Institut Joseph Fourier
Université Grenoble Alpes

Travail d'Etude et de Recherche

Le Spin comme une conséquence de la Théorie des Représentations

Auteure :
Lucie DEVEY

Enseignant référent :
Estanislao HERSCOVICH

14 mai 2019

Sommaire

1 Principes de la Mécanique Quantique

1.1 Historique et interprétations

En 1900, Max Planck introduit (sans y croire d'un point de vue physique) l'idée de la quantification de l'énergie en proposant une formule pour le spectre (énergie en fonction de la fréquence) du corps noir. Dans son calcul, il écrit $E = h\nu$ (les échanges d'énergie sont quantifiés : ne peuvent être que des multiples de $h\nu$). Albert Einstein, dans son premier article de 1905, prend au sérieux l'article de Planck et postule que la lumière elle-même était constituée de "quanta d'énergie". La constante de Planck, après avoir fait son entrée dans la lumière, se trouve ensuite introduite dans la matière. En 1913, Niels Bohr propose un modèle de l'atome d'hydrogène, contraire à la mécanique classique, qui explique la stabilité et l'existence de raies spectrales de l'atome d'hydrogène. La physique quantique moderne naît pendant les années 1925 et 1926, lorsque Werner Heisenberg et Erwin Schrödinger développent respectivement la mécanique des matrices et la mécanique ondulatoire, que Paul Dirac démontrera comme étant équivalentes.

Un des préceptes de la mécanique quantique est que le fait de mesurer perturbe le système d'une manière imprédictible. Par conséquent, des mesures sous les mêmes conditions ne donneront pas le même résultat. Ceux-ci suivent, néamoins, une distribution de probabilité qui évolue déterministement tant que les mesures ne sont pas faites. Cette interprétation de la mécanique quantique a été introduite par Niels Bohr et est appelée **Interprétation de Copenhague**. Elle permet d'expliquer la dualité onde-corpuscule.

Pendant longtemps, Albert Einstein et d'autres, ont refusé cette interprétation (de Copenhague) de la physique quantique. Ils ne doutaient pas de l'efficacité opératoire de la mécanique quantique mais ils pensaient que la description statistique des états était due à l'incomplétude de la physique quantique et qu'il existait des variables cachées avec lesquelles les états ne serait plus décrits de manière statistique. C'est ce que l'on a appelé l'**Interprétation des variables cachées**.
Cette interprétation est née suite à un débat (congrès Solvay de 1927) entre Albert Einstein et Niels Bohr pendant lequel Einstein aurait déclaré "Dieu ne joue pas aux dés" ("Gott würfelt nicht") et Bohr aurait répondu "Mais qui êtes-vous pour dire à Dieu ce qu'il doit faire ?".
Quelques temps plus tard, en janvier 1935, Einstein a répondu par l'article EPR co-écrit avec Boris Podolsky et Nathan Rosen dans lequel l'expérience de pensée évoquée devait réfuter l'interprétation de Copenhague. 30 ans plus tard, David Bohm propose une nouvelle expérience dans laquelle les observables ne sont plus à spectre continu mais discret (il considère le spin). Aujourd'hui, on ne voit plus de paradoxe dans cet article grâce à ce que l'on appelle la non-séparabilité quantique.

Dans ce TER, nous allons voir comment le spin apparaît lorsque l'on introduit la théorie des représentations.

1.2 Formalisation mathématique

Définition 1.1. *Soit E un espace vectoriel complexe.*
Soit ϕ une application de $E \times E$ dans $\mathbb{C}$.
On dit que ϕ est une forme sesquilinéaire sur E si et seulement si ϕ est linéaire par rapport à la deuxième variable et semi-linéaire par rapport à la première i.e. pour tout $(x,y) \in E^2$:
- *$y \mapsto \phi(x,y)$ est linéaire*
- *$x \mapsto \phi(x,y)$ est semi-linéaire c'est-à-dire*

$$\phi(\lambda x_1 + x_2, y) = \overline{\lambda}\phi(x_1, y) + \phi(x_2, y),$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $(x_1, x_2) \in E^2$.

On dit que ϕ est hermitienne si elle vérifie la "symétrie hermitienne" :

$$\phi(y,x) = \overline{\phi(x,y)}.$$

Un produit scalaire hermitien est une forme sequilinéaire, hermitienne, définie, positive.
Un espace de Hilbert (complexe) est un espace vectoriel complexe muni d'un produit scalaire hermitien $\langle\, .\, |\, .\, \rangle$ et qui est complet.

Définition 1.2. *On dit qu'un espace de Hilbert est séparable s'il possède un sous-ensemble au plus dénombrable dense.*

1.2.1 États

On considère, désormais, $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert complexe et séparable, muni d'un produit scalaire $\langle | \rangle$.

Définition 1.3. *Soient $\mathbb{K}$ un corps et V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $V \neq \{0\}$.*
Si $x, y \in V \setminus \{0\}$, on définit la relation d'équivalence $\sim$ par

$$x \sim y \iff \exists \lambda \in \mathbb{K}^* \mid y = \lambda x.$$

L'espace projectif associé à V est

$$P(V) = V \setminus \{0\}/ \sim .$$

Définition 1.4 (Etat). *Un état est un élément de l'epace projectif $P(\mathcal{H})$. Il s'écrit*

$$[\psi] = \{c.\psi \mid c \in \mathbb{C}^*\}, \quad \psi \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$$

Définition 1.5. *Soit $f \in \mathcal{H}$. Le B-rayon $\dot{f}$ engendré par f est l'ensemble des vecteurs $f\tau$ où $\tau \in \mathbb{C}$ est un scalaire de module 1. La norme d'un B-rayon $\dot{f}$ est $|\dot{f}| = ||f||$, où $||f|| = \sqrt{\langle f|f \rangle}$. Un rayon unitaire est un B-rayon de norme 1.*

Proposition 1. *Tout B-rayon s'écrit $\dot{f} = \rho\dot{e}$ où $\rho \geq 0$ et $\dot{e}$ est un rayon unitaire. De plus, si $\rho \neq 0$, alors $\dot{e}$ est unique.*

