix} \partial_x|_p \\ \partial_y|_p \end{pmatrix} = Di \begin{pmatrix} \partial_x|_p \\ \partial_y|_p \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} -\partial_y|_p \\ \partial_x|_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\partial_v|_p \\ \partial_u|_p \end{pmatrix}.$$

□

De ahora en adelante notaremos la estructura casi compleja como  $J$  exclusivamente para no confundir con una nueva  $i$  que vamos a introducir.

**Definición 2.6.** Para una variedad casi compleja  $(M, J)$ , consideramos el fibrado tangente complexificado  $TM_{\mathbb{C}} = \bigsqcup_{p \in M} T_p M \otimes \mathbb{C}$  y  $J : TM_{\mathbb{C}} \rightarrow TM_{\mathbb{C}}$  la extensión  $\mathbb{C}$ -lineal de  $J$ . Tenemos que  $J$  es diagonalizable, sus autovalores son  $\pm i$  y la dimensión de sus autoespacios coinciden. Denotamos

$$T_p^{1,0} M = \{x \in T_p M \otimes \mathbb{C} \mid Jx = ix\} \quad \text{y} \quad T_p^{0,1} M = \{x \in T_p M \otimes \mathbb{C} \mid Jx = -ix\}.$$

**Observación 2.7.**  $T^{1,0}M$  y  $T^{0,1}M$  resultan fibrados vectoriales complejos sobre  $M$ . Llamamos campos vectoriales holomorfos a las secciones holomorfas del primer fibrado, y a las del segundo, antiholomorfas. En particular, dada la carta  $z_U : U \rightarrow \mathbb{C}^n$ , donde  $z_U = x_U + iy_U$  con  $x_U, y_U : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , tomamos como base del tangente en esta carta a los campos

$$\partial_j = \frac{\partial}{\partial z_U^j} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x_U^j} - i \frac{\partial}{\partial y_U^j} \right) \quad y \quad \bar{\partial}_j = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_U^j} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x_U^j} + i \frac{\partial}{\partial y_U^j} \right) \quad (j = 1, \dots, n).$$

**Definición 2.8.** Definimos el fibrado exterior complexificado como  $\Lambda_{\mathbb{C}}M = \bigoplus_{k=0}^{2n} \Lambda^k(T_{\mathbb{C}}^*M)$  donde  $T_{\mathbb{C}}^*M = \bigsqcup_{p \in M} T_p^*M \otimes \mathbb{C}$ . Tenemos para  $\Lambda^1(T_{\mathbb{C}}^*M)$  los subfibrados

$$\Lambda^{1,0}M = \{ \xi \mid \forall v \in T^{0,1}M : \langle \xi, v \rangle = 0 \} \quad y \quad \Lambda^{0,1}M = \{ \xi \mid \forall v \in T^{1,0}M : \langle \xi, v \rangle = 0 \},$$

que son autoespacios de  $J$  con  $-i$  y  $+i$  respectivamente. Definimos los  $(p, q)$  tensores antisimétricos

$$\Lambda^{p,q}M = (\Lambda^{1,0}M)^{\otimes p} \otimes (\Lambda^{0,1}M)^{\otimes q}, \text{ entonces } \Lambda^k(T_{\mathbb{C}}^*M) = \bigoplus_{p+q=k} \Lambda^{p,q}M.$$

y denotamos como  $(p, q)$  formas  $\Omega^{p,q}M$  a las secciones suaves de  $\Lambda^{p,q}M$ .

Tomando  $z_U = x_U + iy_U$  como antes, tenemos bases locales de  $\Lambda^{1,0}M$  y  $\Lambda^{0,1}M$  dadas respectivamente por

$$dz_U^j = dx_U^j + idy_U^j \quad y \quad d\bar{z}_U^j = dx_U^j - idy_U^j \quad (j = 1, \dots, n).$$

Además, tenemos como base local de  $\Lambda^{p,q}M$  al conjunto

$$\left\{ dz_U^{j_1} \wedge \dots \wedge dz_U^{j_p} \wedge d\bar{z}_U^{k_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_U^{k_q} \right\}$$

para  $j_1 < \dots < j_p, k_1 < \dots < k_q$ . Por otro lado, la derivada exterior  $d : \Lambda^k M \rightarrow \Lambda^{k+1} M$  se puede extender  $\mathbb{C}$ -linealmente a  $\Lambda_{\mathbb{C}}M$ , y se verifica que

$$d(\Lambda^{p,q}M) \subseteq \Lambda^{p-1,q+2}M \oplus \Lambda^{p,q+1}M \oplus \Lambda^{p+1,q}M \oplus \Lambda^{p+2,q-1}M.$$

Denotamos  $\partial$  a la componente  $\Lambda^{p,q}M \rightarrow \Lambda^{p+1,q}M$  de  $d$  y  $\bar{\partial}$  a la componente  $\Lambda^{p,q}M \rightarrow \Lambda^{p,q+1}M$ .

**Teorema 2.9** (Newlander-Nirenberg). Si  $(M, J)$  es una variedad casi compleja, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1.  $(M, J)$  proviene de una estructura de variedad compleja.
2. El conmutador de campos vectoriales es cerrado en  $T^{1,0}M$  y en  $T^{0,1}M$ .
3.  $d = \partial + \bar{\partial}$ .
4.  $N^J = 0$ , donde  $N^J(X, Y) = [X, Y] + J[JX, Y] + J[X, JY] - [JX, JY]$  para todo  $X, Y \in \Gamma(TM)$ .

**Observación 2.10.** La tercera propiedad además implica que

$$\partial^2 = \bar{\partial}^2 = \{ \partial, \bar{\partial} \} = 0.$$

**Definición 2.11.** Una métrica Riemanniana  $h$  en una variedad (casi) compleja se dice **(casi) hermítica** si  $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$  tenemos

$$h(JX, JY) = h(X, Y).$$

**Observación 2.12.** Una variedad compleja siempre admite una métrica hermítica, ya que, a partir de una métrica riemanniana cualquiera, definimos

$$h(X, Y) = \frac{1}{2} [g(X, Y) + g(JX, JY)].$$

## 2.1.2 Superficies de Riemann

Recordamos que una **superficie de Riemann** es simplemente una variedad compleja de dimensión 1. Poincaré y Koebe demostraron que toda superficie de Riemann simplemente conexa es biholomorfa a la esfera de Riemann, al plano complejo, o al disco unitario abierto. Esto permite obtener todas las posibles superficies de Riemann, ya que estas últimas resultan de tomar el cociente de su cubrimiento universal por la acción libre, propia y holomorfa de un grupo discreto.

Por otro lado, por el teorema de Riemann-Hurwitz las superficies de Riemann compactas están clasificadas topológicamente por su género  $g$ . De hecho, para  $g = 0$  son biholomorfas a la esfera de Riemann, para  $g = 1$  son difeomorfas (pero no siempre biholomorfas) al cociente del plano por un reticulado, y para  $g \geq 2$  son difeomorfas al cociente del disco por un grupo discreto  $\Gamma \subseteq \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ . Por lo tanto, la variedad suave asociada a cualquier superficie de Riemann es difeomorfa a la que se obtiene "pegando manijas a una esfera" con la orientación correcta, como se ilustra en la Figura 2.1.

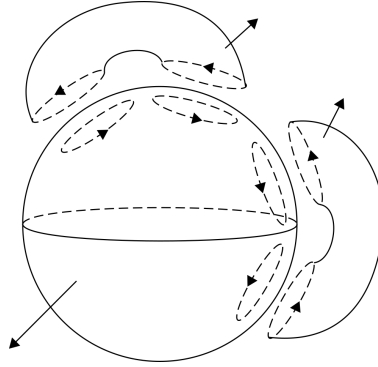


Figura 2.1: Construcción de una superficie de Riemann de género  $g = 2$ .

En la Sección 3.1 consideraremos funciones definidas sobre superficies de Riemann compactas  $\Sigma$  a valores en un grupo de Lie, y las extenderemos a alguna 3-variedad  $B$  cuyo borde es  $\partial B = \Sigma$ . Por la caracterización que dimos, construimos una 3-variedad fácilmente a partir del pegado de toros sólidos.

## 2.1.3 Fibrados de línea

Sea  $E \xrightarrow{\pi} M$  un fibrado vectorial suave con fibra típica  $F$  un espacio vectorial complejo. Se define su **rango** como  $\dim F$ . El fibrado se dice **trivial** si existen  $\dim F$  secciones globales linealmente independientes. Por otro lado, diremos que el fibrado  $F$  es un **fibrado de línea** si  $\dim F = 1$ .

**Definición 2.13.** Una **conexión** en  $E$  es un mapa  $\mathbb{C}$ -lineal entre secciones de  $E$  y de  $T_{\mathbb{C}}^*M \otimes E$ , que denotamos

$$\nabla : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(T_{\mathbb{C}}^*M \otimes_{\mathbb{C}} E),$$

tal que vale la regla de Leibniz:

$$\forall f \in C^{\infty}(M), \forall \sigma \in \Gamma(E) : \nabla(f\sigma) = df \otimes \sigma + f\nabla(\sigma).$$

Para cualquier campo vectorial complejo  $X \in \Gamma(T_{\mathbb{C}}M)$  definimos una derivada covariante  $\nabla_X : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$  como

$$(\nabla_X \sigma)(p) = (\nabla \sigma)(X|_p) \quad \forall p \in M.$$

**Definición 2.14.** Una *métrica hermítica* para el fibrado es una función  $h$  que a cada  $p \in M$  le asocia una métrica hermítica  $h_p$  en el espacio vectorial  $\pi^{-1}(\{p\}) \simeq F$ , de manera tal que  $p \mapsto h_p(\sigma|_p, \tau|_p)$  resulta suave para secciones cualesquiera  $\sigma, \tau \in \Gamma(E)$ ; denotamos esta función como  $h(\sigma, \tau) \in C^\infty(M, \mathbb{C})$ . Usando particiones de la unidad vemos que siempre existe una métrica hermítica. Una conexión es **compatible** con esta métrica si vale que

$$\forall X \in \Gamma(T_{\mathbb{C}}M) : X[h(\sigma, \tau)] = h(\nabla_X \sigma, \tau) + h(\sigma, \nabla_X \tau) \quad \forall \sigma, \tau \in \Gamma(E).$$

Sea  $L \xrightarrow{\pi} M$  un fibrado de línea hermítico dotado de una conexión compatible. En este caso, puede verse que la conexión es un mapa  $\nabla : \Gamma(E) \rightarrow \Omega^1 M \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ . Sea  $\sigma : U \rightarrow \pi^{-1}(U)$  con  $U \subseteq M$  una sección no nula de alguna trivialización local de  $L$ . Identificándola con una función  $\sigma \in C^\infty(U, \mathbb{C})$ , cualquier otra sección se escribe como  $f\sigma$  para  $f \in C^\infty(U, \mathbb{C})$ . La conexión en esta trivialización será

$$\nabla(f\sigma) = \sigma df + f\nabla\sigma := (d + 2\pi i\alpha)(f\sigma), \quad \text{donde } \alpha = \frac{1}{2\pi i} \frac{\nabla\sigma}{\sigma} \in \Omega^1(U_j, \mathbb{C}).$$

Esta  $\alpha$  es la **1-forma de conexión** de la trivialización: su núcleo define una noción de horizontalidad o de traslado paralelo a la variedad en el fibrado. Si en alguna carta tenemos  $h(\sigma, \tau) = \sigma\bar{\tau}$ , la compatibilidad con la métrica impone que  $\nabla\sigma = d\sigma$ . En general, resulta que para cualquier fibrado de línea hermítico siempre existe una conexión  $\nabla$  compatible, y que para un cubrimiento trivializante  $\{U_j\}$ , resulta que  $\bigcup_j d\alpha_j = c_1(\nabla)$  define globalmente una 2-forma real en  $M$  llamada la **primera forma de Chern de  $\nabla$** . También puede verse que la clase de cohomología de de Rham  $[c_1(\nabla)] \in H^2(M, \mathbb{R})$  no depende de la elección de conexión  $\nabla$ , que determina el fibrado de línea a menos de isomorfismos, y que además define una clase de cohomología integral, es decir, está contenido en la imagen de la inclusión

$$\iota : H^2(M, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(M, \mathbb{R}).$$

Se denota  $[c_1(\nabla)] = c_1(L)$  la primera clase de Chern. Representa una obstrucción a la trivialización global del fibrado de línea, ya que, al ser el fibrado de rango 1, coincide con la primera clase de Euler, y solo cuando esta se anula puede existir una sección global, que implicaría  $L = M \times \mathbb{C}$ . Por otro lado, para cada  $[\omega] \in H^2(M, \mathbb{Z})$  es posible construir un fibrado  $L_{[\omega]}$  tal que  $c_1(L_{[\omega]}) = [\omega]$ , y todos los fibrados de línea posibles para una variedad  $M$ , a menos de isomorfismos, están categorizados por  $H^2(M, \mathbb{Z})$ .

**Definición 2.15.** Daremos una construcción explícita del fibrado de línea  $L_{[\omega]}$  asociado a una clase de Chern  $[\omega] \in H^2(M, \mathbb{Z})$  para el caso de una variedad  $M$  simplemente conexa con un punto distinguido  $e \in M$ . Sea  $\omega \in \Omega^2(M)$  cerrada que define una clase de cohomología integral  $[\omega] \in H^2(M, \mathbb{Z})$ . Definimos el fibrado de línea como

$$L_{[\omega]}^{x_0}(M) = \{(p, u) \mid p : [0, 1] \rightarrow M_e, p(0) = x_0, u \in \mathbb{C}\} / \sim,$$

donde  $\sim$  es la relación de equivalencia dada por  $(p, u) \sim (q, v)$  si

$$p(1) = q(1) \quad \text{y} \quad v = u \exp\left(-2\pi i \int_A \omega\right),$$

con  $A$  un 2-disco orientado en  $M_e$ , cuyo borde es la composición  $q * p^{-1}$ . Definimos la composición de curvas  $r, s : [0, 1] \rightarrow M$  tales que  $r(1) = s(0)$  como

$$(r * s)(t) = \begin{cases} r(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ s(2t - 1) & \frac{1}{2} < t \leq 1, \end{cases}$$

y la inversa de una curva  $r : [0, 1] \rightarrow M$  como

$$r^{-1}(t) = r(1 - t).$$

Esta construcción nos da un fibrado de línea suave con la proyección  $[(p, u)] \mapsto p(1)$ .



**Observación 2.16.** La definición de la clase de equivalencia  $[(p, u)]$  es independiente de la elección del disco, ya que, tomando un área  $A'$  distinta, aparece un término integral que desaparece al exponenciarlo:

$$\int_{A'} \omega = \int_A \omega + \underbrace{\int_{A' \cup -A}}_{\in \mathbb{Z}} \omega.$$

Obtenemos entonces un fibrado de línea  $L_{[\omega]}^{x_0} \xrightarrow{\pi} M$  con la proyección  $\pi([p, u]) = p(1)$ , cuya primera clase de Chern es efectivamente  $[\omega]$  (ver [25] §4.5.6). La definición dada no depende de la elección del representante de  $[\omega]$ , ya que otro  $\omega'$  podrá ser escrito como  $\omega' = \omega + d\eta$  con  $\eta \in C^1(M, \mathbb{Z})$ , y tenemos que

$$\int_A \omega' = \int_A \omega + \int_A d\eta = \int_A \omega + \underbrace{\int_{\partial A}}_{\in \mathbb{Z}} \eta.$$

**Definición 2.17.** Para un fibrado de línea  $L_{[\omega]}^{x_0}$ , definimos su fibrado de línea dual  $L_{[-\omega]}^{x_0}$  con un apareamiento natural en cada fibra dado por

$$\langle [q, v]^*, [p, u] \rangle = uv., \quad (2.1)$$

para todo  $[(q, v)]^* \in L_{[-\omega]}^{x_0}$  y  $[(p, u)] \in L_{[\omega]}^{x_0}$ .

**Observación 2.18.** El fibrado  $L_{[-\omega]}^{x_0}$  está bien definido gracias a la libertad de elección de área de integración para  $\omega$ . Puede verse también que esta construcción no depende del punto  $e$  elegido.

## 2.2 Preliminares algebraicos

### 2.2.1 Álgebras de Lie

**Definición 2.19.** Un **álgebra de Lie**  $\mathfrak{g}$  sobre  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$  es un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial junto con una aplicación bilineal antisimétrica

$$[, ] : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$$

(donde el producto tensorial es sobre el cuerpo correspondiente), llamada **corchete de Lie**, que satisface la identidad de Jacobi:

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0,$$

para todo  $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ . Si no precisamos el cuerpo de base del álgebra de Lie, eso significará que trabajamos sobre  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ .

A cada elemento  $X \in \mathfrak{g}$  asociamos un endomorfismo de  $\mathfrak{g}$  dado por el mapa adjunto

$$\forall Y \in \mathfrak{g} : \text{ad}(X)Y = [X, Y].$$

Notar que por la identidad de Jacobi, este mapa es una derivación de  $\mathfrak{g}$ .

Si  $V, W \subseteq \mathfrak{g}$  son subespacios vectoriales de  $\mathfrak{g}$ , definimos  $[V, W]$  como el subespacio vectorial generado por  $\{[v, w] : v \in V, w \in W\}$ .

**Definición 2.20.** Un ideal de un álgebra de Lie es un subespacio vectorial  $I$  de  $\mathfrak{g}$  estable bajo la acción de cualquier mapa adjunto, es decir,

$$\forall X \in \mathfrak{g}, \forall Y \in I : [X, Y] \in I.$$

Se llaman ideales **triviales** a  $\mathfrak{g}$  y  $\{0\}$ . Otros ideales son:

- El **centro** de  $\mathfrak{g}$ :  $Z(\mathfrak{g}) = \{X \in \mathfrak{g} \mid \forall Y \in \mathfrak{g} : [X, Y] = 0\}$ .

- El **álgebra derivada** de  $\mathfrak{g}$  se define como  $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ . La serie central descendente de un álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  es la sucesión  $\{\mathfrak{g}^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  donde  $\mathfrak{g}^1 = \mathfrak{g}$  y  $\mathfrak{g}^{n+1} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^n]$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

**Definición 2.21.** Para dos álgebras de Lie  $\mathfrak{g}$  y  $\mathfrak{h}$  definimos el **producto directo**  $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$  como la suma directa de los espacios vectoriales, con el corchete dado por

$$[X + Y, X' + Y']_{\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}} = [X, X']_{\mathfrak{g}} + [Y, Y']_{\mathfrak{h}}.$$

Más generalmente, dado un homomorfismo de álgebras de Lie  $\varphi : \mathfrak{h} \rightarrow \text{Der } \mathfrak{g}$ , definimos el **producto semidirecto**  $\mathfrak{g} \rtimes_{\varphi} \mathfrak{h}$  como la suma directa de espacios vectoriales, con un corchete dado por

$$[(X, Y), (X', Y')]_{\mathfrak{g} \rtimes_{\varphi} \mathfrak{h}} = \left( [X, X']_{\mathfrak{g}} + \varphi|_Y(X') - \varphi|_{Y'}(X), [Y, Y']_{\mathfrak{h}} \right).$$

Si el morfismo  $\varphi$  es claro del contexto, escribiremos  $\mathfrak{g} \rtimes \mathfrak{h}$  en lugar de  $\mathfrak{g} \rtimes_{\varphi} \mathfrak{h}$ .

**Definición 2.22.** Un álgebra de Lie se dice:

- **abeliana** si el corchete es idénticamente cero,
- **simple** si sus únicos ideales son triviales y no es abeliana,
- **semisimple** si es producto directo de álgebras simples,
- **nilpotente** si existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que el  $n$ -ésimo término de la serie central descendente se anula, i.e.  $\mathfrak{g}^n = 0$ ,
- **soluble** si en su álgebra de Lie derivada es nilpotente.

**Teorema 2.23** (Descomposición de Levi). Toda álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  de dimensión finita se puede descomponer como  $\mathfrak{r} \rtimes \mathfrak{s}$  donde  $\mathfrak{r}$  es soluble y  $\mathfrak{s}$  es semisimple.

*Demostración.* Ver [12], Teorema B.2. □

**Definición 2.24.** Para un álgebra de Lie de dimensión finita, definimos la **forma de Killing** como la siguiente forma bilineal simétrica:

$$\forall X, Y \in \mathfrak{g} : \kappa(X, Y) = \text{traza}(ad_X \circ ad_Y).$$

Es una forma **invariante**, i.e.

$$\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g} : \kappa(X, [Y, Z]) = \kappa([X, Y], Z). \quad (2.2)$$

**Hecho 2.25.** Para toda álgebra de Lie simple compleja, cualquier forma bilineal simétrica invariante es proporcional a la forma de Killing.

**Hecho 2.26** (Criterio de Cartan). Un álgebra de Lie es semisimple si y solo si su forma de Killing es no degenerada. En consecuencia, un álgebra de Lie real  $\mathfrak{g}$  es semisimple si y solo si su complexificación  $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$  es semisimple.

Como referencia de lo anterior, ver [12].

**Observación 2.27.** El teorema de Ado nos dice que para toda álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  de dimensión finita existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $\mathfrak{g}$  es isomorfa a una subálgebra de Lie del álgebra de Lie matricial  $\mathfrak{gl}(n)$  dada por  $M_n(\mathbb{k})$  con el conmutador usual. En consecuencia, para cualquier álgebra de Lie matricial simple  $\mathfrak{g}$ , su forma de Killing resulta proporcional a la forma bilineal simétrica invariante  $\text{Tr}(XY)$ , para  $X, Y \in \mathfrak{g}$ . La siguiente tabla enumera explícitamente las formas de Killing para algunas álgebras de Lie (ver [7]):

$\mathfrak{g}$ sobre $k = \mathbb{R}, \mathbb{C}$	$\kappa(X, Y)$ para $X, Y \in \mathfrak{g}$
$\mathfrak{gl}(n, k)$	$2n\text{Tr}(XY) - 2\text{Tr}(X)\text{Tr}(Y)$
$\mathfrak{sl}(n, k)$	$2n\text{Tr}(XY)$
$\mathfrak{u}(n)$	
$\mathfrak{so}(2n+1, k)$	$(2n-1)\text{Tr}(XY)$
$\mathfrak{so}(2n, k)$	$(2n-2)\text{Tr}(XY)$
$\mathfrak{sp}(n, k)$	$(2n+2)\text{Tr}(XY)$

**Definición 2.28.** La **complexificación**  $(\mathfrak{g}_0)^\mathbb{C}$  de un álgebra de Lie real  $\mathfrak{g}_0$  está dada por el espacio vectorial complejo  $\mathfrak{g}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$  junto con el corchete dado por

$$\forall X, Y \in \mathfrak{g}_0, \forall u, v \in \mathbb{C} : [X \otimes u, Y \otimes v] = [X, Y] \otimes uv.$$

Dada un álgebra de Lie compleja  $\mathfrak{g}$ , una **forma real** de  $\mathfrak{g}$  es un álgebra de Lie real tal que  $\mathfrak{g} = (\mathfrak{g}_0)^\mathbb{C}$ .

Cualquier álgebra de Lie compleja puede ser vista como un álgebra real con el doble de la dimensión. A su vez, si  $\mathfrak{g}$  es un álgebra de Lie compleja,  $\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \neq \mathfrak{g}$ , ya que el resultado de la complexificación es un álgebra con el doble de dimensión compleja que la inicial.

**Definición 2.29.** Un álgebra de Lie real  $\mathfrak{u}$  se dice **compacta** si posee una forma bilineal simétrica invariante definida negativa. De forma equivalente, un álgebra de Lie real  $\mathfrak{u}$  es compacta si es el álgebra de Lie de un grupo de Lie real  $U$  compacto (ver Sección 2.2.2).

Notar que, dada un álgebra de Lie real semisimple, entonces es compacta si y solo si su forma de Killing es definida negativa.

**Definición 2.30.** Dada un álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ , una **subálgebra de Cartan** de  $\mathfrak{g}$  es una subálgebra  $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$  tal que  $\mathfrak{h}$  es nilpotente y

$$\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} : [X, Y] \in \mathfrak{h} \text{ para todo } Y \in \mathfrak{h}\}.$$

Recordamos el hecho que, dada un álgebra de Lie compacta  $\mathfrak{u}$ , una subálgebra  $\mathfrak{t} \subseteq \mathfrak{u}$  es de Cartan si y solo si es una subálgebra abeliana maximal. Lo mismo vale para un álgebra de Lie compleja.

En lo que sigue también consideraremos formas diferenciales en alguna variedad  $\Sigma$  a valores en un espacio vectorial; en particular, a valores en un álgebra de Lie. Notando con  $\Gamma$  el conjunto de secciones suaves, definimos

$$\Omega^k(\Sigma, \mathfrak{g}) := \Gamma \left[ \bigwedge^k T^*\Sigma \otimes (\Sigma \times \mathfrak{g}) \right] \quad \text{y} \quad \Omega(\Sigma, \mathfrak{g}) = \bigoplus_{n=0}^{\dim \Sigma} \Omega^n(\Sigma, \mathfrak{g}).$$

**Definición 2.31.** Sea  $\Sigma$  una variedad,  $\kappa : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  una forma bilineal simétrica sobre un espacio vectorial  $V$ , y  $\Omega(\Sigma, V)$  el espacio de formas diferenciales a valores en  $V$ . Definimos el **producto wedge** (correspondiente a la forma bilineal  $\kappa$ )

$$\wedge_\kappa : \Omega(\Sigma, V) \times \Omega(\Sigma, V) \rightarrow \Omega(\Sigma)$$

a partir de la fórmula

$$(X \otimes \eta) \wedge_\kappa (Y \otimes \theta) = \kappa(X, Y) \eta \wedge \theta$$

extendida linealmente.

**Definición 2.32.** Podemos considerar el caso del corchete de Lie de  $\mathfrak{g}$  de manera análoga a la definición anterior. Más precisamente, sea  $\Sigma$  una variedad,  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie,  $\Omega(\Sigma, \mathfrak{g})$  las formas diferenciales a valores en  $\mathfrak{g}$ . Definimos el **producto wedge** de Lie entre estas formas,

$$\wedge_L : \Omega(\Sigma, \mathfrak{g}) \times \Omega(\Sigma, \mathfrak{g}) \rightarrow \Omega(\Sigma, \mathfrak{g})$$

a partir de la fórmula

$$(X \otimes \eta) \wedge_L (Y \otimes \theta) := [X, Y] \otimes \eta \wedge \theta \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}, \forall \eta, \theta \in \Omega(\Sigma)$$

extendida linealmente.

**Observación 2.33.** Para 1-formas a valores en  $\mathfrak{g}$ , el producto wedge asociado a  $\kappa$  es anticonmutativo, mientras que el producto wedge de Lie es conmutativo. En general, para  $\eta$  una  $p$ -forma y  $\theta$  una  $q$ -forma, ambas a valores en  $\mathfrak{g}$ , tenemos

$$\eta \wedge_\kappa \theta = (-1)^{pq} \theta \wedge_\kappa \eta \quad y \quad \eta \wedge_L \theta = -(-1)^{pq} \theta \wedge_L \eta$$

**Observación 2.34.** Para 1-formas  $\eta, \theta, \rho$  a valores en  $\mathfrak{g}$ , y  $\kappa$  una forma bilineal simétrica invariante según la ecuación (2.2), es cíclico el triple producto

$$\eta \wedge_\kappa [\theta \wedge_L \rho]. \quad (2.3)$$

**Observación 2.35.** En dimensión finita, podemos expresar las formas a valores en  $\mathfrak{g}$  como matrices cuyas entradas son formas diferenciales. Estas matrices podemos multiplicarlas entre sí, tomando el producto wedge de sus entradas. Si  $\eta$  es una  $p$ -forma y  $\theta$  una  $q$ -forma, ambas a valores en  $\mathfrak{g}$ , denotamos este producto simplemente como  $\eta \wedge \theta$ , y entonces tenemos que

$$\eta \wedge_L \theta = \eta \wedge \theta - (-1)^{pq} \theta \wedge \eta.$$

Para un álgebra de Lie de dimensión finita, sea  $\kappa(X, Y) = \text{Tr}(XY)$  con  $X, Y \in \mathfrak{g}$ . Entonces el triple producto de 1-formas (2.3) está dado por

$$\eta \wedge_\kappa [\theta \wedge_L \rho] = 2 \text{Tr}(\eta \wedge \theta \wedge \rho).$$

## 2.2.2 Grupos de Lie

En esta sección, describimos brevemente los grupos de Lie en dimensión no necesariamente finita, tomando como referencia [23].

**Definición 2.36.** Un **grupo de Lie**  $G$  real o complejo es una variedad modelada respectivamente sobre un  $\mathbb{R}$ - o  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial localmente convexo, dotada de una estructura de grupo tal que los mapas de multiplicación e inversión son suaves. Notamos el elemento neutro como  $e$ , y denotamos respectivamente multiplicación e inversión como

$$m : G \times G \rightarrow G \quad y \quad n : G \rightarrow G.$$

**Definición 2.37.** Cada elemento  $g \in G$  define un difeomorfismo  $m(g, -) : G \rightarrow G$  llamado **traslación a izquierda**, que también llamaremos  $g$ . Denotamos  $\mathcal{L}(G)$  al espacio de los campos vectoriales  $X \in \Gamma(TG)$  **invariantes a izquierda**, es decir, aquellos que satisfacen  $g_* X = X$ . A estos campos se les puede dar estructura de un álgebra de Lie de dimensión  $\dim G$  con el corchete

$$\forall X, Y \in \mathcal{L}(G) : [X, Y] = X \circ Y - Y \circ X.$$

Denotaremos a  $\mathcal{L}(G)$  con esta estructura como  $\text{Lie}(G)$  o bien  $\mathfrak{g}$ .

Dado un grupo de Lie conexo  $G$ , diremos que  $G$  es **abeliano** (respectivamente, **simple**, **semisimple**, **nilpotente**, **soluble**) si su álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  lo es.

**Definición 2.38.** Para el fibrado tangente  $TG$ , notamos los elementos de  $T_gG$  con un subíndice del estilo  $X_g$ . En particular, el elemento nulo de este espacio vectorial lo notamos como  $0_g \in T_gG$ . Definimos los mapas de multiplicación e inversión, respectivamente

$$Tm : TG \times TG \rightarrow TG \quad y \quad Tn : TG \rightarrow TG,$$

para los cuales el elemento  $0_e \in \mathfrak{g}$  es el elemento neutro. Identificamos  $g$  con  $0_g$ , y definimos una acción a izquierda y derecha del grupo  $G$  sobre  $TG$  a partir de

$$\underbrace{g \cdot X_h := Tm(0_g, X_h)}_{\in T_{gh}G} \quad y \quad \underbrace{X_h \cdot g := Tm(X_h, 0_g)}_{\in T_{hg}G} \quad \forall g \in G, \forall X_h \in T_hG.$$

**Proposición 2.39.** La multiplicación e inversión de la Definición 2.38 dan al fibrado tangente  $TG$  una estructura de grupo de Lie. La proyección canónica  $\pi : TG \rightarrow G$  es un morfismo de grupos de Lie de núcleo  $T_eG = \mathfrak{g}$ . La sección nula  $\sigma : G \rightarrow TG$  que envía  $g$  en  $0_g \in T_gG$  también es un morfismo de grupos de Lie, y satisface  $\pi \circ \sigma = id_G$ .

**Proposición 2.40.** El mapa  $\Phi : G \times T_eG \rightarrow TG, (g, X) \mapsto g \cdot X$  es un difeomorfismo, y cualquier elemento de  $TG$  puede escribirse como  $g \cdot X$  para algún par  $(g, X) \in G \times T_eG$ . La multiplicación en  $TG$  se puede expresar como

$$Tm(g \cdot X, h \cdot Y) = (g \cdot X) \cdot h + gh \cdot Y \quad \forall X, Y \in T_eG, \forall g, h \in G.$$

Demostración de las Proposiciones 2.39 y 2.40. Ver Lema 3.4 en [23]. □

En el caso de grupos matriciales, el producto  $g \cdot X$  se calcula con la multiplicación matricial usual.

**Definición 2.41.** Llamamos **forma de Maurer-Cartan** (a izquierda) al mapa

$$\begin{aligned} \mu : T_gG &\rightarrow T_eG \\ g \cdot X &\mapsto X. \end{aligned}$$

Es decir, es el pushforward  $(L_{g^{-1}})_*$  para la traslación a izquierda por  $g^{-1}$ .

Alternativamente, podemos escribir  $X_g \mapsto g^{-1} \cdot X_g$ . Esta forma permite identificar de manera canónica los planos tangentes con el tangente a la identidad. Llamando  $g : G \rightarrow G$  a la aplicación identidad dada por  $g \mapsto g$ , se tiene la expresión usual  $\mu = g^{-1} \cdot dg$ . En lo que sigue omitiremos la frase “a izquierda”, pero notamos que análogamente se puede definir una forma de Maurer-Cartan “a derecha” multiplicando a derecha por  $g^{-1}$ .

Si  $X$  es un campo invariante a izquierda,  $\mu(X)$  es constante en  $G$ . Si  $Y$  es un segundo campo invariante a izquierda, entonces

$$\mu([X, Y]) = [\mu(X), \mu(Y)],$$

y con esto definimos un corchete en  $T_eG$ , con el cual resulta isomorfo a  $\mathfrak{g}$  como álgebra de Lie. De ahora en más, cuando el grupo  $G$  está dado, no distinguiremos entre  $T_eG$  y  $\mathfrak{g}$ . El teorema de Lie establece que toda álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  de dimensión finita existe un grupo de Lie  $G$  tal que  $\mathfrak{g} \simeq \text{Lie}(G)$ ; en dimensión infinita, esto puede fallar. Pueden consultarse las referencias [9, 12] para una exposición de la teoría.

**Observación 2.42.** Si el grupo de Lie tiene además estructura de variedad compleja (ver Sección 2.1.1), entonces la forma de Maurer-Cartan se puede descomponer en una componente holomorfa y una antiholomorfa vía

$$\mu = g^{-1}dg = g^{-1}\partial g + g^{-1}\bar{\partial}g.$$

**Observación 2.43.** Para  $X, Y$  campos vectoriales arbitrarios en un grupo de Lie  $G$  tenemos

$$d\mu(X, Y) = X(\mu(Y)) - Y(\mu(X)) - \mu([X, Y]),$$

donde  $[X, Y]$  es el conmutador usual. Si  $X, Y$  son invariantes a izquierda,

$$X(\mu(Y)) = Y(\mu(X)) = 0,$$

por lo que  $d\mu(X, Y) + [\mu(X), \mu(Y)] = 0$ . Los campos invariantes a izquierda generan el espacio tangente en cada punto, por lo que esto igualmente vale para cualquier par de campos  $X, Y$ . En particular, tenemos la ecuación de Maurer-Cartan:

$$d\mu + \frac{1}{2}\mu \wedge_L \mu = 0. \quad (2.4)$$

Ver [23], §4.1.2, para una exposición más detallada.

### 2.2.3 Grupo de lazos

**Definición 2.44.** Sea  $G$  un grupo de Lie de dimensión finita simple, y sea  $\mathfrak{g}$  su álgebra de Lie. Definimos el **grupo de lazos** (loop group en inglés) como

$$LG = \{\gamma : S^1 \rightarrow G \text{ suave}\},$$

con el producto e inversa definidos punto a punto y la identidad dada por la curva constante  $e$ .

Damos a  $LG$  la estructura de un grupo de Lie de dimensión infinita de la siguiente manera. Sea  $V$  un conjunto abierto de  $\mathfrak{g}$ . Consideremos  $\mathcal{V} = C^\infty(S^1, V)$  un subconjunto abierto de  $C^\infty(S^1, \mathfrak{g})$  para la topología de convergencia uniforme de las funciones y sus derivadas parciales de todo orden. Esta topología es tal que, para una secuencia  $\xi_k \rightarrow \xi$  en  $C^\infty(S^1, \mathfrak{g})$ , la secuencia  $\frac{d^n \xi_k}{d\theta^n}$  converge uniformemente a  $\frac{d^n \xi}{d\theta^n}$ , y da lugar a un espacio de Fréchet separable.

Usando el mapa exponencial, podemos elegir  $V$  difeomorfo a un entorno  $U$  de la identidad de  $G$ . Definimos la topología de  $LG$  prescribiendo  $\mathcal{U} = C^\infty(S^1, U)$  abierto y homeomorfo a  $\mathcal{V}$ , y, si  $\gamma$  es cualquier elemento de  $C^\infty(S^1, G)$ , entonces  $\mathcal{U}_\gamma = \mathcal{U} \cdot \gamma$  es un entorno abierto de  $\gamma$  también homeomorfo a  $V$ . Los conjuntos  $\mathcal{U}_\gamma$  forman un atlas que hace de  $C^\infty(S^1, G)$  una variedad suave.

Su álgebra de Lie asociada está dada por

$$L\mathfrak{g} = \{\xi : S^1 \rightarrow \mathfrak{g} \text{ suave}\}$$

con el corchete punto a punto. Se la denota el **álgebra de Lie de lazos** (loop algebra en inglés). Un elemento de  $T_\gamma LG$  entonces lo podemos escribir como  $\gamma\xi$  para algún  $\xi \in L\mathfrak{g}$ .

**Observación 2.45.** Consideramos el subgrupo normal  $\Omega G$  dado por el núcleo de la evaluación  $\gamma \mapsto \gamma(1)$ , y embebemos  $G$  como el subgrupo de curvas constantes. A partir de esto obtenemos que

$$LG = \Omega G \rtimes G,$$

y de esto concluimos que  $LG$  es simplemente conexo si  $G$  lo es. Esto se debe a que

$$\pi_1(LG) \simeq \pi_1(G) \oplus \pi_1(\Omega G) \simeq \pi_1(G) \oplus \pi_2(G),$$

y al isomorfismo  $\pi_2(G) = 0$  para cualquier grupo de Lie  $G$  (ver [25] §8.6).

## 2.2.4 Extensiones centrales

Para un grupo de Lie  $H$ , un **fibrado  $H$ -principal** es un fibrado  $\tilde{G} \xrightarrow{\pi} G$  junto con una acción a derecha suave de  $H$  en  $\tilde{G}$  que preserva las fibras de  $\tilde{G}$  y actúa de manera libre y transitiva, y tal que para  $g \in G$ ,  $\tilde{g} \in \pi^{-1}(g)$ , el mapa  $h \mapsto \tilde{g}h$  es un difeomorfismo entre  $H$  y  $\pi^{-1}(g)$ .

**Definición 2.46.** Sea  $G$  un grupo de Lie,  $H$  un grupo de Lie abeliano, y respectivamente  $\mathfrak{g}$  y  $\mathfrak{h}$  sus álgebras de Lie. Decimos que  $\tilde{G}$  es una **extensión central** de  $G$  por  $H$  si existe una secuencia exacta de grupos de Lie

$$1 \rightarrow H \rightarrow \tilde{G} \rightarrow G \rightarrow 1$$

tal que la imagen de  $H$  yace en el centro de  $\tilde{G}$ .

**Observación 2.47.** Esto le da a  $\tilde{G} \rightarrow G$  estructura de un  $H$ -fibrado principal, que será topológicamente  $G \times H$  si admite una sección global.

Una extensión central de un grupo de Lie siempre define una cierta extensión central para su álgebra de Lie

$$0 \rightarrow \mathfrak{h} \rightarrow \tilde{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathfrak{g} \rightarrow 0,$$

donde  $\text{Lie}(\tilde{G}) = \tilde{\mathfrak{g}}$ . De manera más concreta, tenemos el isomorfismo de espacios vectoriales  $\tilde{\mathfrak{g}} \simeq \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$ . El isomorfismo anterior es de álgebras de Lie si le damos estructura de álgebra de Lie a  $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$  a través de un mapa bilineal continuo  $\omega : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$  que cumpla lo denominado identidad de 2-cociclo

$$\omega([X, Y], Z) + \omega([Y, Z], X) + \omega([Z, X], Y) = 0,$$

definiendo

$$[(X, u), (Y, v)] = ([X, Y], \omega(X, Y)).$$

La centralidad de la extensión se refleja en el hecho que el cociclo no depende de  $u$  ni de  $v$ , por lo que  $\mathfrak{h} \in Z(\tilde{G})$  en el sentido de que  $[(0, u), (0, v)] = 0$ .

Notamos que, dada una extensión central de un álgebra de Lie, no está garantizada la existencia de una extensión central de grupos que la induzca.

**Observación 2.48.** Decimos que una aplicación bilineal  $\omega : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$  es un **2-coborde** si existe un mapa lineal  $\alpha : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$  tal que para todo  $X, Y \in \mathfrak{g}$  vale  $\omega(X, Y) = \alpha([X, Y])$ . En este caso, la extensión central asociada a  $\omega$  es isomorfa a la extensión trivial, dada por el cociclo nulo, tomando

$$(X, u) \mapsto (X, u - \alpha(X)).$$

Por lo tanto, a menos de isomorfismos las extensiones centrales de álgebras de Lie están clasificadas por 2-cociclos a menos de 2-cobordes, que se pueden entender como elementos del segundo grupo de cohomología de Chevalley–Eilenberg  $H^2(\mathfrak{g}; \mathfrak{h})$  para la cohomología de álgebra de Lie de  $\mathfrak{g}$  a valores en  $\mathfrak{h}$ , que notamos  $H^\bullet(\mathfrak{g}; \mathfrak{h})$ .

**Observación 2.49.** Para cualquier álgebra de Lie finita semisimple sobre un cuerpo de característica cero, se tiene  $H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = 0$  (segundo lema de Whitehead; ver [27] §7.8.12), por lo que la extensión mencionada en la observación anterior siempre será trivial.

En la construcción del modelo de Wess-Zumino-Witten, consideraremos el grupo  $LG$  de curvas cerradas sobre un grupo compacto simple simplemente conexo  $G$ . Las extensiones centrales de su álgebra de Lie  $L\mathfrak{g}$  (de dimensión infinita) por  $\mathbb{C}^*$  darán lugar a extensiones centrales del grupo solo si satisfacen una condición de integrabilidad.

## 2.2.5 Sistemas de raíces de un álgebra de Lie simple compleja

Para una referencia concisa, pero muy clara, recomendamos [3]. Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie de dimensión finita simple sobre  $\mathbb{C}$ . Remarcamos que en este caso una subálgebra  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  es de Cartan si y solo si es una subálgebra abeliana maximal tal que para cada  $X \in \mathfrak{h}$ , resulta diagonalizable el endomorfismo adjunto

$$\begin{aligned} \text{ad}_X : \mathfrak{g} &\rightarrow \mathfrak{g} \\ Y &\mapsto [X, Y]. \end{aligned}$$

Como los elementos de  $\mathfrak{h}$  conmutan, sus acciones adjuntas son simultáneamente diagonalizables. Si bien comparten autoespacios, cada  $X \in \mathfrak{h}$  puede poseer un autovalor distinto; pero para un subespacio dado, la asignación  $X \mapsto \alpha_X \in \mathbb{C}$  resulta lineal. Entonces cada autoespacio  $\tilde{\mathfrak{g}}$  está caracterizado por un cierto  $\alpha \in \mathfrak{h}^*$  tal que

$$\forall X \in \mathfrak{h}, Y \in \tilde{\mathfrak{g}} : \text{ad}_X(Y) = \underbrace{\alpha(X)}_{\in \mathbb{C}} \cdot Y.$$

Denotamos como raíces al conjunto (finito) de funcionales lineales que nos permiten obtener los autovalores, y que por lo tanto clasifican los autoespacios de las acciones adjuntas de  $\mathfrak{h}$ .

**Definición 2.50.** Una **raíz** (de  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ ) es un elemento no nulo de  $\mathfrak{h}^*$  para el cual existe  $Y \in \mathfrak{g}$  no nulo tal que

$$\forall X \in \mathfrak{h} : \text{ad}_X(Y) = \alpha(X) \cdot Y.$$

El conjunto de todas las raíces se denota  $R$ . Cada  $Y$  que satisface la identidad anterior se lo denomina **vector raíz**, y el conjunto de todos los  $Y$  correspondientes a un cierto  $\alpha$  es un subespacio  $\mathfrak{g}_\alpha$  denominado **espacio raíz**.

**Hecho 2.51.** El álgebra de Lie simple compleja  $\mathfrak{g}$  puede ser descompuesta como una suma de espacios vectoriales

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R} \mathfrak{g}_\alpha$$

y valen las siguientes afirmaciones:

1. todas las subálgebras de Cartan  $\mathfrak{h}$  son isomorfas entre sí. Denominamos el **rango** de  $\mathfrak{g}$  como  $\text{rank } \mathfrak{g} = \dim \mathfrak{h}$ ,
2.  $\mathfrak{h}^*$  es generado por  $R$ ,
3. para  $\lambda \in \mathbb{C}$ , si  $\alpha \in R$ , entonces  $\lambda \cdot \alpha \in R$  si y solo si  $\lambda = -1$ ,
4.  $\forall \alpha \in R : \dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$ ,
5.  $\forall \alpha, \beta \in R : [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subseteq \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ ,
6. para cada  $\alpha$ , podemos encontrar  $H_\alpha \in \mathfrak{h}$ ,  $e_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ ,  $e_{-\alpha} \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$  tal que generan una subálgebra isomorfa a  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ , es decir, tal que satisfacen

$$[H_\alpha, e_\alpha] = 2e_\alpha, \quad [H_\alpha, e_{-\alpha}] = -2e_{-\alpha}, \quad [e_\alpha, e_{-\alpha}] = H_\alpha,$$

7. existe un subconjunto de **raíces simples**  $\Delta := \{\alpha_j\}_{j=1, \dots, r} \subseteq R$  tal que todo  $\alpha \in R$  puede escribirse como una combinación lineal  $\pm \sum_{j=1}^r n_j \alpha_j$ , donde  $n_j \in \mathbb{N}_0$  para cada  $j$ .

*Demostración.* Ver [9], capítulos 7 y 8. □



En terminología física, la subálgebra de Cartan corresponde a combinaciones de “operadores de isospín” asociados al grupo, y los subespacios  $\mathfrak{g}_{\pm\alpha}$  a “operadores escalera” de subida y bajada. Por ejemplo, para  $SL(3, \mathbb{C}) = SU(3) \otimes \mathbb{C}$ , de rango 2, y en el contexto de la ya abandonada simetría de sabor, se toma una base de su subálgebra de Cartan dada por el isospín  $ud$ ,  $I_3 = \text{diag}(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0)$  y la hipercarga  $Y = \text{diag}(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{4}{3})$ . Los operadores de isospín para  $us$  y  $sd$  se obtienen como  $\frac{3}{2}Y \pm I_3$  respectivamente.

**Observación 2.52.** Dada una elección de raíces simples, definimos como raíces positivas o negativas  $R^\pm$  a sus combinaciones lineales con coeficientes enteros todos positivos o todos negativos. Esto da una polarización o descomposición triangular de  $\mathfrak{g}$  como

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^+ \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^-$$

donde  $\mathfrak{h}$  es una subálgebra de Cartan y  $\mathfrak{n}^\pm = \bigoplus_{\alpha \in R^\pm} \mathfrak{g}_\alpha$  son subálgebras nilpotentes maximales de  $\mathfrak{g}$  (por la propiedad 5 del Hecho 2.51).

**Definición 2.53.** Decimos que una raíz  $\beta$  es **más alta** que una raíz  $\alpha$  si  $\beta - \alpha$  puede ser expresado como

$$\sum_{j=1}^r c_j \alpha_j \quad \text{donde } c_j > 0, \alpha_j \in \Delta \quad \forall j,$$

que notaremos  $\alpha \preceq \beta$  o  $\beta \succeq \alpha$ . También decimos que  $\alpha$  es **más baja** que  $\beta$ . Notamos a  $\theta$  como la **raíz maximal** según este orden parcial.

Mediante la forma de Killing  $\kappa$ , no degenerada por el criterio de Cartan (Hecho 2.26), identificamos  $\mathfrak{h}$  con  $\mathfrak{h}^*$ , y a cada raíz  $\alpha$  asociamos un elemento  $H_\alpha$  de  $\mathfrak{h}$  de manera tal que

$$\forall H \in \mathfrak{h} : \alpha(H) = \kappa(H_\alpha, H).$$

Notaremos directamente  $\kappa(H_1, H_2) = \langle H_1, H_2 \rangle$  para todo  $H_1, H_2 \in \mathfrak{h}$ . Definimos un producto escalar en  $\mathfrak{h}^*$  como  $\langle \alpha, \beta \rangle = \langle H_\alpha, H_\beta \rangle$ . Llamamos **coraíz** al elemento  $\alpha^\vee = \frac{2H_\alpha}{\langle \alpha, \alpha \rangle}$ , y  $R^\vee$  al conjunto de coraíces.

**Definición 2.54.** Para cada raíz  $\alpha \in R$ , definimos la transformación lineal  $s_\alpha : \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}$  mediante la expresión

$$s_\alpha : H \mapsto H - 2 \frac{\langle H_\alpha, H \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} H_\alpha.$$

El **grupo de Weyl** de  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ , denotado  $W$ , es el subgrupo de  $GL(\mathfrak{h})$  generado por todos los  $s_\alpha$ .

**Observación 2.55.**  $W$  preserva  $R$ , por lo que resulta grupo finito, y un subgrupo del grupo de permutaciones sobre las raíces.

*Demostración.* Ver [9], Teorema 7.26. □

## 2.2.6 Correspondencia entre grupos de Lie compactos y complejos

Por el teorema de Peter-Weyl, todo grupo compacto es lineal; por otro lado, el grupo lineal complejo no tiene subgrupos complejos compactos. Entonces al hablar de grupos de Lie compactos, basta con considerar los reales. Sin embargo, el caso complejo igual resulta muy útil, ya que la teoría de representaciones de grupos de Lie complejos semisimples está íntimamente relacionada con aquella de grupos de Lie compactos semisimples, y las herramientas que brinda este vínculo son muy útiles para estudiar los modelos de Wess-Zumino-Witten.