Preuve. Soit $\dot{f}$ un B-rayon. Posons $\rho = ||f||$ qui ne dépend pas du représentant choisi et $e = f/||f||$. Alors, $\dot{f} = \rho\dot{e}$. □

Proposition 2. *Chaque état est déterminé par un unique rayon unitaire.*

Preuve. Soit $\mathcal{B}$ l'ensemble des B-rayons et $\sim$ la relation d'équivalence définie plus haut.
L'application $\mathcal{H}^* \to \mathcal{B}$ donnée par $v \mapsto \dot{\frac{v}{||v||}}$ passe au quotient : si $v \sim w$ alors il existe $c \in \mathbb{C}^*, v = c.w$ et $\dot{\frac{w}{||w||}} = \frac{c}{|c|}\dot{\frac{v}{||v||}} = \dot{\frac{v}{||v||}}$.
On obtient alors une bijection

$$P(\mathcal{H}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}$$

□

1.2.2 Observables

Définition 1.6. *Soient $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ deux espaces de Hilbert sur $\mathbb{C}$, avec des produits scalaires $\langle\ |\ \rangle_{\mathcal{H}}$ et $\langle\ |\ \rangle_{\mathcal{H}'}$ respectivement. Toute application continue $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ s'appelle un opérateur (borné).*

Notation. Pour alléger les écritures, l'image d'un vecteur $x \in \mathcal{H}$ par l'opérateur T sera noté Tx.

Théorème 1. *Si $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ est un opérateur linéaire, alors il existe un unique opérateur $T^* : \mathcal{H}' \to \mathcal{H}$ tel que*

$$\forall x \in \mathcal{H},\ \forall y \in \mathcal{H}', \langle Tx, y\rangle_{\mathcal{H}'} = \langle x, T^*y\rangle_{\mathcal{H}}.$$

L'opérateur T^* s'appelle l'adjoint de T.

Preuve. Voir [Bre99][Partie 2.6]. □

Définition 1.7. *Si $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ est un opérateur tel que $T^* = T$, alors il est dit auto-adjoint.*

Définition 1.8 (Observable). *Une observable (une grandeur physique) est un opérateur auto-adjoint $\hat{A}$ de $\mathcal{H}$.*

Le sens de cet opérateur est de donner la possibilité de décomposer un état quantique quelconque ψ en une combinaison linéaire d'états propres, chacun de ces états propres étant un état possible résultant de l'opération de mesure.

On supposera par la suite que $\mathcal{H}$ est de dimension finie.

Proposition 3. *En dimension finie, un endomorphisme auto-adjoint $\hat{A}$ d'un espace hermitien est diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres.*

Preuve. Montrons tout d'abord que toutes les valeurs propres de $\hat{A}$ sont réelles.
Soit a une valeur propre de $\hat{A}$ associée à ψ. Alors,

$$\bar{a}\langle\psi|\psi\rangle = \langle\hat{A}\psi|\psi\rangle = \langle\psi|\hat{A}\psi\rangle = a\langle\psi|\psi\rangle,$$

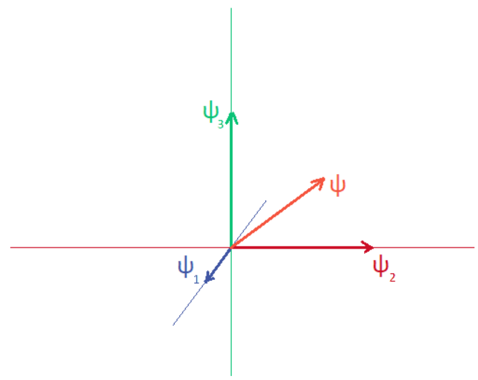
où l'on a utilisé la linéarité pour la première égalité, le fait que $\hat{A}$ est auto-adjoint pour la deuxième égalité et la semi-linéarité pour la troisième. Un vecteur propre étant par définition non nul, a est réelle.
Finissons la preuve par récurrence.
Si a une valeur propre de $\hat{A}$, ψ un vecteur propre associé à a et $F = \mathbb{C}.\psi$ alors $F^\perp$ est stable par $\hat{A}$. En effet, si $\psi_{F^\perp} \in F^\perp$, alors $\forall \psi_F \in F$,

$$\langle\hat{A}\psi_{F^\perp}|\psi_F\rangle = \langle\psi_{F^\perp}|\hat{A}\psi_F\rangle = a\langle\psi_{F^\perp}|\psi_F\rangle = 0.$$

Ainsi, $\hat{A}$ se restreint en un endomorphisme autoadjoint de $F^{\perp}$, pour lequel (par hypothèse de récurrence) il existe une base orthonormée propre. On conclut en complétant celle-ci par ψ. $\square$

Définition 1.9. *Soit $\hat{A}$ une observable. On pose $\{a_i \mid i \in I\}$ l'ensemble de ses valeurs propres et $\{\psi_i \mid i \in I\}$ celui de ses vecteurs propres qui forment une base orthonormée de $\mathcal{H}$. (I est fini)*
La probabilité de mesurer a_{i_0}, sachant que le système est dans l'état $\psi = \sum_{i\in I}\langle\psi|\psi_i\rangle\psi_i$, est

$$\mathbb{P}_\psi(\hat{A} = a_{i_0}) = |\langle\psi|\psi_{i_0}\rangle|^2.$$



Remarque. Dans cette figure, les droites sont des droites complexes, elles renferment deux dimensions réelles.

Remarque. En physique, on dit d'habitude que après avoir mesuré disons a_i, le système est dans l'état ψ_i et plus dans son état ψ initial. C'est ce que l'on appelle la réduction du paquet d'onde.

Remarque fondamentale. Il faut faire attention au fait suivant : en mécanique quantique, les états sont déterminés avec une précision maximale. Il est faux de dire que nous ne pouvons connaître les états qu'avec une certaine probabilité. Le caractère statistique des états est entièrement intrinsèque et le fait de faire une mesure sur un système change l'état du système.