**Definición 2.56.** Dada un álgebra de Lie compleja  $\mathfrak{g}$ , una **forma compacta** es una forma real  $\mathfrak{u}$  que es compacta.

Las subálgebras de Cartan de estas formas compactas juegan un rol importante en la teoría de representaciones que estudiaremos. Como consecuencia de la identificación entre  $\mathfrak{h}$  y  $\mathfrak{h}^*$  de la ecuación (2.2.5),  $\mathfrak{h}$  es generada por las coraíces  $R^\vee$  como espacio vectorial complejo. Consideramos  $\tilde{\mathfrak{h}}$  el espacio vectorial generado por combinaciones lineales reales de  $R^\vee$ .

**Hecho 2.57.** *Valen las siguientes afirmaciones:*

1. *toda álgebra de Lie semisimple compleja  $\mathfrak{g}$  con subálgebra de Cartan  $\mathfrak{h}$  admite una forma compacta  $\mathfrak{u}$  tal que  $\mathfrak{t} = i\tilde{\mathfrak{h}}$  es una subálgebra de Cartan de  $\mathfrak{u}$ ,*
2. *como  $\mathfrak{g} = \mathfrak{u}^\mathbb{C}$  es semisimple,  $\mathfrak{u}$  también lo es, por lo que su forma de Killing es definida negativa,*
3. *a partir de un teorema de Weyl, todo grupo de Lie real conexo y semisimple  $U$  cuya álgebra de Lie es  $\mathfrak{u}$  es compacto.*

*Demostración.* Ver [7], lección 26. □

En consecuencia, en el caso de un álgebra de Lie compleja semisimple  $\mathfrak{g}$ , podemos elegir una forma compacta  $\mathfrak{u}$  y una subálgebra de Cartan  $\mathfrak{t}$  de  $\mathfrak{u}$  tal que  $\mathfrak{h} = \mathfrak{t}^\mathbb{C}$  es una subálgebra de Cartan de  $\mathfrak{g}$ . Si  $G$  es un grupo de Lie complejo, semisimple, conexo y con álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ , entonces posee un subgrupo de Lie real compacto maximal  $U \subseteq G$  cuya álgebra de Lie  $\mathfrak{u}$  es una forma compacta de  $\mathfrak{g}$ . Recordamos de la Sección 2.2.1 que la subálgebra de Cartan  $\mathfrak{t}$  es abeliana maximal. Entonces por el hecho que sigue, la exponenciación de la subálgebra de Cartan  $\mathfrak{t}$  da lugar a un toro maximal  $T$  de  $U$ .

**Hecho 2.58.** *Todo grupo de Lie compacto y abeliano es isomorfo a un toro, es decir, a un producto de  $n$  copias de  $S^1$ . Para el caso de un grupo compacto  $U$  con subálgebra de Cartan  $\mathfrak{t}$ , el toro  $\exp\{\mathfrak{t}\}$  es aquel con  $n = \dim \mathfrak{t}$ .*

Vale además la vuelta: dado un grupo de Lie real, compacto, conexo y semisimple, podemos complexificarlo para obtener un grupo de Lie complejo, en el sentido de la definición que sigue.

**Definición 2.59.** *Dado un grupo de Lie compacto  $U$  de álgebra de Lie  $\mathfrak{u}$ , su complexificación es un grupo de Lie complejo  $G$  tal que  $U$  es un subgrupo compacto maximal, y tal que  $\mathfrak{g} = \mathfrak{u}^\mathbb{C}$ .*

**Hecho 2.60.** *Vale lo siguiente:*

- *$GL(n, \mathbb{C})$  es una complexificación de  $U_n \subseteq GL(n, \mathbb{R})$ ,*
- *Como todo grupo de Lie compacto  $U$  es isomorfo a un subgrupo cerrado de  $U_n \subseteq GL(n, \mathbb{R})$  para algún  $n \in \mathbb{N}$  (teorema de Peter-Weyl), una complexificación  $G$  de  $U$  puede ser realizada como un subgrupo cerrado de  $GL(n, \mathbb{C})$ . Más aún, la correspondencia entre grupos compactos simples (conexos y simplemente conexos) y grupos complejos semisimples (conexos y simplemente conexos) es biunívoca,*
- *$\mathfrak{u}$  es una forma real compacta de  $\mathfrak{g}$ . Para  $(\mathfrak{g})^\mathbb{R} = \mathfrak{u} \oplus i\mathfrak{u}$ , la operación de conjugación respecto a  $\mathfrak{u}$  se levanta a un automorfismo  $C : G \rightarrow G$  tal que  $C(U) = U$  como subgrupo de  $G$ .*

*Demostración.* Ver capítulos 6 y 7 de [12]. □

**Definición 2.61.** *Definimos la conjugación en la complexificación  $G$  de  $U$  como  $*$  =  $n \circ C$  donde  $n$  es la operación de inversión en  $G$ .*

**Observación 2.62.** *Esta operación es una involución, y satisface  $(gh)^* = h^*g^*$ . Además, su diferencial  $X \mapsto -C(X)$  para  $X \in \mathfrak{g}$ , donde denotamos también  $C : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  la conjugación de  $\mathfrak{g}$  asociada a  $\mathfrak{u}$ , es una estructura casi compleja compatible con la estructura compleja natural en  $G$ , como se puede ver a través del mapa exponencial.*

**Hecho 2.63.** Usando la terminología anterior, la acción coadjunta de  $U$  en  $(\mathfrak{t}^{\mathbb{C}})^*$  induce un isomorfismo de grupos del **grupo de Weyl analítico**  $N_U(T)/T$  de  $U$  en el grupo de Weyl de  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ , donde  $T$  es el subgrupo abeliano obtenido exponenciando  $\mathfrak{t}$  y  $N_U(T) = \{g \in U : g.T.g^{-1} = T\}$  es el normalizador de  $T$  en  $U$ .

Mediante la identificación entre  $\mathfrak{h} = \mathfrak{t} + i\mathfrak{t}$  y  $\mathfrak{h}^*$  de la ecuación (2.2.5), tenemos que, para cada raíz  $\alpha$ , su vector asociado toma valores en  $i\mathfrak{t}$ . Entonces es usual explicitar esto, redefiniendo el isomorfismo con un factor de  $i$ , de manera tal que

$$\forall H \in \mathfrak{h} : \alpha(H) = i \langle H_\alpha, H \rangle.$$

En lo que sigue, mantendremos este factor de  $i$  explícito.

## 2.2.7 Álgebras de Lie afines

Para construir las representaciones del grupo de lazos  $LG$  sobre un grupo de Lie complejo simple  $G$  de álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ , haremos referencia a una cierta álgebra que se puede construir a partir de ella, denominada **afin**. Como referencia, recomendamos nuevamente [3].

**Definición 2.64.** Dada  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie simple compleja, el **álgebra de lazos polinomiales** es

$$L_{pol}\mathfrak{g} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[z, z^{-1}]$$

con el corchete de Lie dado por  $[Y \otimes f, Z \otimes g] = [Y, Z] \otimes fg$ .

$L_{pol}\mathfrak{g}$  tiene una extensión central no trivial única  $\widehat{L_{pol}\mathfrak{g}}$  (salvo isomorfismos y multiplicación por un escalar en la forma de Killing) dada por el espacio vectorial  $L_{pol}\mathfrak{g} \oplus \mathbb{C}k$  con las relaciones de conmutación  $[k, X \otimes f] = 0$  y

$$[Y \otimes z^m, Z \otimes z^n] = [Y, Z] \otimes z^{m+n} + nk\kappa(Y, Z)\delta_{n+m}, \quad \text{donde } \delta_{n+m} = \begin{cases} 1 & n+m=0 \\ 0 & \text{si no.} \end{cases} \quad (2.5)$$

A esta álgebra se la denomina usualmente álgebra afin. Extendemos esta álgebra nuevamente agregando una derivación  $d = z \frac{d}{dz}$ , obtenemos una nueva álgebra que también suele recibir el mismo nombre.

**Definición 2.65.** Definimos el **álgebra de Lie afin**

$$A(\mathfrak{g}) = \widehat{L_{pol}\mathfrak{g}} \oplus \mathbb{C}d$$

con el conmutador está dado por la extensión del conmutador de  $\widehat{L_{pol}\mathfrak{g}}$  junto con

$$[d, k] = 0 \quad \text{y} \quad [d, Y \otimes z^n] = Y \otimes nz^n.$$

Tanto en  $\text{Aff}(\mathfrak{g})$  como  $\widehat{L_{pol}\mathfrak{g}}$  podemos definir una forma bilineal simétrica invariante dada por

$$\begin{aligned} \hat{\kappa}(Y \otimes z^m, Z \otimes z^n) &= \kappa(Y, Z)\delta_{n+m}, & \hat{\kappa}(k, d) &= 1, \\ \hat{\kappa}(k, k) &= \hat{\kappa}(d, d) = \hat{\kappa}(k, Y \otimes z^n) = \hat{\kappa}(d, Y \otimes z^n) &= 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

En el caso de  $\text{Aff}(\mathfrak{g})$ , la forma bilineal invariante resulta no degenerada, pero al restringirla a  $\widehat{L_{pol}\mathfrak{g}}$  se vuelve degenerada.

**Definición 2.66.** Dada  $\mathfrak{h}$  una subálgebra de Cartan de  $\mathfrak{g}$ , denotamos

$$\hat{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}k, \quad \tilde{\mathfrak{h}} = \hat{\mathfrak{h}} \oplus \mathbb{C}d,$$

que llamamos también **subálgebras de Cartan** de  $\widehat{L_{\text{pol}}\mathfrak{g}}$  y de  $A(\mathfrak{g})$ , respectivamente. Tenemos

$$\hat{\mathfrak{h}}^* = \mathfrak{h}^* \oplus \mathbb{C}\Lambda_0, \quad \tilde{\mathfrak{h}}^* = \hat{\mathfrak{h}}^* \oplus \mathbb{C}\delta,$$

donde  $\Lambda_0$  y  $\delta$  se definen a partir de las relaciones  $\Lambda_0(k) = 1 = \delta(d)$  y de

$$\Lambda_0(d) = \Lambda_0(X) = \delta(k) = \delta(X) = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{h}.$$

**Observación 2.67.** Notamos que

$$A(\mathfrak{g}) = \tilde{\mathfrak{h}} \oplus \bigoplus_{\tilde{\alpha} \in \tilde{R}} \tilde{\mathfrak{g}}_{\tilde{\alpha}},$$

donde para cada  $\tilde{\alpha} \in \tilde{\mathfrak{h}}^*$  denotamos

$$\tilde{\mathfrak{g}}_{\tilde{\alpha}} = \left\{ Y \in A(\mathfrak{g}) \mid [X, Y] = \tilde{\alpha}(X)Y \quad \forall X \in \tilde{\mathfrak{h}} \right\} \text{ y } \tilde{R} = \left\{ \tilde{\alpha} \in \tilde{\mathfrak{h}}^* \mid \tilde{\mathfrak{g}}_{\tilde{\alpha}} \neq 0 \right\}.$$

De esto obtenemos que  $\tilde{R}$  está compuesto por elementos de la forma  $\tilde{\alpha} = \alpha + n\delta$ , para uno de los dos siguientes casos:

$$\begin{cases} \alpha \in R, n \in \mathbb{Z} \\ \alpha = 0, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \end{cases}$$

y que sus autoespacios son respectivamente

$$\begin{cases} \tilde{\mathfrak{g}}^{\alpha+n\delta} = \mathfrak{g}^{\alpha} \otimes z^n \\ \tilde{\mathfrak{g}}^{n\delta} = \mathfrak{h} \otimes z^n. \end{cases}$$

Notar que en el caso  $\alpha = 0$ , los autoespacios pueden tener dimensión  $> 1$ , dependiendo de  $\dim \mathfrak{h}$ .

Los elementos de  $\tilde{R}$  se denominan **raíces afines**, y podemos definir las coraíces afines  $\tilde{R}^\vee$  de manera análoga al caso de dimensión finita. Además, también como en el caso de dimensión finita, las raíces afines admiten un conjunto de raíces simples  $\tilde{\Delta}$  tal que  $\tilde{R} = \tilde{R}_+ \sqcup \tilde{R}_-$ , donde  $\tilde{R}_+$  es el conjunto de combinaciones lineales de raíces simples con coeficientes en  $\mathbb{N}_0$ , y  $\tilde{R}_- = -\tilde{R}_+$ . Las raíces simples en  $\tilde{\Delta} = \{\alpha_j\}_{1 \leq j \leq r}$  de  $\mathfrak{g}$  son también simples en  $\text{Aff}(\mathfrak{g})$ , pero a ellas se les suma  $\alpha_0 = 1 - \theta$ , donde  $\theta$  es la raíz maximal de  $\mathfrak{g}$ .

**Observación 2.68.** Consideramos las subálgebras de Lie  $\hat{\mathfrak{n}}^\pm = \bigoplus_{\tilde{\alpha} \in \tilde{R}^\pm} \tilde{\mathfrak{g}}_{\tilde{\alpha}}$ . Podemos caracterizarlos como

$$\hat{\mathfrak{n}}^\pm = \mathfrak{n}^\pm \oplus \mathfrak{g} \oplus z^{\pm 1}\mathbb{C}[z^{\pm 1}]$$

y tenemos la descomposición de espacios vectoriales dada por

$$A(\mathfrak{g}) = \hat{\mathfrak{n}}^+ \oplus \tilde{\mathfrak{h}} \oplus \hat{\mathfrak{n}}^-.$$

# Capítulo 3

## Acción de Wess-Zumino-Witten

En esta sección, mostraremos cómo construir la acción para un modelo de Wess-Zumino-Witten en el caso de una variedad con borde, basándonos en el artículo [14]. Todos los grupos de Lie serán simples, conexos, y simplemente conexos.

### 3.1 Acción de WZW para una superficie de Riemann cerrada

#### 3.1.1 Término cinético

Así como un modelo sigma de dimensión 1 representa una partícula en alguna variedad de llegada  $M$ , se puede considerar que el caso de dimensión 2 representa la dinámica de una cuerda en alguna variedad  $G$ . Sea  $\varphi \in C^\infty(\Sigma, G)$  un campo suave para una superficie de Riemann  $\Sigma$  cerrada (compacta y sin borde), a valores en un grupo de Lie  $G$ . Sea  $g$  una métrica en  $\Sigma$  compatible con su estructura casi compleja, y sea  $\kappa$  una forma bilineal simétrica invariante en  $T_e G = \mathfrak{g}$ . Construimos una métrica en  $G$  como  $h = \kappa \circ \mu^{\otimes 2}$ , donde  $\mu : TG \rightarrow \mathfrak{g}$  es la forma de Maurer-Cartan. En otras palabras, esto es trasladar  $\kappa$  a izquierda por la variedad.

**Definición 3.1.** *La densidad de energía cinética de un campo es*

$$|d\varphi|^2 d\text{vol}_\Sigma = \kappa \circ (\mu \circ d\varphi)^{\otimes 2} \circ \sigma_g(x) d\text{vol}_\Sigma.$$

En coordenadas locales  $z : U \subset \Sigma \rightarrow \mathbb{C}$ , para  $z = x + iy$ , identificamos  $T_z U$  con  $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$  y su forma de volumen está dada localmente por  $d\text{vol}_\Sigma = \sqrt{g} dx \wedge dy$ . Tenemos entonces que

$$|d\varphi|^2 d\text{vol}_\Sigma = [h(\partial_x \varphi, \partial_x \varphi) + h(\partial_y \varphi, \partial_y \varphi)] \sqrt{g} dx \wedge dy.$$

Complexificando el plano tangente de la manera usual, tenemos  $dx \wedge dy = dz \wedge d\bar{z}$ ; y extendiendo  $h$  de manera  $\mathbb{C}$  lineal, tenemos que

$$|d\varphi|^2 d\text{vol}_\Sigma = \frac{i}{2} h(\partial_z \varphi, \partial_{\bar{z}} \varphi) \sqrt{g} dz \wedge d\bar{z}.$$

Recordando que  $h = \kappa \circ \mu^{\otimes 2}$  y usando que  $\mu(\delta\varphi) = \varphi^{-1} \delta\varphi$  donde  $\delta = \partial, \bar{\partial}$ , escribimos la **energía cinética** como

$$E_\Sigma = \frac{i}{2} \int_\Sigma \varphi^{-1} \partial\varphi \wedge_\kappa \varphi^{-1} \bar{\partial}\varphi.$$

**Observación 3.2.** Es posible además escribir el término cinético de otra forma. Recordamos que para una variedad  $M$  compleja y un espacio vectorial  $V$  tenemos la descomposición  $\Omega^1(M, V) = \Omega^{1,0}(M, V) \oplus \Omega^{0,1}(M, V)$ . Esto permite definir una operación de conjugación como

$$\forall a \in \Omega^{1,0}(M, V), \forall b \in \Omega^{0,1}(M, V) : \quad \overline{a+b} = a - b.$$

El pullback  $\varphi^* \mu$  define una 1-forma en  $\Sigma$  a valores en  $\mathfrak{g}$ , y resulta que el término cinético también puede escribirse como

$$E_\Sigma = \frac{i}{2} \int \varphi^* \mu \wedge_\kappa \overline{\varphi^* \mu}.$$

Esto se deduce inmediatamente del hecho que  $\varphi^* \mu = \varphi^{-1} \partial \varphi + \varphi^{-1} \bar{\partial} \varphi$ .

### 3.1.2 Término de WZW

El término cinético posee invariancia conforme, en el sentido de que es invariante bajo la composición del campo con un difeomorfismo  $f : G \rightarrow G$  tal que  $f^* h = \lambda^2 h$  para alguna función suave  $\lambda \in C^\infty(M)$ . Es posible sumarle un segundo término que preserve esta invariancia conforme. Este término lo construiremos a continuación para un campo  $\varphi$  tomando el pullback de una cierta 3-forma bajo una extensión de  $\varphi$  a una 3-variedad. La motivación de esta 3-forma, definida a continuación, se basa en que consideraremos modelos de Wess-Zumino-Witten en grupos de Lie complejos que resultan la complejificación de un grupo compacto (ver Sección 2.2.6).

**Hecho 3.3.** Para cualquier grupo de Lie  $G$  compacto,  $H^3(G, \mathbb{Z})$  es generado por la 3-forma invariante a izquierda cuyo valor en  $T_e G = \mathfrak{g}$  es

$$\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g} : \quad \sigma(e)(X, Y, Z) = \frac{1}{16\pi^2} \kappa(X, [Y, Z])$$

(ver [11] §A.2.16). Esta forma resulta cerrada en  $\Omega^3(G)$ , y define una clase de cohomología integral siempre que la normalización de  $\kappa$  es tal que  $\kappa(\alpha^\vee, \alpha^\vee) \in 2\mathbb{Z}$  para cada coraíz  $\alpha^\vee$  de  $G$  (ver [25] §4.4.5). Por invariancia a izquierda de  $\sigma$ , tenemos la expresión explícita

$$\sigma = \frac{1}{96\pi^2} \mu \wedge_\kappa [\mu \wedge_L \mu].$$

Por ejemplo, para  $\mathfrak{su}(2)$ , tomando  $\kappa(X, Y) = -2 \text{Tr}(XY)$ , se tiene la expresión

$$\sigma(g) = -\frac{1}{24\pi^2} \text{Tr} \left[ (g^{-1} dg)^{\wedge 3} \right].$$

**Definición 3.4.** El término de Wess-Zumino-Witten para la acción sobre una superficie de Riemann compacta sin borde  $\Sigma$  está dado por  $\int_B \tilde{\varphi}^* \sigma$ , donde  $B$  es alguna variedad compacta tridimensional orientada cuyo borde es  $\partial B = \Sigma$ .

Supongamos  $\partial \Sigma = \emptyset$ . Entonces, siempre se puede hallar una variedad compacta tridimensional orientada  $B$  cuyo borde es  $\partial B = \Sigma$  (ver Sección 2.1.2). Para definir la acción, construimos una extensión  $\tilde{\varphi} \in C^\infty(B, G)$  del campo  $\varphi$ . Consideramos una triangulación de la 3-variedad  $B$  por un complejo, lo que nos induce una triangulación  $T$  de su borde  $\Sigma$ , y descomponemos  $\varphi : \Sigma \rightarrow G$  como un 2-símplice singular:

$$\varphi = \sum_{\Delta_2 \in T} \varphi|_{\Delta_2} \in C_2(G, \mathbb{Z}).$$

Si  $\varphi$  es un 2-borde, es decir, homóloga a 0, podremos hallar un 3-símplice  $\tilde{\varphi} \in C_3(G, \mathbb{Z})$  tal que  $\partial \tilde{\varphi} = \varphi$ . Esto siempre ocurre si  $H_2(G, \mathbb{Z}) = 0$ , pero el término de Wess-Zumino-Witten también puede definirse cuando no (ver [4], apéndice 2).

**Observación 3.5.** La condición de integralidad asegura que la amplitud de probabilidad

$$\exp\left(-2\pi i \int_B \tilde{\varphi}^* \sigma\right) \in \mathbb{C}$$

esté bien definida. Esto es porque, extendiendo con otra 3-variedad  $\tilde{B}$  y la respectiva función  $\tilde{\varphi}$ , su pegado nos da una función  $\chi$  definida sobre  $-B \cup \tilde{B}$  (revirtiendo la orientación de  $B$  para poder pegar las 3-variedades en el borde común). Las acciones de  $\tilde{\varphi}$  y  $\tilde{\varphi}$  diferirán entonces en

$$\int_{\tilde{B}} \tilde{\varphi}^* \sigma - \int_B \tilde{\varphi}^* \sigma = \int_{-B \cup \tilde{B}} \chi^* \sigma \in \mathbb{Z},$$

que es entero, ya que  $\sigma \in H^3(G, \mathbb{Z})$  y la integral es sobre una variedad cerrada.

**Observación 3.6.** Para una 3-forma exacta  $d\beta \in \Omega^3(G, \mathbb{Z})$ , el término de Wess-Zumino-Witten se podría expresar, por el teorema de Stokes, como  $\exp(-2\pi i \int_{\Sigma} \varphi^* \beta)$ . Esto representa un término análogo al electromagnético, ya que en el caso de una partícula siguiendo una curva  $x : [0, t] \rightarrow \mathbb{M}$  en el espacio de Minkowski sometida a un potencial electromagnético  $A \in \Omega^1(\mathbb{M})$ , el efecto del mismo se manifiesta en la acción como un término  $\int x^* A$ . En estos casos a la 2-forma  $\beta$  se la denomina campo de Kalb-Ramond y se interpreta como un potencial electromagnético generalizado (como referencia, se sugiere [6]). Sin embargo, este no es el caso que estudiaremos, ya que por construcción elegimos  $\sigma$  no exacta.

La suma del término de Wess-Zumino-Witten y el término cinético de la sección anterior se denomina la acción de un modelo de Wess-Zumino-Witten.

**Definición 3.7.** La **acción de Wess-Zumino-Witten** de nivel  $k \in \mathbb{Z}$  sobre una superficie de Riemann cerrada  $\Sigma$  está dada por

$$S_{\Sigma}(\varphi) = \frac{k}{4\pi} E_{\Sigma}(\varphi) + 2k\pi i \left[ \int_B \tilde{\varphi}^* \sigma \right].$$

## 3.2 Acción de WZW para una superficie de Riemann compacta con borde

Si ahora  $\partial\Sigma \neq 0$ , no podemos definir un término de Wess-Zumino-Witten como número complejo, ya que no es posible interpretar  $\Sigma$  como el borde de una 3-variedad. Hay distintas maneras de “completar la superficie”, es decir, de extender  $\varphi$  a una variedad  $\tilde{\Sigma}$  cerrada, que darían distintas acciones. Identificaremos estas extensiones entre sí y consideraremos a la amplitud  $\exp[-S_{\Sigma}(\varphi)]$  como una clase de equivalencia. Concretamente, esto da como resultado que si el borde de  $\Sigma$  es conexo, la amplitud de probabilidad va a interpretarse como un punto en un fibrado de línea sobre el grupo de lazos  $LG$ , que se proyecta a  $\varphi|_{\partial\Sigma}$  (ver Sección 2.2.3). Más en general, si el borde tiene  $n$  componentes conexos, la amplitud será un punto del  $n$ -producto tensorial de fibrados de línea sobre  $LG$ .

### 3.2.1 Prerrequisitos: el fibrado de línea

Construiremos un fibrado de línea sobre el grupo  $LG$ . Recordamos de la Sección 2.1.3 que esto se realiza con una 2-forma  $\omega \in \Omega^2(LG)$  cerrada e integral.

**Definición 3.8.** Sea la 3-forma  $\sigma \in \Omega^3(G)$  invariante a izquierda de la Sección 3.1.2. Definimos la 2-forma de Wess-Zumino-Witten como

$$\forall \gamma\xi_1, \gamma\xi_2 \in T_{\gamma}LG : \quad \omega_{WZW}(\gamma\xi_1, \gamma\xi_2) = \left( \int_{S^1} e\nu^* \sigma \right) (\gamma\xi_1, \gamma\xi_2). \quad (3.1)$$

**Definición 3.9.** Para cada  $k \in \mathbb{Z}$ , definimos el fibrado de línea

$$L_{WZV}^k := L_{[k\omega_{WZV}]}(G) = \{(p, u) \mid p : [0, 1] \rightarrow LG, p(0) = e, u \in \mathbb{C}\} / \sim \quad (3.2)$$

donde  $\sim$  es la relación de equivalencia dada por  $(p, u) \sim (q, v)$  si

$$p(1) = q(1) \quad y \quad v = u \exp\left(-2\pi i \int_A k\omega_{WZV}\right) \quad (3.3)$$

con  $A$  un 2-disco orientado en  $LG$ , cuyo borde es  $q * p^{-1}$ . Explícitamente,

$$p(1) = q(1) \quad y \quad v = u \exp\left(-2\pi i \int_{S^1 \times A} k \text{ev}^* \sigma\right). \quad (3.4)$$

Explicaremos el significado de  $\int_{S^1} \text{ev}^* \sigma$ . Definimos  $\text{ev} : S^1 \times LG \rightarrow G$  como el mapa suave que envía  $(\theta, \gamma)$  en  $\gamma(\theta)$ , y buscamos una forma explícita para

$$\text{ev}_* : T(S^1 \times LG) \rightarrow TG.$$

Realizamos un elemento del tangente de  $S^1$  a partir del diferencial de una curva

$$\begin{aligned} z : (-\epsilon, \epsilon) &\rightarrow S^1 \\ z(t) &\mapsto \exp(ict + i\alpha) \quad \text{para } c \in \mathbb{R}, \alpha \in [0, 2\pi]. \end{aligned}$$

Definimos  $z'(0) : C^\infty(S^1) \rightarrow C^\infty(S^1)$  como

$$\forall f \in C^\infty(S^1) : \quad z'(0)f := \left. \frac{d}{dt} (f \circ z) \right|_{t=0} = \left. (ic \exp(i\alpha) \partial_z f) \right|_{\exp(i\alpha)} =: (c\partial_\theta|_\alpha) f.$$

Decimos que este es el elemento  $c\partial_\theta|_\alpha$  de  $T_\alpha S^1$ , el plano tangente a  $S^1$  en  $\alpha$ . Para un elemento  $(c\partial_\theta|_\alpha, \gamma\xi)$  en  $T_\alpha S^1 \times T_\gamma LG$ , su *pushforward* bajo  $\text{ev}_*$  está dado por

$$\text{ev}_*(c\partial_\theta|_\alpha, \gamma\xi) = (c\partial_\theta\gamma|_\alpha + \gamma\xi|_\alpha). \quad (3.5)$$

Esto es porque, para un cierto  $f \in C^\infty(G)$ , tenemos que

$$\begin{aligned} \left[ \text{ev}_*(c\partial_\theta|_\alpha, \gamma\xi) \right] f &= (c\partial_\theta|_\alpha, \gamma\xi) f \circ \text{ev} \\ &= c\partial_\theta (f \circ \text{ev})|_{(\alpha, \gamma)} + \gamma\xi (f \circ \text{ev})|_{(\alpha, \gamma)} \\ &= c\partial_\theta (f \circ \gamma)|_\alpha + (df|_{\gamma(\alpha)} \circ T_\gamma \text{ev}|_\alpha) (\gamma\xi) \\ &= df|_{\gamma(\alpha)} (c\partial_\theta\gamma|_\alpha + \gamma\xi|_\alpha) \\ &= (c\partial_\theta\gamma|_\alpha + \gamma\xi|_\alpha) f. \end{aligned}$$

La forma  $\sigma$  es invariante a izquierda y sabemos cuánto vale explícitamente en  $\mathfrak{g}$ . Entonces, resulta conveniente trabajar con la traslación a izquierda el elemento (3.5) hasta  $\mathfrak{g}$ , es decir,  $(c\gamma^{-1}\partial_\theta\gamma + \xi)|_\alpha$ .

Ahora bien, tenemos que

$$\Omega^3(LG \times S^1) \simeq \Omega^1(S^1) \otimes \Omega^2(LG) \oplus \Omega^0(S^1) \otimes \Omega^3(LG).$$

Definimos la integración sobre  $S^1$  como el único mapa

$$\int_{S^1} : \Omega^3(S^1 \times LG) \rightarrow \Omega^2(LG) \quad \text{con} \quad \begin{cases} \ker \int_{S^1} = \Omega^0(S^1) \otimes \Omega^3(LG) \\ \int_{S^1} \rho \otimes \eta = (\int_{S^1} \rho) \eta \quad \forall \rho \otimes \eta \in \Omega^1(S^1) \otimes \Omega^2(LG). \end{cases} \quad (3.6)$$



Por lo tanto, basta considerar  $\text{ev}^*\sigma$  restringido a  $T_\alpha S^1 \otimes (L\mathfrak{g})^{\otimes 2}$ . Tenemos que, para todo  $\alpha \in [0, 2\pi]$ ,

$$\begin{aligned} (\text{ev}^*\sigma)(c\partial_\theta|_\alpha, \xi_1, \xi_2) &= \frac{1}{16\pi^2} \kappa \left( c\gamma^{-1}\partial_\theta\gamma|_\alpha, [\xi_1|_\alpha, \xi_2|_\alpha] \right) \\ &= \frac{1}{16\pi^2} \left[ \kappa \left( \gamma^{-1}\partial_\theta\gamma|_\alpha, [\xi_1|_\alpha, \xi_2|_\alpha] \right) \right] d\theta|_\alpha (c\partial_\theta|_\alpha). \end{aligned}$$

Entonces la 2-forma (3.1) está dada por

$$\omega_{\text{WZW}}(\gamma\xi_1, \gamma\xi_2) = \left( \int_{S^1} \text{ev}^*\sigma \right) (\gamma\xi_1, \gamma\xi_2) = \frac{1}{16\pi^2} \int_{S^1} \kappa(\gamma^{-1}\partial_\theta\gamma, [\xi_1, \xi_2]) d\theta.$$

Observamos que  $\omega_{\text{WZW}}(\gamma\xi_1, \gamma\xi_2)$  no es invariante a izquierda y por lo tanto no define una extensión central. Por otro lado, en la definición (3.2), pedimos  $k \in \mathbb{Z}$  para mantener la integralidad de la forma. Sin embargo, si el grupo de cohomología  $H_2(G, \mathbb{R})$  es trivial, todas las 2-formas serán cohomólogos a la 2-forma nula. En ese caso, el fibrado será trivial, y esto permite tomar  $k \in \mathbb{R}$ . Por último, notamos que  $k = 1$  el fibrado resultante queda simplemente conexo (ver [25], §4.4.6).

### 3.2.2 La acción en una superficie de Riemann compacta con borde

Sea  $\Sigma$  una superficie de Riemann compacta con borde conexo, y supongamos un difeomorfismo  $d : S^1 \rightarrow \partial\Sigma$ . Para un campo suave  $\varphi \in C^\infty(\Sigma, G)$ , observamos que  $\varphi \circ d \in LG$ ; vamos a definir su amplitud  $\exp[-S_\Sigma(\varphi)]$  como un cierto punto de  $L_{\text{WZW}}^k$ .

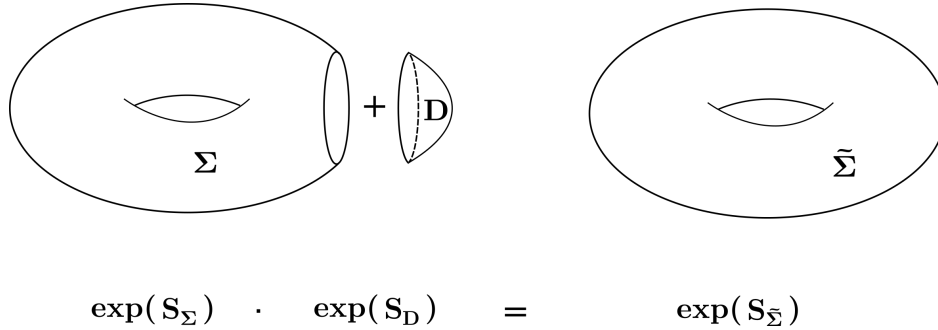


Figura 3.1: Definición de la acción motivada por la teoría topológica de campos

Bajo el espíritu de la teoría topológica de campos (ver Figura 3.1), vamos a definir la acción a partir del apareamiento dado por “cerrar” el borde con un disco, sobre el cual vamos a extender el campo. Luego, veremos que esta definición es independiente de la extensión elegida.

Sea  $D$  el disco de radio 1 centrado en 0. Extendemos el mapa  $\varphi : \Sigma \rightarrow G$  a algún mapa  $\tilde{\varphi} : \tilde{\Sigma} \rightarrow G$  suave donde  $\tilde{\Sigma}$  es una variedad cerrada obtenida pegando  $D$  al borde de  $\Sigma$ , y donde  $\tilde{\varphi}(0) = e$ ; esto lo podemos hacer al ser  $G$  conexo y simplemente conexo. Pedimos que esta extensión satisfaga  $\tilde{\varphi}(0) = e$ . Esta extensión nos permite definir un camino  $P_{\tilde{\varphi}} : [0, 1] \rightarrow LG$  de la siguiente manera:

$$[P_{\tilde{\varphi}}(r)](\exp(i\theta)) = \tilde{\varphi}|_D(r \exp(i\theta)), \quad \text{donde } r \in [0, 1].$$

**Definición 3.10.** Definimos la **amplitud de probabilidad** para un campo  $\tilde{\varphi}|_D \in C^\infty(D, G)$  como el siguiente elemento de  $L_{\text{WZW}}^{-k}$ :

$$\exp[-S_D(\tilde{\varphi}|_D)] := \left[ P_{\tilde{\varphi}}, \exp\left(-\frac{k}{4\pi} E_D(\tilde{\varphi}|_D)\right) \right]_{-k}. \quad (3.7)$$

Este elemento se halla en la fibra de  $L_{WZW}^{-k}$  sobre el campo restringido al borde,  $\varphi \circ d = P_{\tilde{\varphi}}(1) \in LG$ . Definimos **la amplitud de probabilidad** para un campo  $\varphi \in C^\infty(\Sigma, G)$  como el elemento  $\exp[-S_\Sigma(\varphi)] \in L_{WZW}^k$  en la fibra dual sobre  $\varphi \circ d$  que satisface

$$\langle \exp[-S_\Sigma(\varphi)], \exp[-S_D(\tilde{\varphi}|_D)] \rangle = \exp[-S_{\tilde{\Sigma}}(\tilde{\varphi})]. \quad (3.8)$$

Antes de mostrar buena definición, notamos algunas características de esta definición. El fibrado de línea es un objeto geométrico que solo depende del grupo  $G$  y de la 3-forma, y la acción es un punto distinguido de este fibrado de línea,  $S_\Sigma(\varphi)$ , determinado por la superficie  $\Sigma$  y un campo  $\varphi$ . Aquellos campos que comparten la condición de contorno  $\varphi|_{\partial\Sigma}$  definen puntos en la misma fibra  $\pi_{WZW}^{-1}(\varphi|_{\partial\Sigma})$ , que coinciden si sus energías cinéticas coinciden a menos de un término topológico. De hecho, al definir la amplitud de probabilidad  $\exp[-S_\Sigma(\varphi)]$  para un campo  $\varphi$  sobre una superficie con borde  $\Sigma$ , usamos solo el término cinético  $E_D(\tilde{\varphi}|_D)$  asociado a alguna extensión  $\tilde{\varphi}|_D$ . Al tomar el apareamiento en la ecuación (3.8), pegamos  $\varphi$  con  $\tilde{\varphi}|_D$  y obtenemos un campo  $\tilde{\varphi}$  definido sobre toda  $\tilde{\Sigma}$ , y una amplitud de probabilidad que es un escalar complejo. Este escalar contiene tanto el término cinético del campo  $\tilde{\varphi}$ ,

$$E_{\tilde{\Sigma}}(\tilde{\varphi}) = E_\Sigma(\varphi) + E_D(\tilde{\varphi}|_D),$$

pero además surge de alguna manera de la definición de  $\exp[-S_\Sigma(\varphi)]$  un término de Wess-Zumino-Witten que está definido globalmente sobre todo  $\tilde{\Sigma}$ . Esto ocurre precisamente gracias a que las clases de equivalencia (3.7) estén definidas a menos de un término topológico, dado explícitamente por (3.4). Es decir, en principio, para el apareamiento usado en la Definición 3.10, es posible encontrar caminos  $q, \tilde{q} : [0, 1] \rightarrow LG$  con  $q(1) = P_\varphi(1)$ ,  $\tilde{q}(1) = P_{\tilde{\varphi}}(1)$ , tales que

$$\exp\left(-2\pi i \int_{S^1 \times A} \text{ev}^* \sigma\right) \exp\left(-2\pi i \int_{S^1 \times \tilde{A}} \text{ev}^* \sigma\right) = \exp\left(-2\pi i \int_B \tilde{\varphi}^* \sigma\right),$$

donde  $A, \tilde{A}$  son 2-discos de borde  $q * P_\varphi, \tilde{q} * P_{\tilde{\varphi}}$ .

**Proposición 3.11.** *La definición de la amplitud de probabilidad (3.8) es independiente de la extensión  $\tilde{\varphi}$  elegida.*

Para demostrar esto, requeriremos algunos lemas.

**Lema 3.12.** *Sean  $p, q : M \rightarrow G$  con  $M$  alguna variedad,  $G$  un grupo de Lie. Entonces*

$$(pq)^* \sigma = p^* \sigma + q^* \sigma - \frac{1}{16\pi^2} d(p^{-1} dp \wedge_\kappa dq q^{-1}).$$

*Demostración.* Tenemos que

$$(pq)^* \sigma = \frac{1}{96\pi^2} (pq)^* \mu \wedge_\kappa [(pq)^* \mu \wedge_L (pq)^* \mu]$$

donde

$$(pq)^* \mu = (pq)^{-1} d(pq) = q^{-1} p^{-1} dpq + q^{-1} dq.$$

Reemplazando, distribuyendo, y usando la invariancia de la forma de Killing, obtenemos

$$(pq)^* \sigma = p^* \sigma + q^* \sigma + \frac{1}{32\pi^2} dq q^{-1} \wedge_\kappa [p^{-1} dp \wedge_L p^{-1} dp] + \frac{1}{32\pi^2} q^{-1} p^{-1} dpq \wedge_\kappa [q^{-1} dq \wedge_L q^{-1} dq].$$

Observamos que, por la ecuación (2.4), los términos entre corchetes satisfacen

$$[r^{-1}dr \wedge_L r^{-1}dr] = r^*[\mu \wedge_L \mu] = -2r^*d\mu = -2d(r^{-1}dr), \quad r = p, q,$$

por lo que ambos se obtienen de expandir la derivada total

$$-\frac{1}{16\pi^2}d(p^{-1}dp \wedge_\kappa dq q^{-1}).$$

□

**Lema 3.13.** Sean  $\varphi, \psi : \Sigma \rightarrow G$  funciones suaves con  $\Sigma$  alguna variedad y  $G$  un grupo de Lie. Entonces

$$E_{\tilde{\Sigma}}(\varphi\psi) = E_{\tilde{\Sigma}}(\varphi) + E_{\tilde{\Sigma}}(\psi) - i \int_{\tilde{\Sigma}} \varphi^{-1} \bar{\partial}\varphi \wedge_\kappa \partial\psi\psi^{-1} + \frac{i}{2} \int_{\tilde{\Sigma}} \varphi^{-1} d\varphi \wedge_\kappa d\psi\psi^{-1}.$$

*Demostración.* Tenemos que

$$\begin{aligned} E_{\tilde{\Sigma}}(\varphi\psi) &= \frac{i}{2} \int_{\tilde{\Sigma}} \psi^{-1} \bar{\partial}\psi \wedge_\kappa \psi^{-1} \partial\psi + \frac{i}{2} \int_{\tilde{\Sigma}} \psi^{-1} \varphi^{-1} \partial\varphi \varphi \wedge_\kappa \psi^{-1} \varphi^{-1} \bar{\partial}\varphi \psi \\ &\quad + \frac{i}{2} \int_{\tilde{\Sigma}} \psi^{-1} \varphi^{-1} \partial\varphi \psi \wedge_\kappa \psi^{-1} \bar{\partial}\psi + \frac{i}{2} \int_{\tilde{\Sigma}} \psi^{-1} \partial\psi \wedge_\kappa \psi^{-1} \varphi^{-1} \bar{\partial}\varphi \psi \\ &= E_{\tilde{\Sigma}}(\Psi) + E_{\tilde{\Sigma}}(\Phi) \\ &\quad + \frac{i}{2} \int_{\tilde{\Sigma}} \varphi^{-1} \partial\varphi \wedge_\kappa \bar{\partial}\psi\psi^{-1} + \frac{i}{2} \int_{\tilde{\Sigma}} \partial\psi\psi^{-1} \wedge_\kappa \varphi^{-1} \bar{\partial}\varphi, \end{aligned}$$

donde hemos usado la invariancia de la forma de Killing para la segunda igualdad. Por lo tanto, usando la regla del producto para  $d = \partial + \bar{\partial}$ , tenemos la expresión buscada. □

La fórmula que sigue apareció por primera vez en [24].

**Lema 3.14** (Fórmula de Polyakov-Wiegmann). Sean las funciones suaves  $\Phi, \Psi \in C^\infty(\tilde{\Sigma}, G)$  donde  $\tilde{\Sigma}$  es una superficie de Riemann cerrada. Entonces sus acciones (Definición 3.7) son números complejos, y tenemos

$$\exp[-S_{\tilde{\Sigma}}(\Phi\Psi)] = \exp[-S_{\tilde{\Sigma}}(\Phi)] \cdot \exp[-S_{\tilde{\Sigma}}(\Psi)] \cdot \exp[\Gamma_{\tilde{\Sigma}}(\Phi, \Psi)],$$

donde

$$\Gamma_{\tilde{\Sigma}}(\Phi, \Psi) = \frac{ik}{4\pi} \int_{\tilde{\Sigma}} \Phi^{-1} \bar{\partial}\Phi \wedge_\kappa \partial\Psi\Psi^{-1}.$$

*Demostración.* Es una consecuencia inmediata de los Lemas 3.12 y 3.13. □

En la Sección 4.1, definiremos una noción de producto tal que la forma de Polyakov-Wiegmann vale para las amplitudes de probabilidad en variedades con borde.

*Demostración de la Proposición 3.11.* Dada una extensión  $\tilde{\varphi} \in C^\infty(\tilde{\Sigma}, G)$ , cualquier otra extensión está dada por  $\tilde{\varphi}\phi$  con  $\phi \in C^\infty(\tilde{\Sigma}, G)$  suave tal que  $\phi$  vale constantemente  $e$  en  $\tilde{\Sigma} \setminus \text{int } D$ . Por el Lema 3.14, tendremos que

$$\langle \exp[-S_{\tilde{\Sigma}}(\varphi)], \exp[-S_D(\tilde{\varphi}\phi|_D)] \rangle = \exp[-S_{\tilde{\Sigma}}(\tilde{\varphi}\phi)]$$

siempre y cuando se cumpla que

$$\exp[-S_D((\tilde{\varphi}\phi)|_D)] = \exp[-S_D(\tilde{\varphi}|_D)] \cdot \exp[-S_{\tilde{\Sigma}}(\phi) + \Gamma_{\tilde{\Sigma}}(\tilde{\varphi}, \phi)].$$

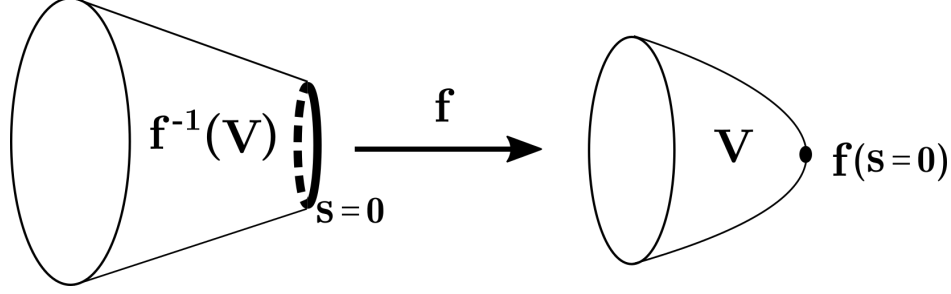


Figura 3.2: El efecto de la aplicación  $f$  sobre un cilindro sólido.

Remarcamos que  $\exp[-S_{\tilde{\Sigma}}(\phi) + \Gamma_{\tilde{\Sigma}}(\tilde{\varphi}, \phi)]$  es un número complejo y actúa multiplicando en el fibrado de línea a través de su estructura lineal. Escribiendo la ecuación anterior más explícitamente, queremos ver que

$$\begin{aligned} & \left[ P_{\tilde{\varphi}|_D \phi|_D}, \exp\left(-\frac{k}{4\pi} E_D((\tilde{\varphi}\phi)|_D)\right) \right]_{-k} \\ &= \left[ P_{\tilde{\varphi}|_D}, \exp\left(-\frac{k}{4\pi} E_D(\tilde{\varphi}|_D)\right) \right]_{-k} \cdot \exp\left[-\frac{k}{4\pi} E_{\tilde{\Sigma}}(\phi) - 2\pi i \left(\int_B \phi^* \sigma\right)\right] \cdot \exp[\Gamma_{\tilde{\Sigma}}(\tilde{\varphi}, \phi)]. \end{aligned}$$

donde  $\tilde{\Psi} \in C^\infty(B, G)$  es una extensión de  $\Psi$ . Del Lema 3.13, tenemos que

$$\begin{aligned} \exp\left[-\frac{k}{4\pi} E_D((\tilde{\varphi}\phi)|_D)\right] &= \exp\left[-\frac{k}{4\pi} (E_D(\tilde{\varphi}|_D) + E_D(\phi|_D))\right. \\ &\quad \left.+ \Gamma_D(\tilde{\varphi}|_D, \phi|_D) - \frac{ik}{8\pi} \int_D \tilde{\varphi}^{-1} d\tilde{\varphi} \wedge_{\kappa} d\phi\phi^{-1}\right]. \end{aligned}$$

Dado que  $\phi = e$  fuera del disco, vale

$$\exp[\Gamma_D(\tilde{\varphi}|_D, \phi|_D)] = \exp[\Gamma_{\tilde{\Sigma}}(\tilde{\varphi}, \phi)] \quad \text{y} \quad \exp\left[-\frac{k}{4\pi} E_D(\phi|_D)\right] = \exp\left[-\frac{k}{4\pi} E_{\tilde{\Sigma}}(\phi)\right].$$

Entonces, alcanza con demostrar:

$$\left[ P_{\tilde{\varphi}|_D \phi|_D}, \exp\left(\frac{-ik}{8\pi} \int_D \tilde{\varphi}^{-1} d\tilde{\varphi} \wedge_{\kappa} d\phi\phi^{-1}\right) \right]_{-k} = \left[ P_{\tilde{\varphi}|_D}, \exp\left(-2\pi i \int_B \phi^* \sigma\right) \right]_{-k}.$$

Por la definición de la clase de equivalencia, esto es equivalente a pedir

$$\exp\left(-2\pi i \int_B \phi^* \sigma\right) = \exp\left(\frac{-ik}{8\pi} \int_D \tilde{\varphi}^{-1} d\tilde{\varphi} \wedge_{\kappa} d\phi\phi^{-1}\right) \exp\left(-2\pi ik \int_{[0,1] \times [0,1]} A^* \omega_{WZ}\right),$$

donde  $A : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow LG$  satisface  $\partial[\text{Imagen}(A)] = P_{\tilde{\varphi}} * P_{\tilde{\varphi}\psi}^{-1}$ .

Para construir  $A$ , usamos algún mapa suave  $\bar{\phi} : D \times [0, 1]$  que satisface

$$\bar{\phi}(\exp(i\theta), s) = \phi(s \exp(i\theta)) \quad \text{y} \quad \bar{\phi}(0, \cdot) = \bar{\phi}(\cdot, 0) = \bar{\phi}(\cdot, 1) = e.$$

Este mapa se interpreta de la siguiente manera. Supongamos alguna extensión  $\Phi$  de  $\phi$  definido en un volumen  $B$  de borde  $\tilde{\Sigma}$ , que satisfaga  $\Phi|_{B \setminus V} = e$ ,  $\Phi|_{\partial V} = \pi^* \phi$ , donde  $\pi : \partial V \rightarrow D$ . Construimos el mapa  $\bar{\phi}$  como  $f^* \Phi$ , el *pullback* de esta extensión bajo la aplicación  $f$  de la Figura 3.2 que “aprieta” un cilindro

relleno en uno de sus extremos, colapsando uno de sus bordes, obteniendo un perdigón cónico. Esta función la podremos considerar suave entre 3-variedades, salvo en un conjunto de medida cero.