1.3 De la mécanique classique à la mécanique quantique

Une expérience connue est l'**expérience d'Otto Stern et de Walther Gerlach**. Réalisée en 1922, elle met en évidence l'existence du spin. Elle consiste à faire passer des atomes d'argent (de moment magnétique nul) dans un champ magnétique qui devrait donc n'avoir aucune influence. Ce n'est pas ce que l'on observe : on introduit donc une observable appelée spin qui est comparable à un moment cinétique intrinsèque. Seulement, après le champ magnétique, le faisceau d'atomes d'argent se sépare en deux faisceaux : les atomes d'argent ont donc deux états de spin possibles ($-1/2$ et $1/2$). L'analogie avec un moment cinétique intrinsèque est donc limitée (celui-ci pourrait prendre n'importe quels valeurs).

Dans cette expérience, comme dans celle de Bohm, la dimension est finie : le spin ne peut prendre qu'un nombre fini N de valeurs. La transition du classique au quantique s'est faite en passant d'une algèbre commutative aux éléments réels d'une algèbre complexe munie d'un involution $*$; les éléments réels étant les éléments fixes par $*$. Nous allons formaliser cela par la suite. C'est cette structure plus riche qui permet de voir émerger de nouvelles notions comme le spin et d'expliquer des expériences comme celle de Stern et Gerlach.

	Mécanique classique	Mécanique quantique
Espace	ensemble X_N à N élts	espace de Hilbert $\mathbb{C}^N$
Etats	point of X_N	points de $P(\mathbb{C}^N)$
Observables	fonction réelle sur X_N	matrice $N \times N$ hermitienne
Espace des observables	$\mathbb{R}$-algèbre	"réels" d'une $\mathbb{C}$-algèbre

1.4 Représentations

Définition 1.10. *Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif. Une $\mathbb{K}$-algèbre (associative, non unitaire) est une structure algébrique $(\mathcal{O}, +, \cdot, \mu)$ telle que :*

1. *$(\mathcal{O}, +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$*
2. *La loi μ est définie de $\mathcal{O} \times \mathcal{O}$ dans $\mathcal{O}$ (loi de composition interne)*
3. *La loi μ est associative.*
4. *La loi μ est bilinéaire.*

Définition 1.11. *Soient $(A, *_A)$ et $(B, *_B)$ deux algèbres complexes involutives. $f : (A, *_A) \to (B, *_B)$ est un morphisme d'algèbre si :*

1. *$\forall (x, y) \in A^2$, $f(x +_A y) = f(x) +_B f(y)$,*
2. *$\forall (x, y) \in A^2$, $f(x \times_A y) = f(x) \times_B f(y)$,*
3. *$\forall x \in A$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $f(\lambda \cdot_A x) = \lambda \cdot_B f(x)$,*
4. *$f(1_A) = 1_B$.*

Définition 1.12. *Soit $\mathcal{O}$ est une algèbre complexe et μ sa multiplication.
L'algèbre opposée à $\mathcal{O}$ est notée $\mathcal{O}^{op}$ est le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{O}$ muni de la multiplication μ' définie par $\mu'(x, y) = \mu(y, x)$.
L'algèbre conjuguée à $\mathcal{O}$ est $\overline{\mathcal{O}} = \{\bar{x} | x \in \mathcal{O}\}$ muni des lois :*

- $\bar{x} + \bar{y} = \overline{x + y}$
- $\lambda \cdot \bar{x} = \overline{\bar{\lambda} \cdot x}$
- $\mu(\bar{x}, \bar{y}) = \overline{\mu(x, y)}$

Remarque. L'algèbre conjuguée à $\overline{\mathcal{O}}$ se distingue de $\mathcal{O}$ uniquement par sa multiplication par un scalaire.

Définition 1.13. *Soit $(\mathcal{O}, \mu)$ une algèbre complexe. On appelle involution un morphisme d'algèbres $* : \mathcal{O} \to \overline{\mathcal{O}}^{op}$ tel que $*(*(x)) = x$ pour tout $x \in \mathcal{O}$.*

Notation. On notera parfois $*(x)$, x^*.

Exemple. Soit V un espace de Hilbert. $End(V)$ est une algèbre involutive, son involution est $M \mapsto M^* =^t \bar{M}$.

Définition 1.14. *Soient $(A, *_A)$ et $(B, *_B)$ deux algèbres complexes involutives. $f : (A, *_A) \to (B, *_B)$ est un morphisme d'algèbre involutive si :*

1. *f est un morphisme d'algèbre,*
2. *$f \circ *_A = *_B \circ f$*

Définition 1.15. *Soit $(\mathcal{O}, *)$ une algèbre complexe involutive.
Une représentation de $\mathcal{O}$ dans un espace de Hilbert V est un morphisme d'algèbres involutives*

$$\pi : \mathcal{O} \to End(V).$$

Remarque. Essentiellement, une représentation concrétise un objet algébrique abstrait en décrivant ses éléments par des matrices et les opérations sur ces éléments en termes d'addition matricielle et de produit matriciel.

Définition 1.16 (État). *Soit une ρ $*$-représentation d'une algèbre complexe involutive $\mathcal{O}$ dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Pour tout vecteur unitaire $\psi \in \mathcal{H}$, on définit l'état correspondant à ψ par l'application $\lambda_\psi : \mathcal{O} \to \mathbb{C}$ donnée par $a \mapsto \langle \rho(a)\psi | \psi \rangle$ pour tout $x \in \mathcal{O}$.*

Définition 1.17. *Soit $(\mathcal{O}, *)$ une algèbre complexe involutive. Les éléments réels de $\mathcal{O}$ sont les éléments $x \in \mathcal{O}$ vérifiant $x^* = x$.*

Si $\mathcal{O}$ est une algèbre complexe munie d'une involution $*$ (ses éléments réels sont les observables), alors on peut identifier chaque état du système à une fonctionnelle

$$\lambda : a \mapsto \lambda(a)$$

Si a est une observable, $\lambda(a)$ est la valeur de a attendue dans l'état considéré.
λ est linéaire, positive (car si a est une observable, $a^* = a$ et $\lambda(a^*a) \geq 0$).
C'est ce que l'on peut retrouver dans l'ouvrage suivant [Var04].