Definimos

$$[A(r, s)](\exp(i\theta)) = \begin{cases} \tilde{\varphi}(2sr \exp(i\theta)) & 0 \leq s < \frac{1}{2} \\ \tilde{\varphi}(2(1-s)r \exp(i\theta)) \bar{\phi}(r \exp(i\theta), 2(1-s)) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Miremos ahora  $A^*\omega_{\text{WZW}}$ . Para  $0 \leq s < \frac{1}{2}$ , tenemos

$$A^*\sigma = p^*\sigma \quad \text{donde} \quad p: D \times \left[0, \frac{1}{2}\right] \rightarrow G \\ (z, s) \mapsto \tilde{\varphi}(2sz).$$

En cambio, para  $\frac{1}{2} \leq s \leq 1$ , definimos

$$\bar{p}: D \times \left[\frac{1}{2}, 1\right] \rightarrow G \quad \text{y} \quad q: D \times \left[\frac{1}{2}, 1\right] \rightarrow G \\ (z, s) \mapsto \tilde{\varphi}(2(1-s)z) \quad (z, s) \mapsto \bar{\phi}(z, 2(1-s)).$$

Por el Lema 3.12, tenemos

$$A^*\sigma = (\bar{p}q)^*\sigma = \bar{p}^*\sigma + q^*\sigma - \frac{1}{16\pi^2} d(\bar{p}^{-1}d\bar{p} \wedge dq q^{-1}).$$

La orientación inversa de  $p$  y  $\bar{p}$  respecto a la coordenada  $s$  implica que

$$\int_{D \times [0, \frac{1}{2}]} p^*\sigma = - \int_{D \times [\frac{1}{2}, 1]} \bar{p}^*\sigma,$$

por lo que sus contribuciones se cancelan. Obtenemos entonces

$$\exp\left(-2\pi i k \int_{[0,1] \times [0,1]} A^*\omega_{\text{WZW}}\right) = \exp\left(-2\pi i k \int_{D \times [\frac{1}{2}, 1]} q^*\sigma + \frac{ik}{8\pi} \int_{\partial(D \times [\frac{1}{2}, 1])} \bar{p}^{-1}d\bar{p} \wedge_{\kappa} dq q^{-1}\right).$$

Por el teorema de cambio de variables, tenemos que

$$\int_{D \times [\frac{1}{2}, 1]} q^*\sigma = \int_B \Phi^*\sigma,$$

ya que la contribución de  $\Phi^*\sigma$  en  $B$  fuera del perdigón cónico mencionado anteriormente se anula, al ser  $\Phi$  constante allí. Por otro lado, tenemos que

$$\int_{\partial(D \times [\frac{1}{2}, 1])} \bar{p}^{-1}d\bar{p} \wedge dq q^{-1} = \left(\int_{S^1 \times [\frac{1}{2}, 1]} + \int_{D \times \{\frac{1}{2}\}} - \int_{D \times \{1\}}\right) \bar{p}^{-1}d\bar{p} \wedge dq q^{-1}.$$

El mapa  $q$  es constante sobre  $D \times \{\frac{1}{2}\}$  y  $D \times \{1\}$ , por lo que esos términos se anulan. Por otro lado, en  $S^1 \times [\frac{1}{2}, 1]$ ,  $\bar{p}$  y  $q$  coinciden con el *pullback* bajo el mapa  $f$  de  $\tilde{\varphi}$  y  $\phi$  respectivamente, reparametrizados en la coordenada  $s$ . De esto obtenemos mediante cambio de variables que

$$\exp\left[\frac{ik}{8\pi} \int_{\partial(D \times [\frac{1}{2}, 1])} \bar{p}^{-1}d\bar{p} \wedge_{\kappa} dq q^{-1}\right] = \exp\left[\frac{ik}{8\pi} \int_D \tilde{\varphi}^{-1}d\tilde{\varphi} \wedge_{\kappa} d\phi \phi^{-1}\right],$$

lo que demuestra la Proposición 3.11. □

## Capítulo 4

# Simetría de gauge del modelo de WZW

En este capítulo, propondremos una función de partición para un modelo de Wess-Zumino-Witten a partir de sus simetrías esperadas, también basándonos en el artículo [14]. A lo largo del capítulo,  $\Sigma$  denotará una superficie de Riemann con borde isomorfo a  $S^1$ , y  $\tilde{\Sigma}$  una extensión cerrada obtenida “pegando” un disco  $D$  al borde de  $\Sigma$ .

**Observación 4.1.** Sean campos suaves  $\varphi, \theta, \eta^* \in C^\infty(\tilde{\Sigma}, G)$  con  $G$  un grupo de Lie complejo, semisimple, conexo y simplemente conexo,  $\theta$  holomorfo y  $\eta^*$  antiholomorfo. Entonces la acción posee la simetría

$$\exp[S_{\tilde{\Sigma}}(\theta)] \exp[-S_{\tilde{\Sigma}}(\theta\varphi\eta^*)] \exp[S_{\tilde{\Sigma}}(\eta^*)] = \exp[-S_{\tilde{\Sigma}}(\varphi)]$$

como consecuencia de la fórmula de Polyakov-Wiegmann (Lema 3.14).

En el caso de una superficie con borde, para una acción de nivel  $k \in \mathbb{Z}$ , esta simetría se dará en el fibrado de línea a través de una representación proyectiva de  $LG$ , lo que equivale a una representación ordinaria de su extensión central por  $\mathbb{C}^*$ , también de nivel  $k$ , cuya construcción se dará a continuación. Esta acción nos permitirá generalizar la fórmula de Polyakov-Wiegmann y llegar a una expresión análoga a la de la observación anterior.

### 4.1 Extensiones centrales por $\mathbb{C}^*$

#### 4.1.1 Construcción de la extensión central

Recordamos de la Sección 2.2.4 que para  $G$  un grupo de Lie y  $H$  un grupo de Lie abeliano,  $\tilde{G}$  es una extensión central de  $G$  por  $H$  si existe una secuencia exacta de grupos de Lie

$$\{e\} \rightarrow H \rightarrow \tilde{G} \rightarrow G \rightarrow \{e\}$$

tal que la imagen de  $H$  yace en el centro de  $\tilde{G}$ .

**Definición 4.2.** Para  $G$  grupo de Lie simplemente conexo, realizamos una extensión central por  $\mathbb{C}^*$  de nivel  $k \in \mathbb{Z}$  como

$$\hat{G}_\omega = \{(p, u) \mid p : [0, 1] \rightarrow LG, p(0) = e, u \in \mathbb{C}^*\} / \sim, \quad (4.1)$$

donde  $\sim$  es la relación de equivalencia dada por  $(p, u) \sim (q, v)$  si

$$p(1) = q(1) \quad y \quad v = u \exp\left(-2\pi i \int_A \omega\right),$$

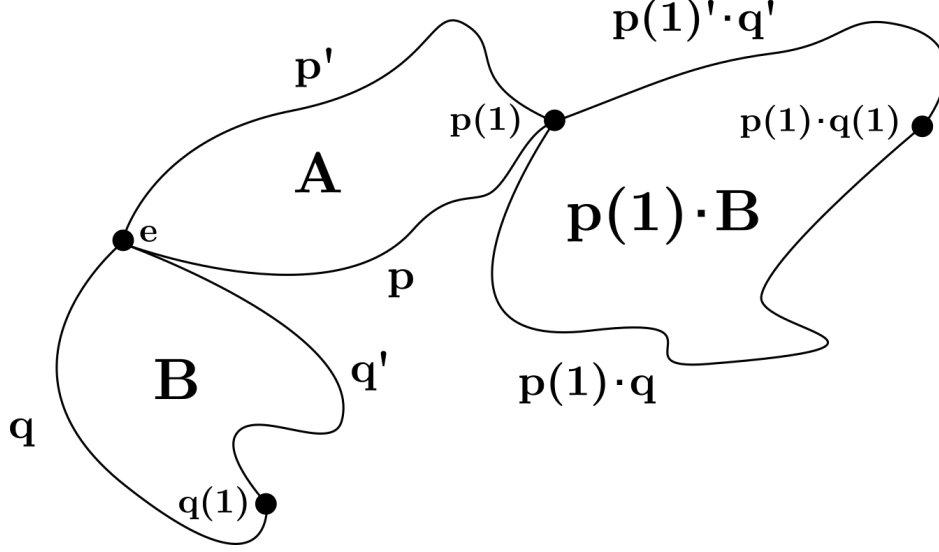


Figura 4.1: Buena definición de la estructura de grupo del objeto construido

para una  $\omega \in \Omega^2(G)$  integral, cerrada, e invariante a izquierda, y  $A$  es una superficie de borde  $q * p^{-1}$ . Esto es un  $\mathbb{C}^*$ -fibrado suave sobre  $G$  con la proyección  $[(p, u)] \mapsto p(1)$ , y su estructura de grupo está dada por

$$[(p, u)] \cdot [(q, v)] = [(p * q, uv)], \quad \forall u, v \in \mathbb{C}^* \text{ y } \forall p, q: \begin{array}{l} [0, 1] \rightarrow G \\ 0 \mapsto e. \end{array} \quad (4.2)$$

Esta extensión central se construye quitándole al fibrado de línea  $L_{[k\omega]}(G)$  la sección nula  $\hat{0}: \gamma \mapsto [(p, 0)]$  con  $p(1) = \gamma$ . Su producto es evidentemente asociativo.

Si bien se construye a partir de un fibrado de línea, no cualquiera de estos fibrados es un candidato para una extensión central, ya que imponemos  $\omega$  invariante a izquierda para asegurar la buena definición del producto (4.2). Para ver esto, alcanza con estudiar la Figura 4.1. Si tenemos elementos del grupo

$$[(p, u)] \sim [(p', u')] \text{ y } [(q, u)] \sim [(q', u')],$$

obtenemos que  $[(p * q, uv)] \simeq [(p' * q', u'v')]$  por los siguientes hechos:

$$v' = v \exp\left(-2\pi i \int_A \omega\right), \quad u' = u \exp\left(-2\pi i \int_B \omega\right) \text{ y } \int_B \omega = \int_{p(1) \cdot B} \omega.$$

**Definición 4.3.** Definimos  $\check{G}_\omega$ , la extensión dual a 4.1, como  $\hat{G}_{-\omega}$ . En cada punto  $g \in G$  definimos un apareamiento dado por

$$\langle [(p, u)]_\omega, [(p, v)]_{-\omega} \rangle_g = uv \quad \forall p \mid p(1) = g.$$

**Observación 4.4.** El apareamiento anterior está bien definido porque al cambiar  $p$  por  $q$  con  $q(1) = g$ , los números complejos  $u, v$  adquieren fases  $\exp\left(\pm 2\pi i \int_{A(q * p^{-1})} \omega\right)$  que son inversas multiplicativas entre sí. Más aún, el apareamiento anterior satisface además la siguiente propiedad. Sean dos puntos  $g_1, g_2 \in G$ , y los elementos

$$s_i \in \hat{G}, t_i \in \check{G} \mid \hat{\pi}(s_i) = \check{\pi}(t_i) = g_i \quad i = 1, 2$$

donde  $\hat{\pi}, \check{\pi}$  denotan las proyecciones de los fibrados  $\hat{G}, \check{G}$  respectivamente. Tenemos que

$$\langle s_1 \cdot s_2, t_1 \cdot t_2 \rangle_{g_1 g_2} = \langle s_1, t_1 \rangle_{g_1} \langle s_2, t_2 \rangle_{g_2}.$$

Esto sale inmediatamente al elegir representantes de las clases de equivalencia.

#### 4.1.2 Extensión central del grupo de lazos

**Definición 4.5.** Tomamos la 2-forma  $\omega_{inv} \in \Omega^2(LG)$  invariante a izquierda dada por

$$\omega_{inv}(\gamma\xi, \gamma\eta) = \frac{1}{8\pi^2} \int_{S^1} \kappa(\xi, \partial_\theta \eta) d\theta, \quad \forall \xi, \eta \in L\mathfrak{g}, \gamma \in LG.$$

**Observación 4.6.** Tenemos que  $\omega_{inv}$  es cerrada e integral, es decir,  $[\omega_{inv}] \in H^2(LG, \mathbb{Z})$ . Esto surge de que

$$\omega_{inv} = \omega_{WZW} + d\alpha, \quad \text{donde } \alpha|_\gamma(\gamma\xi) = \frac{1}{16\pi^2} \int_{S^1} \kappa(\gamma^{-1}\partial_\theta\gamma, \xi) d\theta, \quad \forall \gamma\xi \in T_\gamma LG. \quad (4.3)$$

*Demostración.* Ver [25], demostración de la Proposición 4.4.4.  $\square$

Llamaremos la extensión central de nivel  $k \in \mathbb{Z}$  del grupo de lazos a  $\widehat{LG}_k := \widehat{LG}_{k\omega_{inv}}$ , según la Definición 4.2. La relación (4.3) nos permite establecer una relación entre los fibrados de línea  $L_{WZW}^k$  y  $L_{[k\omega_{inv}]}(LG)$ , como muestra la observación que sigue.

**Observación 4.7.** Sea el mapa de  $L_{WZW}^k$  a  $L_{[k\omega_{inv}]}(LG)$  dado por

$$\Psi_k : [(p, u)]_{k\omega_{WZW}} \mapsto \left[ \left( p, u \exp \left( -2\pi i k \int_p \alpha \right) \right) \right]_{k\omega_{inv}}.$$

Esto es un isomorfismo entre fibrados de línea y respeta el apareamiento entre fibrados duales, es decir, vale

$$\langle \Psi_{-k}(f), \Psi_k(g) \rangle = \langle f, g \rangle \quad \forall f \in L_{WZW}^{-k}, g \in L_{WZW}^k.$$

Tenemos entonces que  $\widehat{LG}_k = L_{[k\omega_{inv}]}(LG) \setminus \hat{0}$ , donde  $\hat{0}$  es la sección nula. Por lo tanto, podemos actuar sobre  $L_{WZW}^k$  con la extensión central, y a través de esta acción darle una noción de producto a  $L_{WZW}^k$ , a pesar de que este no es un grupo.

**Definición 4.8.** Para  $f, g \in L_{WZW}^k \setminus \hat{0}$ , definimos el producto

$$f \bullet g = \Psi_k^{-1}(\Psi_k(f) \cdot \Psi_k(g)).$$

Este producto es asociativo, ya que el producto de la extensión central lo es.

**Proposición 4.9.** Para el producto  $\bullet$  en  $L_{WZW}^k \setminus \hat{0}$ , vale una generalización de la fórmula de Polyakov-Wiegmann. Más precisamente, sean  $\varphi, \psi : \Sigma \rightarrow G$  con  $\partial\Sigma \simeq S^1$ , entonces

$$\exp[-S_\Sigma(\varphi\psi)] = \exp[-S_\Sigma(\varphi)] \bullet \exp[-S_\Sigma(\psi)] \cdot \exp(\Gamma_\Sigma(\varphi, \psi)).$$

Recordamos que el término  $\exp(\Gamma_\Sigma(\varphi, \psi))$  es un número complejo, por lo que actúa con el producto usual de  $\mathbb{C}$  en el fibrado de línea. Antes de la demostración, establecemos una fórmula auxiliar.



**Lema 4.10.** Sean  $\varphi, \psi : D \rightarrow G$  con  $\varphi(0) = e = \psi(0)$ , entonces

$$\Psi_k([(P_{\varphi\psi}, 1)]) = \Psi_k([(P_\varphi, 1)]) \cdot \Psi_k([(P_\psi, 1)]) \cdot \exp\left(-\frac{k}{4\pi} \frac{i}{2} \int_D \varphi^{-1} d\varphi \wedge_\kappa d\psi\psi^{-1}\right).$$

*Demostración.* Seguiremos las líneas de la demostración del Lema 3.8 de [14], explicitando los pasos intermedios. Basta ver que

$$\exp\left(-2\pi ik \left(\int_{P_\varphi + P_\psi - P_{\varphi\psi}} \alpha\right) - \frac{ik}{8\pi} \int_D \varphi^{-1} d\varphi \wedge_\kappa d\psi\psi^{-1}\right) = \exp\left(2\pi ik \int_{[0,1] \times [0,1]} A^* \omega_{\text{inv}}\right), \quad (4.4)$$

donde  $A : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow LG$  lo definimos a continuación.

Sea  $h : D \times [0, 1] \rightarrow G$  el mapa dado por

$$h(z, s) = \begin{cases} \varphi(3sz) & \text{para } 0 \leq s \leq \frac{1}{3} \\ \varphi(z)\psi\left(3\left(s - \frac{1}{3}\right)z\right) & \text{para } \frac{1}{3} \leq s \leq \frac{2}{3} \\ \varphi(3(1-s)z)\psi\left(3(1-s)z\right) & \text{para } \frac{2}{3} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Identificando  $D$  con  $S^1 \times [0, 1]$  (salvo en un conjunto de medida cero), y usando el isomorfismo de conjuntos

$$G^{S^1 \times [0,1] \times [0,1]} \simeq LG^{[0,1] \times [0,1]},$$

definimos

$$A(r, s)(\exp(i\theta)) = h(r \exp(i\theta), s).$$

Observamos que  $\partial(\text{Im}A) = (\bigcup_{r=0,1} A) \cup (\bigcup_{s=0,1} A) = P_\varphi * P_\psi * P_{\varphi\psi}^{-1}$ , y denotamos este camino como  $P_h$ . Por (4.3), tenemos que

$$\int_{[0,1] \times [0,1]} A^* \omega_{\text{inv}} = \int_{[0,1] \times [0,1]} (A^* \omega_{\text{WZW}} + A^* d\alpha). \quad (4.5)$$

Para el primer término de la ecuación (4.5) tenemos

$$\begin{aligned} \int_{[0,1] \times [0,1]} A^* \omega_{\text{WZW}} &= \int_{[0,1] \times [0,1]} A^* \int_{S^1} \text{ev}^* \sigma = \int_{S^1 \times [0,1] \times [0,1]} (\text{ev} \circ (A \times \text{Id}_{S^1}))^* \sigma \\ &= \int_{D \times [0,1]} h^* \sigma. \end{aligned}$$

Esta integral se descompone en tres partes a partir de la integración sobre la variable  $s$ .

1. Para  $0 \leq s \leq \frac{1}{3}$ , tenemos que  $h = \varphi(3sz) =: \varphi_1$ , y entonces tenemos que  $h|_{0 \leq s \leq \frac{1}{3}}^* \sigma = \varphi_1^* \sigma$ .
2. Para  $\frac{1}{3} \leq s \leq \frac{2}{3}$ , tenemos que  $h = \varphi(z)\psi(3(s - \frac{1}{3})z)$ . Denotamos  $\varphi_2 = \varphi(z)$ ,  $\psi_2 = \psi(3(s - \frac{1}{3})z)$ . Observamos que  $\varphi_2 : D \times [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \rightarrow G$  es  $\varphi \times \text{Id}_{[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]}$ , por lo que  $(\varphi_2)^{-1} \partial_s \varphi_2 = 0 \in \text{Lg}$ . Por el Lema 3.12, tenemos que

$$h|_{\frac{1}{3} \leq s \leq \frac{2}{3}}^* \sigma = \psi_2^* \sigma - \frac{1}{16\pi^2} d(\varphi_2^{-1} d\varphi_2 \wedge_\kappa d\psi_2 \psi_2^{-1}).$$

Observamos que no figura el término  $\varphi_2^* \sigma$ . Como  $\varphi_2$  es el producto de  $\varphi : D \rightarrow G$  con la identidad sobre  $[0, 1]$ , la forma  $\varphi_2^* \sigma$  sería el *pullback* de  $\sigma$  a la 2-variedad  $D$ , que se anula al ser  $\sigma$  una 3-forma.

3. para  $\frac{2}{3} \leq s \leq 1$ , denotando  $\varphi_3 = \varphi(3(1-s)z)$ ,  $\psi_3 = \psi(3(1-s)z)$ , tenemos que  $h = \varphi_3 \psi_3$  y que

$$h|_{\frac{2}{3} \leq s \leq 1}^* \sigma = \varphi_3^* \sigma + \psi_3^* \sigma - \frac{1}{16\pi^2} d(\varphi_3^{-1} d\varphi_3 \wedge_\kappa d\psi_3 \psi_3^{-1}).$$

Por las orientaciones en la variable  $s$ , sale de manera inmediata que

$$\int_{D \times [0, \frac{1}{3}]} \varphi_1^* \sigma + \int_{D \times [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]} \psi_2^* \sigma + \int_{D \times [\frac{2}{3}, 1]} \varphi_3^* \sigma + \psi_3^* \sigma = 0$$

por lo que solo es necesario analizar los términos cruzados.

Aplicamos el teorema de Stokes y tenemos entonces que

$$\begin{aligned} \int_{D \times [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]} d(\varphi_2^{-1} d\varphi_2 \wedge_{\kappa} d\psi_2 \psi_2^{-1}) &= \int_D (\varphi_2^{-1} d\varphi_2 \wedge_{\kappa} d\psi_2 \psi_2^{-1})|_{s=\frac{2}{3}} \\ &\quad - \int_D (\varphi_2^{-1} d\varphi_2 \wedge_{\kappa} d\psi_2 \psi_2^{-1})|_{s=\frac{1}{3}} \\ &\quad + \int_{S^1 \times [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]} (\varphi_2^{-1} d\varphi_2 \wedge_{\kappa} d\psi_2 \psi_2^{-1})|_{r=1} \end{aligned}$$

y que

$$\begin{aligned} \int_{D \times [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]} d(\varphi_2^{-1} d\varphi_2 \wedge_{\kappa} d\psi_2 \psi_2^{-1}) &= \int_D (\varphi_3^{-1} d\varphi_3 \wedge_{\kappa} d\psi_3 \psi_3^{-1})|_{s=1} \\ &\quad - \int_D (\varphi_3^{-1} d\varphi_3 \wedge_{\kappa} d\psi_3 \psi_3^{-1})|_{s=\frac{2}{3}} \\ &\quad + \int_{S^1 \times [\frac{2}{3}, 1]} (\varphi_3^{-1} d\varphi_3 \wedge_{\kappa} d\psi_3 \psi_3^{-1})|_{r=1}. \end{aligned}$$

Notamos que las integrales sobre  $D$  se cancelan entre sí. Por otro lado, tenemos que

$$\int_{S^1 \times [\frac{2}{3}, 1]} (\varphi_3^{-1} d\varphi_3 \wedge_{\kappa} d\psi_3 \psi_3^{-1})|_{r=1} = - \int_D (\varphi^{-1} d\varphi \wedge_{\kappa} d\psi \psi^{-1}),$$

al reparametrizar el intervalo  $[\frac{2}{3}, 1]$  como  $-[0, 1]$ , e identificar  $S^1 \times -[0, 1]$  con  $-D$ , una identificación suave salvo en un conjunto de medida cero. Entonces concluimos que

$$\begin{aligned} \exp\left(-2\pi i k \int_{[0,1] \times [0,1]} A^* \omega_{WZW}\right) &= \exp\left(\frac{ik}{8\pi} \int_{S^1 \times [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]} (\varphi_2^{-1} d\varphi_2 \wedge_{\kappa} d\psi_2 \psi_2^{-1}) \Big|_{r=1} \right. \\ &\quad \left. - \frac{ik}{8\pi} \int_D (\varphi^{-1} d\varphi \wedge_{\kappa} d\psi \psi^{-1})\right). \end{aligned}$$

Para el segundo término de la ecuación (4.5), tenemos por el teorema de Stokes que

$$\int_{[0,1] \times [0,1]} A^* d\alpha = \int_{P_h} d\alpha.$$

Recordamos que

$$P_h = \begin{cases} \varphi(3s \exp(i\theta)) & \text{para } 0 \leq s \leq \frac{1}{3} \\ \varphi(\exp(i\theta)) \psi(3(s - \frac{1}{3}) \exp(i\theta)) & \text{para } \frac{1}{3} \leq s \leq \frac{2}{3} \\ \varphi(3(1-s) \exp(i\theta)) \psi(3(1-s) \exp(i\theta)) & \text{para } \frac{2}{3} \leq s \leq 1, \end{cases}$$

por lo que resulta que

$$\int_{P_h} d\alpha = \int_0^{\frac{1}{3}} \alpha \circ \partial_s (\varphi_1|_{r=1}) ds + \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \alpha \circ \partial_s ((\varphi_2 \psi_2)|_{r=1}) ds + \int_{\frac{2}{3}}^1 \alpha \circ \partial_s ((\varphi_3 \psi_3)|_{r=1}) ds.$$

Reparametrizando, tenemos que

$$\int_0^{\frac{1}{3}} \alpha \circ \partial_s (\varphi_1|_{r=1}) ds = \int_{P_\varphi} \alpha \quad \text{y} \quad \int_{\frac{2}{3}}^1 \alpha \circ \partial_s ((\varphi_3\psi_3)|_{r=1}) ds = - \int_{P_{\varphi\psi}} \alpha.$$

Para el término restante, recordamos que  $\alpha|_\gamma(\gamma\xi) = \frac{1}{16\pi^2} \int_{S^1} \kappa(\gamma^{-1}\partial_\theta\gamma, \xi)d\theta$ . Entonces

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \alpha \circ \partial_s ((\varphi_2\psi_2)|_{r=1}) ds &= \frac{1}{16\pi^2} \int_{S^1 \times [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]} \kappa \left( (\varphi_2\psi_2)^{-1} \partial_\theta (\varphi_2\psi_2), \partial_s \psi_2 \right) \Big|_{r=1} \\ &= \int_{P_\psi} \alpha + \frac{1}{16\pi^2} \int_{S^1 \times [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]} (\varphi_2^{-1} d\varphi_2 \wedge_\kappa d\psi_2 \psi_2^{-1}) \Big|_{r=1}. \end{aligned}$$

Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} \exp \left( -2\pi i \int_{[0,1] \times [0,1]} A^* d\alpha \right) &= \exp \left( -2\pi i \int_{P_\varphi + P_\psi - P_{\varphi\psi}} \alpha \right. \\ &\quad \left. - \frac{ik}{8\pi} \int_{S^1 \times [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]} (\varphi_2^{-1} d\varphi_2 \wedge_\kappa d\psi_2 \psi_2^{-1}) \Big|_{r=1} \right). \end{aligned}$$

Agrupando estos resultados, se llega a la igualdad buscada de la ecuación (4.4).  $\square$

*Demostración de la Proposición 4.9.* Sean  $\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}$  extensiones de  $\varphi, \psi$  a  $\tilde{\Sigma} \supset \Sigma$  con  $\partial\tilde{\Sigma} = \emptyset$ . Bastará con ver que a partir del apareamiento

$$\left\langle \Psi_{-k}(\exp[-S_D(\varphi\psi|_D)]), \Psi_k(\exp[-S_\Sigma(\varphi)]) \cdot \Psi_k(\exp[-S_\Sigma(\psi)]) \cdot \exp(\Gamma_\Sigma(\varphi, \psi)) \right\rangle$$

obtenemos  $\exp(-S_{\tilde{\Sigma}}(\varphi\psi))$ .

Por el Lema 4.10, tenemos que

$$\Psi_{-k}(\exp[-S_D(\varphi\psi|_D)]) = \Psi_{-k}(\exp[-S_D(\varphi|_D)]) \cdot \Psi_{-k}(\exp[-S_D(\psi|_D)]) \cdot \exp(\Gamma_D(\varphi, \psi))$$

para los elementos del fibrado  $LG_{\text{WZW}}^{-k}$ . Esto sale inmediatamente del hecho que

$$\Psi_{-k}(\exp[-S_D(\varphi\psi|_D)]) = \Psi_{-k}([(P_{\varphi\psi}, 1)]) \cdot \exp\left(-\frac{k}{4\pi} E_D(\varphi\psi|_D)\right),$$

de expandir  $E_D(\varphi\psi)$  (ver Lema 3.13), y del hecho que el producto en  $\widehat{LG}_k$  es  $\mathbb{C}$ -bilineal.

Por las Observaciones 4.4 y 4.7, tenemos que el apareamiento

$$\left\langle \Psi_{-k}(\exp[-S_D(\varphi|_D)]) \cdot \Psi_{-k}(\exp[-S_D(\psi|_D)]), \Psi_k(\exp[-S_\Sigma(\varphi)]) \cdot \Psi_k(\exp[-S_\Sigma(\psi)]) \right\rangle$$

da como resultado

$$\exp(-S_{\tilde{\Sigma}}(\varphi)) \cdot \exp(-S_{\tilde{\Sigma}}(\psi)).$$

Por otro lado, tenemos que  $\exp(\Gamma_D(\varphi, \psi)) \cdot \exp(\Gamma_\Sigma(\varphi, \psi)) = \exp(\Gamma_{\tilde{\Sigma}}(\varphi, \psi))$ . Combinando estos hechos, tenemos la identidad buscada.  $\square$

## 4.2 Un grupo dado por la complexificación de un compacto

En lo que sigue, construiremos el grupo de simetrías para la acción de Wess-Zumino-Witten sobre un grupo de Lie complejo semisimple y simplemente conexo. Utilizaremos terminología de la Sección 2.2.6 y notaremos como  $G^{\mathbb{C}}$  a la complexificación el grupo de Lie compacto simple  $G$ . La estructura compleja permitirá considerar secciones analíticas de  $L_{\text{WZW}}^k$ , y esto permitirá el uso del teorema de Birkhoff para calcular el espectro de la teoría (ver el Capítulo 5).

Recordamos que a partir del subgrupo compacto  $G$  obtenemos una operación de conjugación  $*$  en  $G^{\mathbb{C}}$  según la Definición 2.61. Podremos extender esta conjugación a una involución sobre  $\widehat{LG}_k^{\mathbb{C}}$ .

**Definición 4.11.** Sea  $[(p, u)] \in \widehat{LG}_k^{\mathbb{C}}$ . Su adjunto es  $[(p, u)]^* = [(p^*, \bar{u})]$ , donde  $p^*$  se define punto a punto.

**Observación 4.12.** La involución anterior está bien definida.

*Demostración.* Supongamos dos representantes distintos,  $(p, u)$  y  $(q, v)$ , para el mismo elemento  $\hat{\gamma} \in \widehat{LG}_k^{\mathbb{C}}$ . Queremos ver entonces que

$$[(p^*, \bar{u})] = [(q^*, \bar{v})].$$

Es inmediato que  $p^*(1) = q^*(1)$ . Para  $A$  alguna superficie en  $LG^{\mathbb{C}}$  con  $\partial A = q * p^{-1}$ , tenemos que

$$\bar{v} = \overline{u \exp\left(-2\pi i k \int_A \omega_{\text{inv}}\right)} = \bar{u} \exp\left(+2\pi i k \int_A \omega_{\text{inv}}^*\right) = \bar{u} \exp\left(-2\pi i \int_{A^*} \omega_{\text{inv}}\right),$$

donde tomamos el cambio de variables  $z \mapsto \bar{z}$ . □

**Observación 4.13.** Para  $\hat{g}, \hat{h} \in \widehat{LG}_k^{\mathbb{C}}$ , vale que  $(\hat{g}\hat{h})^* = \hat{h}^*\hat{g}^*$ . Por otro lado, para  $\varphi \in C^\infty(\Sigma, G^{\mathbb{C}})$ , vale que

$$[\Psi_k(\exp[-S_\Sigma(\varphi)])]^* = \Psi_k(\exp[-S_\Sigma(\varphi^*)]).$$

## 4.3 La acción de $\widehat{LG}_k^{\mathbb{C}}$ sobre $L_{\text{WZW}}^k$

Sea  $G^{\mathbb{C}}$  un grupo de Lie complejo, semisimple, conexo y simplemente conexo.

**Definición 4.14.** Sea  $Z$  una sección de  $L_{\text{WZW}}^k$ . Para  $\hat{\gamma} \in \widehat{LG}_k^{\mathbb{C}}$ , definimos las acciones a izquierda y a derecha sobre un elemento  $f \in L_{\text{WZW}}^k$  como

$$\hat{\gamma} \triangleright f = \Psi_k^{-1}[\hat{\gamma} \cdot \Psi_k(f)] \quad \text{y} \quad f \triangleleft \hat{\gamma} = \Psi_k^{-1}[\Psi_k(f) \cdot \hat{\gamma}],$$

respectivamente. Sea  $\delta \in LG$ . Definimos las acciones a izquierda y a derecha sobre  $LG$  como

$$\hat{\gamma} \triangleright \delta = \pi_{\text{inv}}(\hat{\gamma}) \cdot \delta \quad \text{y} \quad \delta \triangleleft \hat{\gamma} = \delta \cdot \pi_{\text{inv}}(\hat{\gamma}),$$

respectivamente

**Observación 4.15.** Estas acciones son  $\pi_{\text{WZW}}$ -equivariantes, es decir,

$$\pi_{\text{WZW}}(\hat{\gamma} \triangleright f) = \hat{\gamma} \triangleright \pi_{\text{WZW}}(f) \quad \text{y} \quad \pi_{\text{WZW}}(f \triangleleft \hat{\gamma}) = \pi_{\text{WZW}}(f) \triangleleft \hat{\gamma}.$$

Esto se ve inmediatamente a partir del hecho que  $\pi_{\text{inv}}$  es un homomorfismo, y que

$$\pi_{\text{inv}} \circ \Psi_k = \pi_{\text{WZW}}.$$

Esto nos permite establecer dos representaciones de la extensión central sobre el fibrado de línea.

**Definición 4.16.** Sea  $\hat{\gamma}$  un elemento de  $\widehat{LG}_k^{\mathbb{C}}$  con  $\pi(\hat{\gamma}) = \gamma$ , sea  $\zeta$  un elemento de  $LG$ . Entonces definimos la representación izquierda  $\rho$  de  $\widehat{LG}_k^{\mathbb{C}}$  sobre una sección  $Z : LG^{\mathbb{C}} \rightarrow L_{WZW}^k$  como

$$\rho(\hat{\gamma}) Z(\zeta) = \hat{\gamma} \triangleright Z(\hat{\gamma}^{-1} \triangleright \zeta).$$

Definimos la representación derecha  $\rho^*$  como

$$\rho^*(\hat{\gamma}) Z = Z(\zeta \triangleleft (\hat{\gamma}^*)^{-1}) \triangleleft \hat{\gamma}^*.$$

Por la Observación 4.1, llamamos **grupo de gauge** al grupo formado por los campos holomorfos  $\text{hol}(\Sigma, G^{\mathbb{C}})$ . Podemos usar la representación de  $\widehat{LG}_k^{\mathbb{C}}$  en  $L_{WZW}^k$  para definir una representación del grupo de gauge. En efecto, cada campo holomorfo  $\theta$  define un elemento de  $\widehat{LG}_k^{\mathbb{C}}$  a través del homomorfismo  $\hat{\theta} = \Psi_k(\exp[-S_{\Sigma}(\theta)])$  que se proyecta a  $\theta|_{\partial\Sigma}$  en  $LG^{\mathbb{C}}$ .

**Observación 4.17.** En este sentido, vemos que

$$\hat{\theta} \triangleright f = \exp[-S_{\Sigma}(\theta)] \bullet f \quad \text{y} \quad f \triangleleft \hat{\theta} = f \bullet \exp[-S_{\Sigma}(\theta)],$$

donde  $\bullet$  es el producto definido en  $L_{WZW}^k$  introducido en la Definición 4.8.

**Definición 4.18.** Sea  $Z$  una sección de  $L_{WZW}^k$  y  $\theta \in \text{hol}(\Sigma, G^{\mathbb{C}})$ . Definimos la **representación izquierda** del grupo de gauge  $\text{hol}(\Sigma, G^{\mathbb{C}})$  en  $\Gamma_{\text{hol}}(L_{WZW}^k)$  como

$$\hat{\rho}(\theta) Z = \rho(\hat{\theta}) Z,$$

donde  $\hat{\theta} = \Psi_k(\exp[-S_D(\theta)])$ . Análogamente, definimos la **representación derecha** del grupo de gauge  $\text{hol}(\Sigma, G^{\mathbb{C}})$  en  $\Gamma_{\text{hol}}(L_{WZW}^k)$  como

$$\hat{\rho}^*(\theta) Z = \rho^*(\hat{\theta}) Z.$$

**Observación 4.19.** Sean  $\varphi, \theta \in C^{\infty}(\Sigma, G^{\mathbb{C}})$  con  $\theta$  holomorfo en  $\Sigma \setminus \partial\Sigma$ . Entonces, obtenemos que

$$\hat{\theta} \triangleright \exp[-S_{\Sigma}(\varphi)] = \exp[-S_{\Sigma}(\theta\varphi)] \quad \text{y} \quad \exp[-S_{\Sigma}(\varphi)] \triangleleft \theta^* = \exp[-S_{\Sigma}(\varphi\theta^*)].$$

*Demostración.* Esto surge de aplicar la fórmula de Polyakov-Wiegmann de la Proposición 4.9 a la Observación 4.17, y reemplazar  $\bar{\partial}\theta = 0$  en  $\Gamma_{\Sigma}(\theta, \varphi)$  y  $\partial\theta^* = 0$  en  $\Gamma_{\Sigma}(\varphi, \theta^*)$ . En el segundo caso, usamos que  $\theta^*(z) = \theta(\bar{z})$  por la Observación 2.62.  $\square$

Para un campo suave  $\varphi \in C^{\infty}(\Sigma, G^{\mathbb{C}})$ , consideramos el elemento de  $LG^{\mathbb{C}}$  dado por  $\varphi|_{\partial\Sigma}$  como la condición de contorno del campo. Para un elemento  $\gamma \in LG^{\mathbb{C}}$  fijo, notaremos el conjunto de campos que satisfacen esta condición de contorno como  $C_{\Sigma}(\gamma) = \{\varphi \in C^{\infty}(\Sigma, G^{\mathbb{C}}) \mid \varphi|_{\partial\Sigma} = \gamma\}$ . Recordamos del Capítulo 1 que, si tuviésemos una medida  $\mu_{\Sigma}$  en  $C^{\infty}(\Sigma, G^{\mathbb{C}})$ , podríamos obtener una función de partición como un mapa

$$\begin{aligned} Z_{\Sigma} : LG^{\mathbb{C}} &\rightarrow L_{WZW}^k \\ \gamma &\mapsto \int_{C_{\Sigma}(\gamma)} \exp[-S_{\Sigma}(\varphi)] d\mu_{\Sigma}(\varphi). \end{aligned}$$

Si esta función de partición existiese, por la Observación 4.19, cumpliría que

$$Z_{\Sigma}(\theta \triangleright \gamma \triangleleft \eta^*) = \theta \triangleright Z_{\Sigma}(\gamma) \triangleleft \eta^*.$$

Motivados por esto, definimos la **función de partición** como una sección analítica que satisface

$$\rho(\theta) Z_{\Sigma} = Z_{\Sigma} = \rho^*(\theta) Z_{\Sigma}, \quad \forall \theta \in \text{hol}(\Sigma, G^{\mathbb{C}}).$$

## Capítulo 5

# Espectro de un modelo de Wess-Zumino-Witten

Sea nuevamente  $G^{\mathbb{C}}$  la complexificación de un grupo de Lie compacto, simple, conexo y simplemente conexo. El grupo de simetrías  $\text{hol}(\Sigma, G^{\mathbb{C}})$  actúa a través de la acción de un grupo distinto, la extensión central de  $LG^{\mathbb{C}}$ , usando el homomorfismo de grupos de Lie  $\theta \mapsto \Psi_k(\exp[-S_{\Sigma}(\theta)])$ . Es conveniente entonces estudiar las características de la acción de la extensión central de  $LG^{\mathbb{C}}$  sobre las secciones analíticas de  $L_{\text{WZW}}^k$ , buscando en ellas los módulos de peso máximo. Para esto, haremos uso del hecho que podemos ver los elementos de  $LG^{\mathbb{C}}$  como valores de borde de mapas suaves en el disco  $C^{\infty}(D, G^{\mathbb{C}})$ .

### 5.1 El álgebra afín

Un elemento arbitrario  $\hat{\gamma} \in \widehat{LG}_k^{\mathbb{C}}$  con  $\pi(\hat{\gamma}) = \gamma$  puede ser escrito como

$$\hat{\gamma} = z\Psi_k(\exp[-S_D(g)]),$$

para  $z \in \mathbb{C}$  y  $g \in C^{\infty}(D, G^{\mathbb{C}})$  con  $g|_{S^1} = \gamma$ . De esta manera, la identidad del grupo es

$$\hat{e} = \Psi_k(\exp[-S_D(e)]),$$

donde  $e : D \rightarrow G^{\mathbb{C}}$  es el mapa que vale constantemente  $e$ , y que actúa como la identidad por el Lema 4.10, y se proyecta a la identidad de  $LG$ , que es el mapa  $e : S^1 \rightarrow G^{\mathbb{C}}$  que vale constantemente  $e$ .

**Observación 5.1.** Sea  $X$  un elemento de  $\mathfrak{g}$ . Para  $n > 0$  entero positivo, definimos

$$\widehat{e^{tXz^n}} = \Psi_k(\exp[-S_D(\exp(tXz^n))]), \quad \forall (t, z) \in \mathbb{R} \times D,$$

y para  $n < 0$ ,

$$\widehat{e^{tX\bar{z}^{-n}}} = \Psi_k(\exp[-S_D(\exp(tX\bar{z}^{-n}))]), \quad \forall (t, z) \in \mathbb{R} \times D.$$

Para  $t \in \mathbb{R}$  fijo, estas son una funciones suaves en el disco, holomorfas para  $n \geq 0$ , antiholomorfas para  $n < 0$ . Entonces el álgebra de Lie  $\widehat{L\mathfrak{g}}^{\mathbb{C}}$  de la extensión central  $\widehat{LG}_k^{\mathbb{C}}$  es generada por

$$1 := \frac{d}{ds} e^{s-1} \Psi_k(\exp[-S_D(e)])|_{s=0} \quad y \quad Xz^n := \begin{cases} \frac{d}{dt} \widehat{e^{tXz^n}}|_{t=0} & n \geq 0 \\ \frac{d}{dt} \widehat{e^{tX\bar{z}^{-n}}}|_{t=0} & n < 0. \end{cases}$$

Las relaciones de conmutación son

$$[Xz^n, Yz^m] = [X, Y]z^{n+m} + nk\kappa(X, Y)\delta_{n+m} \quad \text{donde } \delta_{n+m} = \begin{cases} 1 & n+m=0 \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

*Demostración.* Para  $m, n$  positivos, las funciones en consideración son holomorfas, por lo que

$$\Gamma_D(e^{tXz^n}, e^{tYz^m}) = \Gamma_D(e^{tYz^m}, e^{tXz^n}) = 0.$$

Por la fórmula de Polyakov-Wiegmann en el fibrado de línea (ver Proposición 4.9), vale

$$\widehat{e^{tXz^n}} \cdot \widehat{e^{tYz^m}} = e^{tXz^n} e^{tYz^m} = e^{\widehat{W(t,z)}}. \quad (5.1)$$

Aquí por la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff tenemos  $W(t) = tXz^n + tYz^m + \frac{t^2}{2}[X, Y]z^{n+m} + \mathcal{O}(t^3)$ . Esto implica que  $\widehat{e^{tXz^n}}$  define un subgrupo uniparamétrico, al tener

$$\widehat{e^{tXz^n}} \cdot \widehat{e^{t'Xz^n}} = e^{\widehat{(t+t')Xz^n}}.$$

Dado un  $Xz^n$ , su exponencial en  $\widehat{LG}_k^{\mathbb{C}}$  es  $\widehat{\exp}(Xz^n) = \hat{\gamma}(1)$ , donde  $\hat{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow \widehat{LG}_k^{\mathbb{C}}$  es el único subgrupo paramétrico cuyo vector tangente en la identidad es  $Xz^n$ . Por lo tanto,  $\widehat{\exp}(tXz^n) = \widehat{e^{tXz^n}}$ . Dado que

$$\widehat{\exp}(tXz^n) \cdot \widehat{\exp}(tYz^m) = \widehat{\exp}\left(tXz^n + tYz^m + \frac{t^2}{2}[Xz^n, Yz^m] + \mathcal{O}(t^3)\right),$$

obtenemos de la ecuación (5.1) que, para  $n, m$  positivos,

$$[Xz^n, Yz^m] = [X, Y]z^{n+m}.$$

La demostración para el caso de  $m, n$  negativos es análoga.

Supongamos ahora  $n \geq 0, m < 0$ . Tenemos que  $\Gamma_D(e^{tXz^n}, e^{tYz^{-m}}) = 0$ , y también que

$$\begin{aligned} \Gamma_D(e^{tYz^{-m}}, e^{tXz^n}) &= \frac{ik}{4\pi} \int_D e^{-tYz^{-m}} \bar{\partial} e^{tYz^{-m}} \wedge_{\kappa} \partial e^{tXz^n} e^{-tXz^n} \\ &= \frac{ik}{4\pi} \int_D mnt^2 \kappa(X, Y) \bar{z}^{-m-1} z^{n-1} dz \wedge d\bar{z} \\ &= t^2 nk\kappa(X, Y) \delta_{m+n}. \end{aligned}$$

Esto tiene el efecto de multiplicar el producto  $\widehat{e^{tXz^n}} \cdot \widehat{e^{tYz^{-m}}}$  por un número  $e^{t^2 nk\kappa(X, Y) \delta_{m+n}} \in \mathbb{C}$ , que aporta al conmutador la correspondiente carga central  $nk\kappa(X, Y) \delta_{m+n}$ . El caso  $n < 0, m \geq 0$  es análogo.  $\square$

Esto da una construcción concreta del álgebra afín de la Sección 2.2.7, en el sentido de la ecuación (2.5).

**Definición 5.2.** Dadas las representaciones  $\rho, \rho^* : \widehat{LG}_k^{\mathbb{C}} \rightarrow \text{Aut}(\Gamma(L_{WZ}^k))$ , definimos representaciones de  $\widehat{Lg}^{\mathbb{C}}$  en  $\Gamma(L_{WZ}^k)$  como

$$J_n(X) = d\rho(Xz^n) \quad \text{y} \quad \bar{J}_n(X) = -d\rho^*(Xz^n).$$

Recordamos que  $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} + i\mathfrak{g}$  con  $\mathfrak{g}$  una forma real compacta,  $\mathfrak{h} = \mathfrak{t} + i\mathfrak{t}$  subálgebra de Cartan, que  $T$  es un toro maximal con álgebra de Lie  $\mathfrak{t}$ , y  $H$ , la exponenciación de  $\mathfrak{h}$ , o equivalentemente,  $H = T^{\mathbb{C}}$  la complexificación del toro. Dada una elección de raíces simples, para  $\pm\alpha > 0$  notamos los subgrupos

nilpotentes  $N_0^\pm$  generados por los  $e_\alpha$ , los operadores escalera del inciso 6 del Hecho 2.51, y denotamos los subgrupos de Borel  $B_0^\pm = N_0^\pm H$ .

Como se presentó en la Sección 2.2.7, la extensión central de  $\widehat{L\mathfrak{g}^\mathbb{C}}$  da lugar al álgebra afín  $\text{Aff}(\mathfrak{g})$ . Esta posee una forma bilineal simétrica invariante (ver ecuación (2.6)) y sus raíces están dadas por  $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  o bien  $\tilde{\alpha} = \alpha + n$  para  $\alpha$  raíz de  $\mathfrak{g}^\mathbb{C}$  y  $n \in \mathbb{Z}$ . Estas se corresponden a  $hz^n$  y  $e_\alpha z^n$  respectivamente, donde  $h$  es un elemento arbitrario de  $\mathfrak{h}$ . Dada una elección de raíces simples en  $\mathfrak{g}^\mathbb{C}$ , y tomando como raíz simple  $\phi = 1 - \theta$  donde  $\theta$  es raíz máxima de  $\mathfrak{g}^\mathbb{C}$ , las raíces positivas se corresponden a

$$\tilde{\alpha} = \alpha + n, \quad \text{donde } \begin{cases} n = 0, \alpha > 0 \\ n > 0, \alpha \text{ arbitrario.} \end{cases}$$

Vemos que los subespacios  $\mathfrak{n}^\pm$  generados por los  $e_{\tilde{\alpha}}$  con  $\pm\tilde{\alpha} > 0$  están dados por elementos de la forma  $X + Yz^{\pm n}$ , donde  $X \in \mathfrak{n}_0^\pm$ ,  $Y \in \mathfrak{g}^\mathbb{C}$ . A partir de esto observamos que, a través del mapa exponencial de  $G^\mathbb{C}$  para  $z$  fijo, los subgrupos  $N^\pm$  correspondientes a  $\mathfrak{n}^\pm$  están dados por los subgrupos de  $LG^\mathbb{C}$  que son valores de borde de mapas  $g : D \rightarrow G^\mathbb{C}$  con  $g(0) \in N_0^\pm$ , holomorfos en el caso de  $N^+$  y antiholomorfos en el caso de  $N^-$ . Definimos los subgrupos de Borel como  $N^\pm H^\mathbb{C}$ .

Sea  $w_0$  un representante de la reflexión del grupo de Weyl de  $G^\mathbb{C}$  que envía raíces positivas en negativas, es decir, que cumple  $w_0 \alpha w_0^{-1} = -\alpha$ ; entonces, viéndolo como un elemento de  $LG^\mathbb{C}$  (como curva constante), definimos  $M^\pm = w_0 N^\pm w_0^{-1}$ . Vemos entonces que es el subgrupo generado por los subespacios  $\mathfrak{m}^\pm$ , a su vez generados por elementos  $f_{\tilde{\alpha}}$  con  $\pm(-\alpha + n) > 0$ , y que puede identificarse como los valores de borde de mapas  $g : D \rightarrow G^\mathbb{C}$  con  $g(0) \in N_0^\mp$ , holomorfos en el caso de  $M^+$  y antiholomorfos en el caso de  $M^-$ . A través del levantamiento  $g \mapsto \Psi_k(\exp[-S_D(g)])$ , podemos considerar  $N^\pm$  y  $M^\pm$  como subgrupos de la extensión central.