2 Symétries et Représentations projectives unitaires

On considère toujours $\mathcal{H}$, un $\mathbb{C}$-espace de Hilbert séparable, muni d'un produit scalaire $\langle \; | \; \rangle$.

2.1 Symétries

Définition 2.1. *Pour tout $\psi \in \mathcal{H}$ non nul, on considère $[\psi]$ le point de $P(\mathcal{H})$ qu'il définit.*
Noter que l'application $p : P(\mathcal{H})^2 \to \mathbb{R}$ donnée par $([\psi], [\psi']) \mapsto \frac{|\langle \psi, \psi' \rangle|^2}{||\psi||^2 ||\psi'||^2}$ est bien définie car

$$p([c\psi], [c'\psi']) = \frac{|c|^2 |c'|^2 |\langle \psi, \psi' \rangle|^2}{|c|^2 |c'|^2 ||\psi||^2 ||\psi'||^2} = p([\psi], [\psi']).$$

Une symétrie est une bijection $T : P(\mathcal{H}) \to P(\mathcal{H})$ telle que

$$p(T[\psi], T[\psi']) = p([\psi], [\psi']).$$

Définition 2.2. *Soit U un opérateur de $\mathcal{H}$.*
U est dit unitaire si $\langle U\psi | U\psi' \rangle = \langle \psi | \psi' \rangle$.
U est dit anti-unitaire si $\langle U\psi | U\psi' \rangle = \overline{\langle \psi | \psi' \rangle} (= \langle \psi' | \psi \rangle)$.

Théorème 2. *[Théorème de Wigner] A toute symétrie T correspond un opérateur unitaire ou anti-unitaire U de $\mathcal{H}$ tel que*

$$T : [\psi] \mapsto [U\psi].$$

Preuve. Cette preuve est basée sur celle présente dans [Bar64]. On rappelle la correspondance bijective entre les états et les rayons unitaires ou B-rayon de norme 1 (voir Proposition 2).
On considère T qui vérifie :

1. T est défini pour tout rayon unitaire $\dot{e}$ de $\mathcal{H}$ et $\dot{e}' = T\dot{e}$ est un rayon unitaire de $\mathcal{H}$.
2. $\langle T\dot{e}_1 | T\dot{e}_2 \rangle = \langle \dot{e}_1 | \dot{e}_2 \rangle$
3. $T\dot{e}_1 = T\dot{e}_2 \Rightarrow \dot{e}_1 = \dot{e}_2$
4. $\forall \dot{e}'$ rayon unitaire $\in \mathcal{H}'$, $\exists \dot{e} \in \mathcal{H}$ tel que $\dot{e}' = T\dot{e}$

Nous allons montrer qu'à un tel T correspond un opérateur $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ donné par $a \mapsto a' = Ua$ tel que

$$a' \in T\dot{a} \text{ si } a \in \dot{a} \tag{1}$$

et tel que

$$\begin{cases} U(a+b) = Ua + Ub \\ U(\lambda a) = \chi(\lambda) Ua \\ \langle Ua | Ub \rangle = \chi(\langle a | b \rangle) \end{cases} \tag{2}$$

où $\chi(\lambda) = \lambda\ \forall\lambda$ (U sera unitaire) ou $\chi(\lambda) = \lambda^*\ \forall\lambda$ (U sera anti-unitaire).

Cas unidimentionnel : $\mathcal{H}$ contient un unique rayon unitaire $\dot{e}$.

T est complètement déterminé par $\dot{e}' = T\dot{e}$.
Les deux opérateurs $U_1(\alpha e) = \alpha e'$ et $U_2(\alpha e) = \alpha^* e'$ sont compatibles avec T. Le premier est unitaire, le second anti-unitaire.

Considérons à présent que la dimension est supérieure à 2.
L'unitarité ou l'anti-unitarité de l'opérateur U que l'on trouvera est maintenant fixée par T et ne dépend plus du U choisi.

Première étape : Commençons par étendre T d'une fonction sur les rayons unitaires à une fonction sur les B-rayons : on pose

$$T(\rho\dot{e}) = \rho T(\dot{e}).$$

Cela a une incidence sur U qui doit vérifier les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} ||Ua|| = ||a|| \\ U(\lambda a) = \chi_a(\lambda) Ua \\ |\langle Ua|Ub\rangle| = |\langle y|z\rangle| \end{cases} \tag{3}$$

avec $\chi_a(1) = 1$ et $|\chi_a(\lambda)| = |\lambda|$.

Deuxième étape : Soit $\dot{e}$ un rayon unitaire de $\mathcal{H}$ et posons $\dot{e}' = T\dot{e}$.

Pour tout $e \in \dot{e}$ et $e' \in \dot{e}'$, on définit

$$Ue = e'$$

qui est compatible avec (2). Posons $e \in \dot{e}$. Soient $\mathcal{P} = e^\perp$.
Tout vecteur a de $\mathcal{H}$ s'écrit de façon unique $a = e\alpha + z$ où $z \in \mathcal{P}$ et $\alpha = \langle e|a\rangle$.
On va construire U pour les a tels que $\alpha = 0$ ou 1.

Remarquons, tout d'abord, que si $\dot{f}$ et $\dot{g}$ sont deux rayons orthogonaux, $\dot{f}'$ et $\dot{g}'$ sont leur image par T et $a = \lambda f + \mu g$, alors $\forall a' \in T\dot{a}$,

$$a' = \lambda' f' + \mu' g', \tag{4}$$

où $|\lambda'| = |\lambda|$ et $|\mu'| = |\mu|$.
En effet, comme $||a'|| = ||a||$, $|\langle f'|a'\rangle| = |\langle f|a\rangle|$ et $|\langle g'|a'\rangle| = |\langle g|a\rangle|$,

$$\begin{aligned} ||a' - \langle f'|a'\rangle f' - \langle g'|a'\rangle g'||^2 &= ||a'||^2 - |\langle f'|a'\rangle|^2 - |\langle g'|a'\rangle|^2 \\ &= ||a||^2 - |\langle f|a\rangle|^2 - |\langle g|a\rangle|^2 \\ &= ||a - \langle f|a\rangle f - \langle g|a\rangle g||^2 = 0 \end{aligned}$$

Soient maintenant $z \in \mathcal{P}\backslash\{0\}$, $a = e + z$ et $f = \frac{z}{||z||}$.

Si $a' \in T\dot{a}$ et $f' \in T\dot{f}$, alors par (4),

$$a' = e'\alpha'_0 + f'\alpha'_1,$$

où $|\alpha'_0| = 1$ et $|\alpha'_1| = ||z||$.
Donc $T\dot{a}$ contient un unique vecteur $a'' = a'\alpha_0'^{-1}$ de la forme $e' + f'\beta'$.
On considère V qui à z associe $f'\beta' = f'\alpha'_1\alpha_0'^{-1}$ et on définit

$$U(e + z) = e' + Vz. \tag{5}$$

Autrement dit,

$$Uz = Vz \quad \forall z \in \mathcal{P}. \tag{6}$$

Troisième étape : Analysons V de plus près :
Tout d'abord, si $w, x \in \mathcal{P}$, d'après (3), (5) et (6),

$$\begin{cases} |\langle Vw|Vx\rangle| = |\langle w|x\rangle| \\ |\langle e' + Vw|e' + Vx\rangle| = |\langle e + w|e + x\rangle| \end{cases} \iff |1 + \langle Vw|Vx\rangle| = |1 + \langle w|x\rangle|$$

Or, $|1+\xi|^2 = 1 + |\xi|^2 + 2\mathfrak{Re}(\xi)$. Donc,

$$\mathfrak{Re}(\langle Vw|Vx\rangle) = \mathfrak{Re}(\langle w|x\rangle). \tag{7}$$

Ensuite, considérons $y, z \in \mathcal{P} \setminus \{0\}$.
Posons $f_1 = \frac{y}{||y||}$. Deux cas se présentent :
Soit $z = \sigma f_1$ et alors on pose $\mathcal{L} = \langle f_1\rangle$ l'espace vectoriel engendré par f_1.
Soit $\exists f_2 \in \mathcal{P}$ tel que $||f_2|| = 1$, $\langle f_1|f_2\rangle = 0$ et $z = \sigma f_1 + \tau f_2$ et alors on pose $\mathcal{L} = \langle f_1, f_2\rangle$ l'espace vectoriel engendré par f_1 et f_2.
On notera f_ρ, et $f'_\rho = V f_\rho$, ρ étant soit égal à 1, soit pouvant varier entre 1 et 2.
On a donc $V(\lambda f_\rho) = \chi_\rho(\lambda) f'_\rho$ avec $|\chi_\rho(\lambda)| = |\lambda|$ (cela résulte de (3)).
Si on applique (7) à αf_ρ et βf_ρ, on obtient

$$\mathfrak{Re}(\chi_\rho(\alpha)^* \chi_\rho(\beta)) = \mathfrak{Re}(\alpha^* \beta) \tag{8}$$

Une autre conséquence de (7) est que $\forall x = \sum_\rho \alpha_\rho f_\rho$, ($Vx = \sum_\rho \alpha'_\rho f'_\rho$ avec $|\alpha'_\rho| = |\alpha_\rho|$), on peut montrer que $\alpha'_\rho = \chi_\rho(\alpha_\rho)$.
En effet, si $\alpha_\rho = 0$, le résultat est immédiat.
Si $\alpha_\rho \neq 0$,

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \langle \alpha_\rho^{*-1} f_\rho | \alpha_\rho f_\rho\rangle = 1 \in \mathbb{R} \\ \langle \alpha_\rho^{*-1} f_\rho | x\rangle = 1 \in \mathbb{R} \end{cases} \\ \overset{(7)}{\Longrightarrow} &\begin{cases} \langle V\alpha_\rho^{*-1} f_\rho | V\alpha_\rho f_\rho\rangle = \langle \alpha_\rho^{*-1} f_\rho | \alpha_\rho f_\rho\rangle \\ \langle V\alpha_\rho^{*-1} f_\rho | Vx\rangle = \langle \alpha_\rho^{*-1} f_\rho | x\rangle \end{cases} \\ \Longrightarrow &\begin{cases} \chi_\rho(\alpha_\rho^{*-1})^* \chi_\rho(\alpha_\rho) = 1 \\ \chi_\rho(\alpha_\rho^{*-1})^* \alpha'_\rho = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Ce qui implique

$$\alpha'_\rho = \chi_\rho(\alpha_\rho).$$

De plus, si ρ peut prendre deux valeurs (1 et 2), alors considérons $w = f_1 + f_2$. On a $Vw = f'_1 + f'_2$ et

$$\begin{aligned} V(\alpha w) &= \chi_1(\alpha) f'_1 + \chi_2(\alpha) f'_2 \\ &= \chi_w(\alpha)(f'_1 + f'_2) \qquad \Longrightarrow \quad \chi_1(\alpha) = \chi_2(\alpha). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$V(\sum_\rho \alpha_\rho f_\rho) = \sum_\rho \chi_1(\alpha_\rho) f'_\rho. \tag{9}$$

Que peut-on dire de χ_1 ?
D'après (3), on sait que $|\chi_1(i)| = 1$ et d'après (8), $\mathfrak{Re}(\chi_1(i)) = 0$.
Donc, $\chi_1(i) = \pm i = \eta i$.

$$\text{Ainsi, } \mathfrak{Im}(\chi_1(\beta)) = \mathfrak{Re}(i^*\chi_1(\beta)) \overset{(8)}{=} \eta\mathfrak{Re}(i^*\beta) = \eta\mathfrak{Im}(\beta).$$

De plus, d'après (8), $\mathfrak{Re}(\chi_1(\beta)) = \mathfrak{Re}(\beta)$.

$$\text{Donc, } \begin{cases} \chi_1 : \beta \mapsto \beta & \text{si } \eta = 1 \\ \chi_1 : \beta \mapsto \beta^* & \text{si } \eta = -1 \end{cases}$$