## 5.2 Representaciones de peso máximo

El espectro estará definido a partir de las componentes de peso máximo de la representación de  $\widehat{LG}_k^\mathbb{C}$  dada en la Definición 4.18. Una sección  $Z \in \Gamma_{\text{hol}}(L_{\text{WZW}}^k)$  se dice de **peso máximo** o **primaria** si satisface las condiciones dadas a continuación para las acciones de  $\widehat{L\mathfrak{g}^\mathbb{C}}$  de la Definición 5.2.

(HW.1)  $Z$  se debe anular bajo la acción de los operadores de subida  $e_{\tilde{\alpha}}$  con  $\tilde{\alpha} > 0$ . Más precisamente, se debe cumplir que

$$J_n(X)Z = \bar{J}_n(X)Z = 0$$

para  $n > 0, X \in \mathfrak{g}$ , y que

$$J_0(e_\alpha)Z = \bar{J}_0(e_{-\alpha})Z = 0$$

para  $\alpha > 0$ .

(HW.2)  $Z$  debe ser un autovector del álgebra de Cartan. Más explícitamente, para  $\mathfrak{h} = \mathfrak{t} + i\mathfrak{t}$ , deben existir pesos a izquierda y derecha  $\omega_L, \omega_R \in \mathfrak{t}$  tales que

$$J_0(H)Z = i\langle \omega_L, H \rangle Z, \quad \bar{J}_0(H)Z = i\langle \omega_R, H \rangle Z \quad \forall H \in \mathfrak{h}.$$

Estas condiciones se levantan a la acción al nivel de  $\widehat{LG}_k^\mathbb{C}$  vía:

$$\rho(n)Z = Z = \rho^*(m)Z, \quad \forall n \in N^+, m \in M^+, \quad (5.2a)$$

$$\rho(e^H)Z = e^{i\langle \omega_L, H \rangle} Z, \quad \rho^*(e^H)Z = e^{i\langle \omega_R, H^* \rangle} Z, \quad \forall H \in \mathfrak{h}, \quad (5.2b)$$



donde si  $H = H_1 + iH_2$  con  $H_1, H_2 \in \mathfrak{t}$ , entonces  $H^* = H_1 - iH_2$ . Estamos tomando  $e^H$  como el levantamiento a través de  $\Psi_k(\exp[-S_D(-)])$  del mapa que vale constantemente  $e^H \in G$  para cualquier  $z \in D$ . Explícitamente, la ecuación (5.2a) establece que, para cada  $\gamma \in LG$ ,

$$Z(\gamma) = \exp(-S_D(n)) \bullet Z(n^{-1}\gamma) = Z(\gamma(m^*)^{-1}) \bullet \exp(-S_D(m^*)), \quad (5.3)$$

donde  $\bullet$  es el producto en  $L_{\mathbb{W}Z\mathbb{W}}^k$  introducido en la Definición 4.8. Por otro lado, la ecuación (5.2b) establece que

$$Z(\gamma) = e^{-i\langle \omega_L, H \rangle} \exp[-S_D(e^H)] \bullet Z(e^{-H}\gamma) = e^{-i\langle \omega_R, H^* \rangle} Z(\gamma e^{-H^*}) \bullet \exp[-S_D(e^{H^*})]. \quad (5.4)$$

**Teorema 5.3** (Teoremas de Bruhat y de Birkhoff). *Tenemos la descomposición de Bruhat*

$$G^{\mathbb{C}} = \bigsqcup_{w \in W} B_0^+ w N_0^-$$

y  $LG^{\mathbb{C}}$  se estratifica de manera análoga vía

$$LG^{\mathbb{C}} = \bigsqcup_{\tilde{w} \in \tilde{W}} B^+ \tilde{w} N^- \quad (5.5)$$

Además,  $B^+ N^-$  es denso en  $LG^{\mathbb{C}}$ .

*Demostración.* Ver el Teorema 8.7.2 de [25]. □

La sección  $Z$  está determinada por su valor en el denso  $B^+ N^- w_0 = B^+ w_0 M^-$ , ya que, usando las ecuaciones (5.3) y (5.4), tenemos que, para todo  $n \in N^+, m \in M^+, H \in \mathfrak{h}$ ,

$$Z(ne^H w_0 m^*) = e^{-i\langle \omega_L, H \rangle} \{ \exp[-S_D(n)] \bullet \exp[-S_D(e^H)] \bullet Z(w_0) \bullet \exp[-S_D(m^*)] \},$$

y  $Z(w_0) = z \exp[-S_D(w_0)]$  para algún  $z \in \mathbb{C}$ .

**Observación 5.4.** *Sigue de lo anterior y de la Observación 4.19 que la sección está definida en  $B^+ N^-$ , a menos de una constante compleja  $z$ , a través de*

$$Z(ne^H w_0 m^*) \propto e^{-i\langle \omega_L, H \rangle} \exp[-S_D(ne^H w_0 m^*)]. \quad (5.6)$$

*Para una sección definida en este denso, tenemos que los pesos a izquierda y derecha coinciden. Es decir,  $\omega_L = \omega_R := \omega$ .*

*Demostración.* Tenemos que

$$\begin{aligned} \rho^*(e^{\tilde{H}}) Z(ne^H w_0 m^*) &= Z(ne^H w_0 m^* e^{-\tilde{H}^*}) \bullet \exp[-S_D(e^{\tilde{H}^*})^*] \\ &= Z[ne^H w_0 e^{-\tilde{H}^*} (e^{-\tilde{H}} m e^{\tilde{H}})^*] \bullet \exp[-S_D(e^{\tilde{H}^*})] \\ &= Z(ne^{H+\tilde{H}^*} w_0 \tilde{m}^*) \bullet \exp[-S_D(e^{\tilde{H}^*})], \end{aligned}$$

donde al pasar al último renglón tomamos  $\tilde{m} = e^{-\tilde{H}} m e^{\tilde{H}}$  y usamos que, como  $w_0$  envía raíces positivas en negativas,  $[w_0, H^*] = -H^*$ . Dado que  $e^{-H} M^{\pm} e^H = M^{\pm}$ , tenemos que  $\tilde{m} \in M^+$ , y, usando la Observación 5.4, obtenemos la expresión

$$e^{-i\langle \omega_L, H+\tilde{H}^* \rangle} \{ \exp[-S_D(n)] \bullet \exp[-S_D(e^{H+H^*})] \bullet Z(w_0) \bullet \exp[-S_D(\tilde{m}^*)] \bullet \exp[-S_D(e^{\tilde{H}^*})] \}.$$

Usando la definición de  $\tilde{m}$ , obtenemos entonces que

$$\rho^*(e^{\tilde{H}}) Z(ne^H w_0 m^*) = e^{-i\langle \omega_L, \tilde{H}^* \rangle} Z(ne^H w_0 m^*).$$

□

Consideramos entonces la sección  $\bar{Z} \in \Gamma_{\text{hol}}(L_{\text{WZW}}^k)$  definida por  $Z(\gamma) = \bar{Z}(\gamma w_0)$ . Buscamos extender la sección  $Z$  definida en el denso  $B^+N^-w_0$  según la ecuación (5.6) a todo  $LG^{\mathbb{C}}$ . Entonces basta con definir  $\bar{Z}$  sobre  $B^+\tilde{w}N^-$  para  $\tilde{w} \neq e$ , y esto resultará posible solo para ciertos valores del peso  $\omega$ .

### 5.2.1 Condición de integralidad

Consideramos la acción a derecha de  $M^+$  en  $\Gamma(L_{\text{WZW}}^k)$  como una acción a derecha de  $N^-$ , que denotamos  $\tilde{\rho}$ , dada por

$$\tilde{\rho}(n)\bar{Z} = \rho^*(w_0^{-1}nw_0)Z, \quad \forall n \in N^-.$$

Pasamos al cociente a derecha  $B^+\backslash LG^{\mathbb{C}}$  para dar una versión más detallada del Teorema 5.3.

#### Teorema 5.5.

(i) La variedad compleja  $B^+\backslash LG^{\mathbb{C}}$  es la unión de estratos  $\Sigma_{\tilde{w}}$ , indexados por  $\tilde{w} \in \tilde{W}$ .

(ii) El estrato  $\Sigma_{\tilde{w}}$  es  $\tilde{w}N^-$ , la órbita de  $\tilde{w}$  bajo  $N^-$ , una subvariedad compleja de  $B^+\backslash LG^{\mathbb{C}}$  difeomorfa a

$$N^- \cap \tilde{w}^{-1}N^-\tilde{w}. \quad (5.7)$$

Más aún,  $\Sigma_1 \simeq N^-$  es denso en  $B^+\backslash LG^{\mathbb{C}}$ .

(iii) Para cada  $\tilde{w} \in \tilde{W}$ , sea  $U_{\tilde{w}} = \tilde{w}\Sigma_1$  la traslación por  $\tilde{w}$  del abierto denso  $\Sigma_1$ . El estrato  $\Sigma_{\tilde{w}}$  es un subconjunto cerrado de  $U_{\tilde{w}}$  para cada  $\tilde{w}$  y vale el difeomorfismo

$$U_{\tilde{w}} \simeq \Sigma_{\tilde{w}} \times A_{\tilde{w}}, \quad \text{donde } A_{\tilde{w}} = (N^+ \cap \tilde{w}^{-1}N^-\tilde{w}). \quad (5.8)$$

(iv)  $A_{\tilde{w}}$  es una variedad de dimensión finita y su dimensión (la codimensión de  $\Sigma_{\tilde{w}}$  en  $U_{\tilde{w}}$ ) es la **longitud**  $\ell(\tilde{w})$  de  $\tilde{w}$ , i.e. el número de raíces positivas que son transformadas en negativas por la acción de  $\tilde{w}$ .

(v) Tenemos que  $U_{\tilde{w}} \simeq \tilde{w}^{-1}N^-\tilde{w}$ .

*Demostración.* Ver Teorema 8.7.2 de [25]. El punto (iv) está dado porque el álgebra de Lie de  $A_{\tilde{w}}$  es generada por aquellos  $e_{\tilde{\alpha}}$  que satisfacen  $\tilde{\alpha} = \tilde{w}^{-1}(\tilde{\beta}) > 0$  para  $\tilde{\beta} < 0$ . El punto (v) se deduce de las ecuaciones (5.7) y (5.8).  $\square$

Entonces debemos definir la sección sobre cada  $B^+U_{\tilde{w}}$  para  $\tilde{w} \neq e$ . En vista de los isomorfismos (5.8) y (5.7), y por la invariancia de  $\bar{Z}$  ante la acción de  $N^-$  con  $\tilde{\rho}$ , basta con definir la sección en  $A_{\tilde{w}}$ . Esta es una variedad de dimensión finita, ya que su álgebra de Lie es generada por aquellos  $e_{\tilde{\alpha}}$  que satisfacen  $\tilde{\alpha} = \tilde{w}^{-1}(\tilde{\beta}) > 0$  para  $\tilde{\beta} < 0$ , por lo que su dimensión es la longitud  $\ell(\tilde{w})$  de  $\tilde{w}$ : el número de raíces positivas que son transformadas en negativas por la acción de  $\tilde{w}$ .

**Observación 5.6.** *Tenemos que*

$$U_{\tilde{w}} \backslash \Sigma_{\tilde{w}} \subset \bigcup_{\ell(\tilde{w}') < \ell(\tilde{w})} U_{\tilde{w}'}. \quad (5.9)$$

*Demostración.* Ver [25], inciso (iii) de la Proposición 7.3.3.  $\square$

Notamos que el único elemento del grupo de Weyl de longitud cero es la identidad  $e$ . Si suponemos definido  $\bar{Z}$  sobre  $U_{\tilde{w}}$  para el caso  $\ell(\tilde{w}) = 1$ , podemos extenderlo por inducción sobre  $\ell(\tilde{w})$  a cada  $U_{\tilde{w}}$ . Esto es porque la sección debe ser definida sobre

$$U_{\tilde{w}} \backslash \Sigma_{\tilde{w}} = (\Sigma_{\tilde{w}} \times A_{\tilde{w}}) \backslash \Sigma_{\tilde{w}} = \Sigma_{\tilde{w}} \times (A_{\tilde{w}} \backslash \{e\}),$$

pero, cuando la dimensión de  $A_{\tilde{w}}$  es mayor o igual a 2, podemos extender  $Z$  definida sobre  $A_{\tilde{w}} \setminus \{e\}$  a todo  $A_{\tilde{w}}$  por el Teorema de extensión de Hartog, que afirma que toda función holomorfa  $f : U \setminus K \rightarrow \mathbb{C}$  donde  $U \subseteq \mathbb{C}^n$  es abierto,  $K$  es compacto,  $U \setminus K$  es conexo y  $n \geq 2$ , entonces existe una función holomorfa  $\hat{f} : U \rightarrow \mathbb{C}$  que extiende  $f$  (ver [10], Teorema 2.3.2).

Si  $\ell(\tilde{w}) = 1$ , entonces  $\tilde{w}$  es una reflexión en alguna raíz simple  $\tilde{\alpha}$ , y podemos hacer un cálculo explícito, como se expone en la sección 3 de [4]. En efecto, en este caso, el subgrupo  $A_{\tilde{w}}$  es el generado por la raíz  $e_{\tilde{\alpha}}$ , y un punto arbitrario de  $B^+U_{\tilde{w}}$  está dado por

$$\gamma = b\tilde{w} \exp(se_{\tilde{\alpha}})n^*, \quad \text{para } s \in \mathbb{C}, b \in B^+, n \in N^-.$$

**Lema 5.7.** *El punto  $\tilde{w} \exp(se_{\tilde{\alpha}})$  de  $U_{\tilde{w}} = \tilde{w}\Sigma_1$  pertenece a  $\Sigma_1$  para  $s \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .*

*Demostración.* Consideramos una inmersión holomorfa  $\iota_{\tilde{\alpha}} : SL_2(\mathbb{C}) \rightarrow LG^{\mathbb{C}}$  dada infinitesimalmente por

$$d\iota_{\tilde{\alpha}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = e_{\tilde{\alpha}}, \quad d\iota_{\tilde{\alpha}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = e_{-\tilde{\alpha}}, \quad d\iota_{\tilde{\alpha}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \alpha^{\vee}.$$

En  $SL_2(\mathbb{C})$  se cumple que

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & s^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s^{-1} & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s^{-1} & 1 \end{pmatrix}.$$

Para  $s \neq 0$ , a través de  $\iota_{\tilde{\alpha}}$ , esto se traduce en  $LG^{\mathbb{C}}$  como

$$\tilde{w} \exp(se_{\tilde{\alpha}}) = \underbrace{\exp(s^{-1}e_{\tilde{\alpha}})}_{n_+(s)} \cdot \underbrace{\exp(-\log s \alpha^{\vee})}_{\exp(H(s))} \cdot \underbrace{\exp(-s^{-1}e_{-\tilde{\alpha}})}_{n_-^*(s)} = n_+(s) \exp(H(s)) n_-^*(s), \quad (5.10)$$

que pertenece a  $\Sigma_1 = B^+N^-$ . □

Definimos  $g(s) = n_+(s) \exp(H(s)) n_-^*(s)$ , que para cada valor de  $s \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  fijo resulta un lazo en  $LG^{\mathbb{C}}$ , y recordamos que podemos interpretar este lazo como el valor de borde de un producto de mapas holomorfos y antiholomorfos en una variable compleja distinta  $z \in D$ . Por medio de la ecuación (5.6) obtenemos de (5.10) que la sección está dada sobre  $U_{\tilde{w}} \cap \Sigma_1$  por

$$\bar{Z}(\gamma) \propto e^{-i\langle \omega, H_b + H(s) \rangle} \exp[-S_D(b)] \bullet \exp[-S_D(g(s))] \bullet \exp[-S_D(n^*w_0)] \quad (5.11)$$

donde  $\exp(H_b)$  es la componente en  $H$  de  $b$ . Para definir esta expresión sobre todo  $U_{\tilde{w}}$ , es necesario caracterizar el comportamiento de la amplitud  $\exp[-S_D(g(s))]$  para  $s \rightarrow 0$ .

**Lema 5.8.** *La amplitud  $\exp[-S_D(g(s))]$  está bien definida para  $s \rightarrow 0$*

Demostraremos el lema a continuación. Primero, observamos que el lema implica que, para que la sección (5.11) esté bien definida en  $s = 0$ , requerimos que el término  $e^{-i\langle \omega, H(s) \rangle}$  sea regular para  $H(s) = -\log s \alpha^{\vee}$ . Esto lleva a las condiciones

$$\langle \omega, \theta^{\vee} \rangle \leq k \quad \text{y} \quad \langle \omega, \alpha_j^{\vee} \rangle \geq 0, j = 1, \dots, l,$$

donde  $\{\alpha_j^{\vee}\}_{1 \leq j \leq l}$  son las  $l$  coraíces afines correspondientes a las raíces simples de  $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ , y  $\theta^{\vee}$  es la coraíz correspondiente a la raíz afín  $1 - \theta$ , donde  $\theta$  es la raíz maximal de  $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ .

*Demostración del Lema 5.8.* Definimos en el fibrado de línea sobre  $LG^{\mathbb{C}}$  una derivada covariante  $\frac{D}{Ds}$  asociado al transporte paralelo en  $L_{\text{WZW}}^k$  dado por

$$A_{\Gamma}[(p, z)]_{\omega_{\text{WZW}}} = [(\Gamma * p, z)]_{\omega_{\text{WZW}}},$$

donde  $\Gamma$  es una curva en  $LG^{\mathbb{C}}$ , y  $[(p, z)]_{\omega_{WZW}}$  es la clase de equivalencia de la Definición 3.9. Por la ecuación A.2.22 de [4], la derivada covariante de la amplitud es

$$\begin{aligned} \frac{D}{Ds} \exp[-S_D(g(s))] &= \left\{ \frac{ik}{4\pi} \int_D \left[ \partial \left( g^{-1}(s) \frac{\partial}{\partial t} g(s) \right) \right] \wedge_{\kappa} \left( g^{-1}(s) \bar{\partial} g(s) \right) \right. \\ &\quad \left. - \underbrace{\frac{ik}{8\pi} \oint_{|z|=1} \left( g^{-1}(s) \frac{\partial}{\partial s} g(s) \right) \wedge_{\kappa} \left( g^{-1}(s) dg(s) \right)}_{I_2(s)} \right\} \exp[-S_D(g(s)), \end{aligned} \quad (5.12)$$

donde la integración se realiza sobre la variable compleja  $z$  con  $|z| \leq 1$ , y  $g^{-1}(s)$  denota la inversa en el grupo de  $g(s)$  para cada  $s$  fijo.

Para  $|z| = 1$ ,  $g(s)$  es la composición de la inmersión holomorfa  $\iota_{\tilde{\alpha}} : SL_2(\mathbb{C}) \rightarrow LG^{\mathbb{C}}$  con el mapa holomorfo

$$s \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

por lo que la segunda integral  $I_2(s)$  en (5.12) resulta regular para todo valor de  $s \in \mathbb{C}$ . La primera integral en cambio involucra extender el lazo al interior del disco  $D$ , y esta extensión puede adquirir un comportamiento singular para  $s = 0$ . Integrando por partes y usando que  $\partial(g^{-1}(s)\bar{\partial}g(s)) = 0$ , obtenemos que

$$\frac{D}{Ds} \exp[-S_D(g(s))] = \left\{ \underbrace{\frac{ik}{4\pi} \int_{|z|=1} \left( g^{-1}(s) \frac{\partial}{\partial t} g(s) \right) \wedge_{\kappa} \left( g^{-1}(s) \bar{\partial} g(s) \right)}_{I_1(s)} - I_2(s) \right\} \exp[-S_D(g(s))].$$

Si  $\tilde{\alpha}$  es la raíz simple  $\alpha_j$  de  $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$  para  $j = 1, \dots, l$ , entonces  $\bar{\partial}g(s) = 0$ , el término  $I_1(s)$  se anula, y  $\exp[-S_D(g(s))]$  es regular en  $s = 0$ , ya que su derivada respecto a  $s$  lo es. Llamamos a la amplitud en este caso  $A_0(s)$ .

Si  $\tilde{\alpha} = \varphi = 1 - \theta$  con  $\theta$  raíz maximal de  $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ , entonces  $I_1(s) = \frac{k}{2s} \kappa(e_{\varphi}, e_{-\varphi})$ . Este factor aparece sumando en la derivada, y con la normalización usada tenemos que  $\kappa(e_{\varphi}, e_{-\varphi}) = 2$ , por lo que  $\exp[-S_D(g(s))]$  es proporcional a  $s^k A_0(s)$ , que es regular en  $s = 0$  ya que  $s^k$  lo es para  $k \geq 0$ .  $\square$

Con esto obtenemos que los estados de peso máximo en  $\Gamma_{\text{hol}}$  se corresponden a pares de pesos integrales. A partir de las secciones primarias  $Z$ , uno puede generar módulos que son representaciones irreducibles de  $\widehat{LG}_k^{\mathbb{C}} \times \widehat{LG}_k^{\mathbb{C}}$ , tomando combinaciones lineales de  $\rho(\theta_1)\rho^*(\theta_2)Z$  para  $\theta_1, \theta_2 \in \text{hol}(\Sigma, G^{\mathbb{C}})$ . Con esto, obtenemos lo que puede ser razonablemente llamado el espectro de la teoría. Como indica [4], es una pregunta abierta si el conjunto de estas secciones es denso en  $\Gamma_{\text{hol}}$  para alguna topología razonable, de manera tal que la descomposición en módulos construidos a partir de secciones primarias descompone a su vez a  $\Gamma_{\text{hol}}$ , pero que una posible obstrucción, la existencia en  $\Gamma_{\text{hol}}$  de pesos mínimos, no ocurre.

# Apéndice A

## Descomposición de Birkhoff

Daremos una breve presentación de la teoría que lleva a la descomposición de Birkhoff, resumiendo la presentación detallada de los Capítulos 6 a 8 de [25], con el objetivo de explicar las ideas que llevan al Teorema 5.5.

**Definición A.1.** Sea  $H$  un espacio de Hilbert. Un operador  $T : H \rightarrow H$  es **acotado** si existe  $M > 0$  tal que para todo  $v \in H$ ,  $\|Tv\| \leq M\|v\|$ . Un operador acotado es **de Fredholm** si tiene núcleo y conúcleo de dimensión finita, y es **de Hilbert-Schmidt** si  $\sum_{i \in I} \|Te_i\|^2 < \infty$  para  $\{e_i\}_{i \in I}$  una base ortonormal de  $H$ .

Consideramos  $H$  un espacio de Hilbert provisto de una **polarización**, *i.e.* tenemos una descomposición de la forma  $H = H_+ \oplus H_-$  para  $H_{\pm}$  subespacios cerrados ortogonales entre sí. La descomposición puede ser expresada entonces por el operador unitario  $J : H \rightarrow H$  tal que  $J|_{H_{\pm}}$  es  $\pm$  la inclusión de  $H_{\pm}$  en  $H$ .

**Definición A.2.** El **grupo lineal restringido**  $GL_{res}(H)$  es el subgrupo de  $GL(H)$  que consiste en aquellos operadores  $A$  tales que  $[J, A]$  es un operador de Hilbert-Schmidt. El grupo unitario restringido  $U_{res}(H)$  es el subgrupo de  $GL_{res}(H)$  de operadores unitarios.

Alternativamente, podemos decir que un elemento  $A$  de  $GL(H)$  puede ser escrito como

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

respecto a la polarización  $H = H_+ \oplus H_-$ . Entonces  $A$  pertenece a  $GL_{res}(H)$  si y solo si  $b$  y  $c$  son operadores de Hilbert-Schmidt. Como  $A$  es invertible, entonces  $a$  y  $d$  son invertibles módulo operadores de Hilbert-Schmidt, que son compactos; por lo tanto,  $a$  y  $d$  son operadores de Fredholm.

En lo que resta del apéndice fijamos  $H = L^2(S^1, \mathbb{C})$  el espacio de Hilbert de funciones de cuadrado integrables sobre el círculo. Para  $n \in \mathbb{N}$  consideremos el espacio de Hilbert  $H^{(n)} = L^2(S^1, \mathbb{C}^n)$  provisto de la polarización

$$H_+^{(n)} = \left\{ f \in H^{(n)} : f(\theta) = \sum_{k \geq 0} f_k e^{ik\theta}, \text{ donde } f_k \in \mathbb{C}^n \right\},$$

es decir, los valores de borde de funciones holomorfas en  $|z| < 1$ , y

$$H_-^{(n)} = \left\{ f \in H^{(n)} : f(\theta) = \sum_{k < 0} f_k e^{ik\theta}, \text{ donde } f_k \in \mathbb{C}^n \right\}.$$

Estos son los autoespacios positivos y negativos del generador de rotaciones  $-i \frac{d}{d\theta}$ .

**Definición A.3.** La *grassmaniana*  $Gr(H^{(n)})$  es el conjunto de todos los subespacios cerrados  $W$  de  $H^{(n)}$  tales que la proyección ortogonal

$$pr_+ : W \rightarrow H_+^{(n)}$$

es un operador de Fredholm, y la proyección ortogonal

$$pr_- : W \rightarrow H_-^{(n)}$$

es un operador de Hilbert-Schmidt.