Il est ensuite aisé de vérifier que

$$\begin{cases} \chi_1(\alpha+\beta) = \chi_1(\alpha) + \chi_1(\beta) \\ \chi_1(\alpha\beta) = \chi_1(\alpha)\chi_1(\beta) \\ \chi_1(\alpha^*) = \chi_1(\alpha)^* \end{cases} \tag{10}$$

Ce qui nous donne finalement si on utilise (9) et (10) :

$$\text{Pour tout } y, z \in \mathcal{P} \setminus \{0\}, \begin{cases} V(y+z) = Vy + Vz \\ V(\lambda z) = \chi(\lambda z) \\ \langle Vy|Vz\rangle = \chi(\langle y|z\rangle) \end{cases}$$

Quatrième étape : Il reste à définir U pour les $a = \alpha e + z$ où $z \in \mathcal{P}$ et $\alpha \notin \{0,1\}$. Soit $b = e + \alpha^{-1}z$ tel que $a = \alpha b$ et $\dot{T}a = |\alpha|\dot{T}b$. Nous avons défini $Ub \in \dot{T}b$ dans la deuxième étape. Ainsi, $\chi(\alpha)Ub \in \dot{T}a$ et on peut définir $Ua = \chi(\alpha)(e' + V(z\alpha^{-1}))$, c'est-à-dire, par l'étape 3,

$$U(\alpha e + z) = \chi(\alpha)e' + Vz.$$

Ainsi défini, U satisfait les conditions du système (2) (d'après la troisième étape) et donc convient.

Cinquième étape : Unicité de U.
Considérons que $dim(\mathcal{H}) \geq 2$. Soient U_1 et U_2 compatibles avec T. Alors,

$$\forall a \in \mathcal{H},\ \ U_2 a = \tau(a)U_1 a.$$

Montrons que τ est une fonction constante.
Tout d'abord, si a et b sont indépendants et $c = a + b$, alors $U_2 c = \tau(c)U_1 c$ et $U_2 a + U_2 b = \tau(a)U_1 a + \tau(b)U_1 b$. Donc,

$$\tau(a)U_1 a + \tau(b)U_1 b = \tau(c)(U_1 a + U_1 b).$$

Or, le fait que a et b sont indépendants implique que $U_1 a$ et $U_1 b$ le sont également. Effectivement, a et b sont indépendants $\iff G(a,b) = \langle a|b\rangle\langle b|a\rangle - |\langle a|b\rangle|^2 > 0$ et G est inchangée par U car U est soit unitaire, soit anti-unitaire. Par conséquent, $\tau(c) = \tau(a) = \tau(b)$.
Ensuite, considérons $a_0 \neq 0 \in \mathcal{H}$.
Soit $a \neq 0$. Si a est indépendant de a_0, alors $\tau(a) = \tau(a_0)$.
Si $a = \mu a_0$, alors comme $dim(\mathcal{H}) \geq 2$, il existe b indépendant de a_0 (et de a). Ainsi, $\tau(a_0) = \tau(b) = \tau(a)$. Par conséquent,

$$U_2 = \tau(a_0)U_1$$

et si χ est associé à U_1, alors $U_2(\lambda a) = \tau(a_0)U_1(\lambda a) = \tau(a_0)\chi(\lambda)U_1 a = \chi(\lambda)U_2 a$: il est aussi associé à U_2. □

2.2 Représentations unitaires projectives

On note $U(\mathcal{H})$ l'ensemble des opérateurs unitaires sur $\mathcal{H}$.
On note $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ les unimodulaires.

Définition 2.3. *Un groupe topologique est un groupe $(G, \times)$ muni d'une topologie pour laquelle les applications $m : G^2 \to G$ et $i : G \to G$ données respectivement par $m(x, y) = x \times y$ et $i(x) = x^{-1}$ sont continues.*

Définition 2.4. *Soit $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique.*
X est dit séparé (ou de Hausdorff) si deux points quelconques de X admettent toujours des voisinages disjoints.
X est dit compact s'il vérifie la propriété de Borel-Lebesgue :

"De tout recouvrement ouvert de X, on peut extraire un recouvrement fini."

X est dit localement compact si tout point de X admet un voisinage compact.
Une base de X est une partie A de $\mathcal{O}$ telle que tout ouvert de $\mathcal{O}$ soit réunion d'ouverts de A.

On suppose désormais que les groupes topologiques sont Hausdorff.

Définition 2.5. *Un groupe de Lie est un ensemble G muni de deux structures compatibles :*

1. *Une structure de groupe donnée par une loi de composition*

$$m : \begin{array}{ccc} G \times G & \longrightarrow & G \\ (x, y) & \longmapsto & x \times y \end{array},$$

et dont on note $i : \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & x^{-1} \end{array}$ *l'application "passage à l'inverse".*

2. *Une structure de variété lisse (donnée par une classe d'équivalence d'atlas de classe $\mathcal{C}^\infty$).*
3. *Compatibilité : Les application m et i sont lisses.*

Définition 2.6. *Un morphisme de groupes de Lie est un morphisme de groupes lisse.*

Définition 2.7. *Un groupe est semi-simple s'il n'a pas de sous-groupe distingué abélien connexe non trivial.*

2.2.1 Représentation unitaire projective et second groupe de cohomologie

Dans cette partie, j'ai utilisé le livre suivant [BG00].

On considère G un groupe topologique localement compact, à base dénombrable.

Définition 2.8. *Une fonction mesurable $\pi : G \to U(\mathcal{H})$ est appelée représentation projective (unitaire) de G sur $\mathcal{H}$ s'il existe une fonction mesurable $m : G \times G \to \mathbb{T}$ telle que*

$$\pi(1) = Id \ \ et \ \ \pi(g_1 g_2) = m(g_1, g_2)\pi(g_1)\pi(g_2) \ \ \forall (g_1, g_2) \in G^2 \qquad (\aleph)$$

Si $m = 1$, on dit que π est une représentation ordinaire (unitaire).