Definimos la **dimensión virtual** de  $W$  como

$$\dim_{\text{virt}} W = \dim(\ker pr_+) - \dim(\text{coker } pr_+) = \dim(W \cap H_-) - \dim(W \cap H_+),$$

i.e.,  $\dim_{\text{virt}} W$  es el índice del operador de Fredholm  $pr_+$ . Podemos entender esta grassmaniana como el conjunto de subespacios de  $H^{(n)}$  que son comparables en tamaño con  $H_+^{(n)}$ .

Vemos que si  $W$  pertenece a  $Gr(H^{(n)})$ , y  $T$  es un operador de Hilbert-Schmidt que envía  $W$  en  $W^\perp$ , entonces el conjunto

$$W_T = \{v \in H^{(n)} \mid v = w + T(w)\}$$

también pertenece a  $Gr(H^{(n)})$ . En efecto, el conjunto de los operadores de Hilbert-Schmidt es un ideal en el álgebra de operadores acotados, y la suma de un operador de Fredholm y un operador de Hilbert-Schmidt es de Fredholm, entonces el mapa  $pr_- \circ (\text{Id} + T)$  es de Hilbert-Schmidt, mientras que el mapa  $pr_+ \circ (\text{Id} + T)$  es Fredholm. Llamamos  $U_W$  al subconjunto de  $Gr(H)$  dado por conjuntos de la forma  $W_T$ .

Será útil identificar  $H^{(n)} = L^2(S^1, \mathbb{C}^n)$  con  $H^{(1)} = H = L^2(S^1, \mathbb{C})$  de la siguiente forma.

**Observación A.4.** Dado  $(f_1, \dots, f_n) \in H^{(n)}$ , donde  $f_i \in H$  para  $i \in \{1, \dots, n\}$ , le asociamos la función  $\tilde{f} \in H$  dada por

$$\tilde{f}(\zeta) = \sum_{i=1}^n \zeta^{n-1} f_i(\zeta^i)$$

para  $\zeta \in S^1$ . Recíprocamente, a partir de  $\tilde{f} \in H$  podemos definir la componente  $f_i$  de  $(f_1, \dots, f_n) \in H^{(n)}$  como

$$f_i(z) = \frac{1}{n} \sum_{\zeta} \zeta^{-(i-1)} \tilde{f}(\zeta),$$

donde la suma sobre  $\zeta$  recorre las raíces  $n$ -ésimas de  $z$ . Este induce un isomorfismo entre  $H^{(n)}$  y  $H$ , que es una isometría y preserva las polarizaciones. Si  $\{\epsilon_i\}_{1 \leq i \leq n}$  es la base estándar de  $\mathbb{C}^n$ , entonces este isomorfismo hace corresponder  $\epsilon_i z^k$  con  $z^{nk+i-1}$ .

Consideramos la base ortonormal de  $H$  dada por  $\{z \mapsto z^k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ , donde  $z = e^{i\theta} \in S^1$ . Sea  $\mathcal{S}$  el conjunto formado por todos los subconjuntos  $S$  de  $\mathbb{Z}$  tales que la diferencia simétrica  $S \Delta \mathbb{N}$  es un conjunto finito. Dado  $S \in \mathcal{S}$ , definimos  $H_S$  el subespacio cerrado de  $H$  generado por  $z^s$  para  $s \in S$  y **cardinal virtual**  $\text{card}_{\text{virt}} S$  de  $S$  como la dimensión virtual de  $H_S$ , i.e.

$$\text{card}_{\text{virt}} S = \dim_{\text{virt}} H_S = \text{card}(S \setminus \mathbb{N}) - \text{card}(\mathbb{N} \setminus S).$$

**Proposición A.5.** Para cualquier  $W \in Gr(H)$  hay un conjunto  $S \in \mathcal{S}$  tal que la proyección ortogonal  $W \rightarrow H_S$  es un isomorfismo. Los conjuntos  $\{U_S\}_{S \in \mathcal{S}}$  donde  $U_S = U_{H_S}$  son abiertos y cubren  $Gr(H)$ .

*Demostración.* Ver [25], Proposición 7.1.6. □

Los operadores de Hilbert-Schmidt de  $H_S$  en  $H_S^\perp$  entonces están definidos por sus componentes  $T_{pq}$  para  $p \in \mathbb{Z} \setminus S$  y  $q \in S$ . Nos interesará particularmente la **grassmaniana suave**, la subvariedad densa  $\text{Gr}_\infty(H)$  dada por los gráficos de operadores tales que  $|p - q|^m T_{pq}$  está acotado para cada  $m$ .

Decimos que un elemento  $f$  de  $H$  es **de orden finito**  $s \in \mathbb{Z}$  si es de la forma

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^s f_k z^k, \quad \text{donde } f_s \neq 0. \quad (\text{A.1})$$

Para cualquier  $W \in \text{Gr}(H)$ , sea  $W^{\text{fin}}$  el conjunto de los elementos de orden finito en  $W$ . Como los elementos de orden finito son densos en cualquier  $H_S$  y la proyección  $W \rightarrow H_S$  es un isomorfismo para algún  $S$ , tenemos que  $W^{\text{fin}}$  es denso en  $W$ . Los elementos de  $W$  de orden menor o igual que  $m$  forman un espacio vectorial de dimensión finita  $W_m = W \cap z^{m+1}H_-$ . Sea

$$S_W = \{s \in \mathbb{Z} \text{ tal que } W \text{ contiene un elemento de orden } s \in \mathcal{S}\}.$$

El cardinal virtual de  $S_W$  coincide con la dimensión virtual  $d$  de  $W$ , ya que el número de elementos de  $S_W$  que son menores o iguales que  $m$  coincide con  $\dim W_m$ , y este es  $m + 1 + d$ , cuando  $m$  es un entero suficientemente grande tal que la proyección  $W \rightarrow z^{m+1}H_+$  sea sobreyectiva.

Un conjunto  $S$  de cardinal virtual  $d$  puede ser escrito canónicamente como

$$S = \{s_{-d}, s_{-d+1}, \dots\}$$

con  $s_{-d} < s_{-d+1} < \dots$  y  $s_k = k$  para  $k \in \mathbb{N}$  suficientemente grande. Dados  $S$  y  $S'$  en  $\mathcal{S}$  con el mismo cardinal virtual, definimos  $S \leq S'$  si y solo si  $s_k \geq s'_k$  para todo  $k$ . Definimos a su vez la **longitud**  $\ell(S)$  de  $S \in \mathcal{S}$  como  $\ell(S) = \sum_{k \geq 0} (k - s_k)$ , de lo que se obtiene que  $S < S'$  implica  $\ell(S) < \ell(S')$ .

Para cada  $s \in S_W$ , sea  $w_s$  un elemento de  $W$  de la forma (A.1) con  $f_s = 1$ . Entonces  $\{w_s : s \in S_W\}$  es una base algebraica de  $W^{\text{fin}}$  y la proyección  $W \rightarrow H_{S_W}$  es un isomorfismo. Podemos elegir  $w_s$  de manera única tal que se proyecta a  $z^s$ ; llamamos entonces  $\{w_s\}$  la base canónica de  $W$ .

**Definición A.6.** Para  $S \in \mathcal{S}$ , definimos el **estrato** de  $\text{Gr}(H)$  correspondiente a  $S$  como el conjunto

$$\Sigma_S = \{W \in \text{Gr}(H) \mid S_W = S\}.$$

**Definición A.7.** El grupo estrictamente triangular inferior  $\mathcal{N}_-$  de  $GL_{\text{res}}(H)$  es el subgrupo de todos los elementos  $A$  tales que  $A(z^k H_-) = z^k H_-$  y  $(A - \text{id}_H)(z^k H_-) \subset z^{k-1} H_-$  para todo  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Teorema A.8.**

1. El estrato  $\Sigma_S$  es una subvariedad contráctil cerrada del conjunto abierto  $U_S$ , de codimensión  $\ell(S)$ .
2.  $\Sigma_S$  es la órbita de  $H_S$  bajo  $\mathcal{N}_-$ .
3. Si  $W \in U_S$ , entonces  $S \geq S_W$ .

*Demostración.* Ver [25], Proposición 7.3.3. □

El grupo  $L_{C^1}GL_n(\mathbb{C})$  de mapas de clase  $C^1$  de  $S^1$  en  $GL_n(\mathbb{C})$  actúa en  $L^2(S^1, \mathbb{C}^n)$  punto a punto. Esto nos permite ver a los lazos como operadores sobre el espacio de Hilbert. Más adelante, podremos verlos como incluidos de cierta manera dentro de la grassmaniana, y estratificar el grupo de lazos según la Definición A.6.

**Proposición A.9.** Para  $\gamma \in L_{C^1}GL_n(\mathbb{C})$ , denotamos  $M_\gamma$  el operador asociado de  $H^{(n)}$  dado por la acción punto a punto. Este operador pertenece a  $GL_{\text{res}}(H^{(n)})$ .

*Demostración.* Primero expandimos  $\gamma$  como serie de Fourier de la forma

$$\gamma(\theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \gamma_k e^{ik\theta}, \quad \gamma_k \in \mathbb{C}^{n \times n}.$$

Con respecto a la base ortonormal canónica de  $H^{(n)}$  dada por  $\epsilon_i z^k$ , donde  $\{\epsilon_i\}_{1 \leq i \leq n}$  es la base canónica de  $\mathbb{C}^n$ , el operador  $M_\gamma$  está definido por sus componentes  $M_{pq} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  para  $p, q \in \mathbb{Z}$ . Tenemos entonces  $M_{pq} = \gamma_{p-q}$ . Vamos a demostrar que las componentes  $(H_+^n \rightarrow H_-^{(n)})$  y  $(H_-^{(n)} \rightarrow H_+^{(n)})$  de  $M_\gamma$  son Hilbert-Schmidt, *i.e.*

$$\sum_{p>0, q<0} \|M_{pq}\|^2 < \infty \quad \text{y} \quad \sum_{p<0, q>0} \|M_{pq}\|^2 < \infty.$$

Esto es equivalente a pedir

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} (|k| + 1) \|\gamma_k\|^2 < \infty,$$

lo cual se cumple para  $\gamma$  diferenciable, ya que el cuadrado de la norma  $L^2$  de la derivada  $\gamma'$  es  $\sum k^2 \|\gamma_k\|^2$ .  $\square$

De hecho, es posible trabajar con el grupo más grande de lazos " $\frac{1}{2}$ -diferenciables". Si  $\gamma = \sum \gamma_k z^k$  es una función a valores matriciales sobre  $S^1$ , entonces la norma de Hilbert-Schmidt del conmutador  $[M_\gamma, J]$  es

$$\|\gamma\|_{2, \frac{1}{2}} = \left( \sum |k| \|\gamma_k\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Esta es la norma de Sobolev correspondiente a funciones  $\frac{1}{2}$ -diferenciables. Sea  $A$  el álgebra de Banach de funciones a valores matriciales sobre  $S^1$  tales que

$$\|\gamma\| = \|\gamma\|_\infty + \|\gamma\|_{2, \frac{1}{2}} < \infty.$$

Llamamos  $L_{1/2}GL_n(\mathbb{C})$  al grupo de elementos invertibles de  $A$ , que resulta un grupo de Lie modelado sobre un espacio de Banach, y resulta ser el conmutante del operador  $M_z$  de multiplicación por  $z$  en  $GL_{\text{res}}(H^{(n)})$  (ver Proposición 6.3.3 de [25]).

Para  $\gamma \in LGL_n(\mathbb{C})$ , tenemos  $M_\gamma \in GL_{\text{res}}(H^{(n)})$ , y entonces  $LGL_n(\mathbb{C})$  actúa en  $\text{Gr}(H^{(n)})$ . Los subespacios  $W$  de la forma  $\gamma H_+$  para  $\gamma \in LGL_n(\mathbb{C})$  cumplen que  $zW \subset W$ , ya que la acción de  $\gamma$  conmuta con la multiplicación por el escalar  $z$ , lo que nos lleva a la definición siguiente.

**Definición A.10.** Sea  $Gr^{(n)}$  el subconjunto cerrado de  $Gr(H^{(n)})$  que consiste en los subespacios  $W$  tales que  $zW \subset W$ .

**Teorema A.11.** El grupo  $L_{1/2}U_n$ , dado por el conmutante del operador  $M_z$  de multiplicación por  $z$  en  $U_{\text{res}}(H^{(n)})$ , actúa de manera transitiva en  $Gr^{(n)}$ , y el grupo de isotropía de  $H_+$  es el grupo  $U_n$  de lazos constantes.

*Demostración.* Ver [25], Teorema 8.3.2.  $\square$

La proposición anterior muestra que  $\Omega_{1/2}U_n = L_{1/2}U_n/U_n$ , el grupo de lazos basados en la identidad, puede ser identificado como conjunto con  $Gr^{(n)}$ . Más aún, el grupo complejo  $L_{1/2}GL_n(\mathbb{C})$  también actúa en  $Gr^{(n)}$ , y  $L_{1/2}^+GL_n(\mathbb{C})$  es el estabilizador de  $H^+$  en  $L_{1/2}GL_n(\mathbb{C})$ , donde  $L_{1/2}^+GL_n(\mathbb{C})$  es el grupo formado por aquellos lazos de  $L_{1/2}GL_n(\mathbb{C})$  que son los valores de borde de mapas holomorfos de  $|z| < 1$  en  $GL_n(\mathbb{C})$ . De esto obtenemos el siguiente resultado (ver [25], Proposición 8.3.5).

**Proposición A.12.** El grupo  $L_{1/2}GL_n(\mathbb{C})$  es el producto

$$L_{1/2}U_n \cdot L_{1/2}^+GL_n(\mathbb{C}).$$



Volviendo al caso suave, el grupo  $\Omega U_n(\mathbb{C})$ , conformado por lazos suaves en  $U_n$  basados en la identidad, se corresponde con la intersección de  $\text{Gr}^{(n)}$  y la grassmaniana suave  $\text{Gr}_\infty(H^{(n)})$ , y podemos factorizar  $LGL_n(\mathbb{C})$  de manera análoga a la Proposición A.12. Podemos afirmar algo más preciso: si definimos  $L^+GL_n(\mathbb{C})$  como el grupo de lazos que son valores de borde de funciones holomorfas en  $|z| < 1$ , entonces el mapa de multiplicación  $\Omega U_n \times L^+GL_n(\mathbb{C}) \rightarrow LGL_n(\mathbb{C})$  es un difeomorfismo (ver [25], página 129).

Recordamos que los estratos de la Definición A.6 fueron formulados con respecto al espacio de Hilbert  $H = L^2(S^1, \mathbb{C})$ . Bajo la identificación entre  $H$  y  $H^{(n)}$  dada en la Observación A.4, podemos redefinir  $\text{Gr}^{(n)}$  como

$$\text{Gr}^{(n)} = \{W \in \text{Gr}(H) : \zeta^n W \subset W\}.$$

Tenemos entonces que si  $W \in \text{Gr}^{(n)}$  pertenece a  $\Sigma_S$ , entonces  $S + n \subset S$ . Los conjuntos  $S \in \mathcal{S}$  que satisfacen esta condición están completamente determinados por el complemento de  $S + n$  en  $S$ , que consiste en  $n$  elementos, uno para cada clase de congruencia módulo  $n$ . Se corresponden con los homomorfismos de  $S^1$  en el toro maximal de  $U_n$ : a cada homomorfismo  $z^a = \text{diag}(z^{a_1}, \dots, z^{a_n})$  le corresponde un conjunto  $S_a$  tal que su complemento en  $S_a + n$  es

$$\{na_1, na_2 + 1, \dots, na_n + n - 1\}.$$

El subespacio  $H_{S_a}$  generado por  $\{\zeta^k\}_{k \in S_a}$  es  $z^a H_+^{(n)}$ . Entonces podemos indexar los estratos por  $z^a$ : denotamos  $\Sigma_a = \Sigma_{S_a} \cap \text{Gr}^{(n)}$ ,  $H_a = H_{S_a}$  y  $U_a = U_{H_a}$ .

Notamos que el subgrupo  $N^-$  de lazos de  $LGL_n(\mathbb{C})$ , dado por valores de borde de funciones holomorfas para  $|z| > 1$  y que toman valores triangulares inferiores en  $\infty$ , está dado por la intersección entre  $LGL_n(\mathbb{C})$  y  $\mathcal{N}^-$  de la Definición A.7. Definimos  $L_1^-$  como el subgrupo de  $N^-$  que vale la matriz identidad de  $\mathbb{C}^{n \times n}$  en  $\infty$ .

**Proposición A.13.** *La órbita de  $H_a$  bajo  $N^-$  es  $\Sigma_a$ , y puede ser identificada con el subgrupo  $L_a^-$  de  $N^-$  dado por  $L_a^- = N^- \cap z^a L_1^- z^{-a}$ . Este subgrupo es difeomorfo al espacio homogéneo  $N^- / (N^- \cap z^a L_1^- z^{-a})$ .*

*Demostración.* Ver [25], Proposición 8.4.1. □

Como resumen, obtenemos entonces el teorema siguiente, que es una reformulación y ampliación del Teorema A.8.

**Teorema A.14.**

1.  $\Omega U_n$  es la unión de estratos  $\Sigma_a$  indexados por los homomorfismos  $z^a : S^1 \rightarrow U_n$ .
2.  $\Sigma_a$  es la órbita de  $z^a H_+$  bajo  $N^-$  y es difeomorfo a  $N^- / (N^- \cap z^a L_1^- z^{-a})$ . Para el homomorfismo trivial  $z^0$ ,  $\Sigma_0 = H_+$  es denso en  $\Omega U_n$ .
3. El estrato  $\Sigma_a$  es una subvariedad contraíble cerrada de  $U_a$  de codimensión compleja finita.
4. El conjunto  $U_a \setminus \Sigma_a$  está contenido en  $\bigcup_{S_b < S_a} U_b$ .

Con esto se obtiene un resultado análogo a la estratificación del Teorema 5.5 y la Observación 5.6. Para un grupo de Lie compacto general  $G$  el proceso es similar. Se debe tomar como espacio de Hilbert sobre el cual  $LG$  actúa a  $H^\mathfrak{g} = L^2(S^1, \mathfrak{g}_\mathbb{C})$ , que identificamos con  $H^{(n)}$  para  $n$  la dimensión de  $G$ . En este caso, la grassmaniana  $\text{Gr}^\mathfrak{g}$  es el subconjunto de  $\text{Gr}(H^\mathfrak{g})$  dado por los subespacios  $W$  tales que  $zW \subset W$ ,  $\overline{W}^\perp = zW$  (conjugando respecto al subgrupo compacto), y tales que  $W^{\text{sv}}$  es un álgebra de Lie, donde  $W^{\text{sv}}$  denota el subespacio de funciones suaves en  $W$ . Al pedir que sea un álgebra de Lie, nos referimos a que sea cerrado bajo la operación de corchete de  $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$  definida punto a punto. Referimos al Capítulo 8 de [25] para la exposición completa de este caso.

# Bibliografía

- [1] Michael Atiyah, *Topological quantum field theories*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **68** (1988), 175–186 (1989). MR1001453
- [2] Igor Dolgachev, *Introduction to String Theory* (2001), available at <http://www.math.lsa.umich.edu/~idolga/stringy.pdf>. Notas para la Universidad de Michigan.
- [3] Pavel I. Etingof, Igor B. Frenkel, and Alexander A. Kirillov Jr., *Lectures on representation theory and Knizhnik-Zamolodchikov equations*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 58, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998. MR1629472
- [4] G. Felder, K. Gawdzki, and A. Kupiainen, *Spectra of Wess-Zumino-Witten models with arbitrary simple groups*, Comm. Math. Phys. **117** (1988), no. 1, 127–158. MR946997
- [5] Daniel S. Freed, *Lectures on topological quantum field theory*, Integrable systems, quantum groups, and quantum field theories (Salamanca, 1992), NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., vol. 409, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1993, pp. 95–156. MR1262837
- [6] ———, *Dirac charge quantization and generalized differential cohomology*, Surveys in differential geometry, Surv. Differ. Geom., vol. 7, Int. Press, Somerville, MA, 2000, pp. 129–194, DOI 10.4310/SDG.2002.v7.n1.a6. MR1919425
- [7] William Fulton and Joe Harris, *Representation theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 129, Springer-Verlag, New York, 1991. A first course: Readings in Mathematics. MR1153249
- [8] Doron Gepner and Edward Witten, *String theory on group manifolds*, Nuclear Phys. B **278** (1986), no. 3, 493–549, DOI 10.1016/0550-3213(86)90051-9. MR862896
- [9] Brian Hall, *Lie groups, Lie algebras, and representations*, 2nd ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 222, Springer, Cham, 2015. An elementary introduction. MR3331229
- [10] Lars Hörmander, *An introduction to complex analysis in several variables*, 3rd ed., North-Holland Mathematical Library, vol. 7, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1990. MR1045639
- [11] Boris Khesin and Robert Wendt, *The geometry of infinite-dimensional groups*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics], vol. 51, Springer-Verlag, Berlin, 2009. MR2456522
- [12] Anthony W. Knap, *Lie groups beyond an introduction*, 2nd ed., Progress in Mathematics, vol. 140, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2002. MR1920389
- [13] V. G. Knizhnik and A. B. Zamolodchikov, *Current algebra and Wess-Zumino model in two dimensions*, Nuclear Phys. B **247** (1984), no. 1, 83–103, DOI 10.1016/0550-3213(84)90374-2. MR853258
- [14] Hiroshi Konno, *Geometry of loop groups and Wess-Zumino-Witten models*, Symplectic geometry and quantization (Sanda and Yokohama, 1993), Contemp. Math., vol. 179, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994, pp. 139–160, DOI 10.1090/conm/179/01938. MR1319606
- [15] Bertram Kostant, *Quantization and unitary representations. I. Prequantization*, Lectures in modern analysis and applications, III, Springer, Berlin, 1970, pp. 87–208. Lecture Notes in Math., Vol. 170. MR0294568
- [16] Jeffrey M. Lee, *Manifolds and differential geometry*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 107, American Mathematical Society, Providence, RI, 2009. MR2572292
- [17] Joachim Koch, *Frobenius Algebras and 2D Quantum Field Theories*, 1st ed., London Mathematical Society student texts, vol. 59, Cambridge University Press, Cambridge, 2004. MR2037238
- [18] Juan Maldacena and Hiroshi Ooguri, *Strings in AdS<sub>3</sub> and the SL(2,  $\mathbf{R}$ ) WZW model. I. The spectrum*, J. Math. Phys. **42** (2001), no. 7, 2929–2960, DOI 10.1063/1.1377273. Strings, branes, and M-theory. MR1840325

- [19] Juan Maldacena, Hirosi Ooguri, and John Son, *Strings in AdS<sub>3</sub> and the SL(2, **R**) WZW model. II. Euclidean black hole*, J. Math. Phys. **42** (2001), no. 7, 2961–2977, DOI 10.1063/1.1377039. Strings, branes, and M-theory. MR1840326
- [20] Juan Maldacena and Hirosi Ooguri, *Strings in AdS<sub>3</sub> and the SL(2, **R**) WZW model. III. Correlation functions*, Phys. Rev. D (3) **65** (2002), no. 10, 106006, 43, DOI 10.1103/PhysRevD.65.106006. MR1919037
- [21] Andrei Moroianu, *Lectures on Kähler geometry*, London Mathematical Society Student Texts, vol. 69, Cambridge University Press, Cambridge, 2007. MR2325093
- [22] James R. Munkres, *Topology*, Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, 2000. Second edition of [ MR0464128]. MR3728284
- [23] Karl-Hermann Neeb, *Lectures on Infinte Dimensional Lie Groups* (2015), available at <http://math.ipm.ac.ir/Isfahan/Workshop/2015/Workshop/Lie%20Group%20Theory/infl ect.pdf>. IPM-Isfahan workshop.
- [24] A. M. Polyakov and P. B. Wiegmann, *Goldstone fields in two dimensions with multivalued actions*, Phys. Lett. B **141** (1984), no. 3-4, 223–228, DOI 10.1016/0370-2693(84)90206-5. MR750642
- [25] Andrew Pressley and Graeme Segal, *Loop groups*, Oxford Mathematical Monographs, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1986. Oxford Science Publications. MR900587
- [26] G. B. Segal, *The definition of conformal field theory*, Differential geometrical methods in theoretical physics (Como, 1987), NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., vol. 250, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1988, pp. 165–171. MR981378
- [27] Charles A. Weibel, *An introduction to homological algebra*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 38, Cambridge University Press, Cambridge, 1994. MR1269324
- [28] Raymond O. Wells Jr., *Differential analysis on complex manifolds*, 3rd ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 65, Springer, New York, 2008. With a new appendix by Oscar Garcia-Prada. MR2359489
- [29] J. Wess and B. Zumino, *Consequences of anomalous Ward identities*, Phys. Lett. **37B** (1971), 95–97, DOI 10.1016/0370-2693(71)90582-x. MR342064
- [30] Edward Witten, *Nonabelian bosonization in two dimensions*, Comm. Math. Phys. **92** (1984), no. 4, 455–472. MR736403