Définition 2.9. *Deux représentations $\pi_1 : G \to U(\mathcal{H}_1)$ et $\pi_2 : G \to U(\mathcal{H}_2)$ sont dites équivalentes s'il existe un opérateur unitaire $U : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ et une application $f : G \to \mathbb{T}$ mesurable tels que*

$$\pi_2(g)U = f(g)U\pi_1(g) \ \ \forall g \in G.$$

Définition 2.10. *Soit $m : G \times G \to \mathbb{T}$ une fonction mesurable.*
Alors, m est un multiplicateur de G si

$$m(g,1) = m(1,g) = 1 \qquad \text{et} \quad m(g_1,g_2)m(g_1g_2,g_3) = m(g_1,g_2g_3)m(g_2,g_3), \quad (\Gamma)$$

pour tout $(g,g_1,g_2,g_3) \in G^4$. On note $M(G)$ l'ensemble des multiplicateurs de G.

Propriété 1. *$M(G)$ est un groupe abélien pour la loi*

$$(m_1 \cdot m_2)(g_1,g_2) = m_1(g_1,g_2) \cdot m_2(g_1,g_2).$$

Preuve. Montrons, tout d'abord, que $M(G)$ est un groupe.
$\tilde{1} : G \times G \to \mathbb{T}$ donné par $\tilde{1}(g_1,g_2) = 1$ est dans $M(G)$ (c'est l'élément neutre). Donc $M(G) \neq \emptyset$. Ensuite, $M(G)$ est stable par multiplication. Si $m_1, m_2 \in M(G)$, alors $m_1m_2 \in M(G)$ car $(\mathbb{T}, \times)$ étant abélien, on peut multiplier les équations (Γ) et réordonner les termes. $M(G)$ est également stable par inverse : si $m \in M(G)$, alors $\frac{1}{m} \in M(G)$ en inversant (Γ).
Enfin, $M(G)$ est abélien : si $m_1, m_2 \in M(G)$, alors $m_1m_2 = m_2m_1$ car $(\mathbb{T}, \times)$ abélien. □

Proposition 4. *Si π est une représentation projective de G associé à m, alors m est un multiplicateur de G.*

Preuve. D'une part, $\pi(1) = I$ et $\pi(g \times 1) = m(g,1)\pi(g)\pi(1)$ donc $m(g,1) = 1$. De même, $m(1,g) = 1$.
D'autre part, soient $(g_1,g_2,g_3) \in G^3$, alors

$$\begin{aligned} m(g_1,g_2)m(g_1g_2,g_3) &= \frac{f(g_1)f(g_2)}{f(g_1g_2)} \frac{f(g_1g_2)f(g_3)}{f(g_1g_2g_3)} = \frac{f(g_1)f(g_2)f(g_3)}{f(g_1g_2g_3)} \\ &= \frac{f(g_1)f(g_2g_3)}{f(g_1g_2g_3)} \frac{f(g_2)f(g_3)}{f(g_2g_3)} = m(g_1,g_2g_3)m(g_2,g_3) \end{aligned}$$

□

Définition 2.11. *Un multiplicateur $m \in M(G)$ est dit exact s'il existe une application $f : G \to \mathbb{T}$ mesurable telle que*

$$m(g_1,g_2) = \frac{f(g_1)f(g_2)}{f(g_1g_2)},$$

pour tout $(g_1,g_2) \in G^2$. On note $M_0(G)$ l'ensemble des multiplicateurs exactes de G.

Proposition 5. *Soit $m \in M(G)$. Alors, m est exact si, et seulement si toute représentation projective associée à m est équivalente à une représentation ordinaire.*

Preuve. On suppose que m est exacte. Alors, il existe une application $f : G \to \mathbb{T}$ mesurable telle que $m(g_1,g_2) = \frac{f(g_1)f(g_2)}{f(g_1g_2)}$ pour tout $(g_1,g_2) \in G^2$. Ainsi, si π est une représentation projective associée à m, alors

$$\pi(g_1g_2) = m(g_1,g_2)\pi(g_1)\pi(g_2) = \frac{f(g_1)f(g_2)}{f(g_1g_2)}\pi(g_1)\pi(g_2),$$

pour tout $(g_1, g_2) \in G^2$. Autrement dit, πf est une représentation ordinaire (et elle est équivalente à π).

Réciproquement, soit π_1 est une représentation projective de G sur $\mathcal{H}_1$ associée à m_1 telle qu'il existe π_2 une représentation ordinaire de G sur $\mathcal{H}_2$ ($m_2 = 1$), il existe $U : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ opérateur unitaire et il existe $f : G \to \mathbb{T}$ mesurable tels que $\pi_2(g)U = f(g)U\pi_1(g) \ \ \forall g \in G$.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H}_1 \arrow[r, "\pi_1(g)"] \arrow[d, "U"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathcal{H}_1 \arrow[d, "U"] \\ \mathcal{H}_2 \arrow[r, "\pi_2(g)"'] & \mathcal{H}_2 \end{tikzcd}$$

On peut traduire cela par

$$g \cdot U(v) = f(g)U(g \cdot v) \ \ \forall v \in \mathcal{H}_1, \ \forall g \in G,$$

si l'on définit l'action de G sur $\mathcal{H}_i$ par

$$\forall g \in G, \ \forall v \in \mathcal{H}_i, \ g \cdot v = \pi_i(g)(v).$$

$\forall (g_1, g_2) \in G^2, \ \forall v \in \mathcal{H}_1,$

$$\begin{aligned} U((g_1 g_2) \cdot v) = & \quad U(m_1(g_1 g_2) \times g_1 \cdot (g_2 \cdot v)) \\ \Rightarrow f(g_1 g_2)^{-1} \times (g_1 g_2) \cdot U(v) = & \quad m_1(g_1 g_2) \times U(g_1 \cdot (g_2 \cdot v)) \\ \Rightarrow f(g_1 g_2)^{-1} \times g_1 \cdot (g_2 \cdot U(v)) = & \quad m_1(g_1 g_2) \times f(g_1)^{-1} \times g_1 \cdot (U(g_2 \cdot v)) \\ \Rightarrow f(g_1 g_2)^{-1} \times g_1 \cdot (g_2 \cdot U(v)) = & \quad m_1(g_1 g_2) \times f(g_1)^{-1} f(g_2)^{-1} \times g_1 \cdot (g_2 \cdot U(v)) \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$f(g_1 g_2)^{-1} = m_1(g_1 g_2) \times f(g_1)^{-1} f(g_2)^{-1}.$$

Ceci signifie que m_1 est exacte. □

Propriété 2. *$M_0(G)$ est un sous-groupe de $M(G)$.*

Preuve. $\tilde{1} : \begin{array}{ccc} G \times G & \longrightarrow & \mathbb{T} \\ (g_1, g_2) & \longmapsto & 1 \end{array} \in M_0(G)$ (avec $f = id$) donc $M_0(G) \neq \emptyset$.
Si $m_1, m_2 \in M_0(G)$, alors $m_1 m_2 \in M_0(G)$ (avec $f = f_1 \times f_2$).
Si $m \in M_0(G)$, alors $\frac{1}{m} \in M(G)$ (avec $\frac{1}{f}$). □

Définition 2.12. *Le groupe quotient $M(G)/M_0(G)$ est noté $H^2(G, \mathbb{T})$ et est appelé deuxième goupe de cohomologie.*

Notation. Un élément de $H^2(G, \mathbb{T})$ sera noté $[m]$ pour un certain $m \in M(G)$.

2.2.2 Homologie singulière

Définition 2.13. *Le simplexe standard Δ_n est l'enveloppe convexe de la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$, i.e.*

$$\Delta_n = \left\{ (t_0 \, , \dots , t_n), \ \forall i \ t_i \geq 0, \ \sum_i t_i = 1 \right\}.$$

Définition 2.14. *Un simplexe singulier de dimension n dans l'espace topologique X est une application continue $\sigma : \Delta_n \to X$.*

Définition 2.15. *Pour $0 \leq i \leq n$, la face d'indice i, F_i^n, de Δ_n est le simplexe singulier de dimension $n-1$ défini par*

$$F_i^n(t_0\,, \dots, t_{n-1}) = (t_0\,, \dots, t_{i-1}\,, 0\,, t_i\,, \dots, t_{n-1}).$$

Notation. On notera au besoin ce simplexe par la suite ordonnée de ses sommets $(e_0\,, \dots, \widehat{e_i}\,, \dots, e_n)$ où $(e_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$.
Avec ces notations, on a

$$\forall i < j, F_j^{n+1} \circ F_i^n = (e_0\,, \dots, \widehat{e_i}\,, \dots, \widehat{e_j}\,, \dots, e_{n+1}) = F_i^{n+1} \circ F_{j-1}^n.$$

Définition 2.16. *Pour $n \geq 0$, le groupe des chaînes singulières de dimension n est le groupe abélien libre $C_n(X)$ de base les simplexes singuliers de dimension n à valeurs dans X. Pour $n \geq 1$, on définit une application bord*

$$\delta_n : C_n(X) \to C_{n-1}(X),$$

en étendant linéairement la formule donnée pour un simplexe σ de dimension $n \geq 1$ par

$$\delta_n \sigma = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma \circ F_i^n.$$

Remarque. Pour $n = 0$, $\delta_0 : C_0(X) \to C_{-1}(X) = \{0\}$ est l'application nulle.

Proposition 6. *Pour tout $n \geq 0$, $\delta_n \circ \delta_{n+1} = 0$.*

Définition 2.17. *Un complexe de chaînes $C = (C_n, \delta_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une suite de groupe abéliens $(C_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et une suite de morphismes $\delta_n : C_n \to C_{n-1}$ vérifiant $\delta_n \circ \delta_{n+1} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.*

Définition 2.18. *Etant donné un complexe de chaînes $C = (C_n, \delta_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, on definit son homologie*

$$H_n(C) = Z_n(C)/B_n(C),$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$, où $Z_n(C) = \mathfrak{Ker}(\delta_n)$ est le sous-groupe des cycles et $B_n(C) = \mathfrak{Im}(\delta_{n+1})$ est le sous-groupe des bords.

Définition 2.19. *L'homologie singulière d'un espace topologique X est l'homologie du complexe des chaînes singulières, i.e.*

$$H_n(C) = Z_n(C)/B_n(C).$$

2.2.3 Groupe fondamental et revêtement

Soit X un espace topologique.

Définition 2.20. *On appelle chemin de X une application continue $\gamma : [0,1] \to X$.*
On dit que $\gamma(0)$ est son origine et que $\gamma(1)$ est son extrémité.
On appelle lacet (de base p) sur X un chemin de X tel que $\gamma(0) = \gamma(1) = p$.

Définition 2.21. *Soient α et β deux chemins de X avec $\alpha(1) = \beta(0)$.*
On appelle composé de α et de β noté $\alpha\beta$ le chemin γ de X défini par

$$\gamma(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & si\ t \in [0, \frac{1}{2}], \\ \beta(2t-1), & si\ t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Définition 2.22. *Deux chemins α et β sont dits homotopes s'il existe une homotopie de l'un vers l'autre, c'est-à-dire une application continue $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ telle que*

1. $\forall t \in [0,1],\ H(t,0) = \alpha(t)$
2. $\forall t \in [0,1],\ H(t,1) = \beta(t)$
3. $\forall x \in [0,1],\ H(0,x) = \alpha(0) = \beta(0)$
4. $\forall x \in [0,1],\ H(1,x) = \alpha(1) = \beta(1)$

Proposition 7. *"être homotope" est une relation d'équivalence sur l'ensemble des chemins.*

Notation. On note $\pi_1(X,p)$ l'ensemble des classes d'homotopie de lacets de base p.

Théorème 3. *L'application $\pi_1(X,p) \times \pi_1(X,p) \to \pi_1(X,p)$ induite par la compositions des lacets est une loi de groupes.*

Preuve. Pour l'associativité est immédiate. L'élément neutre est la classe du lacet constant $\gamma(t) = p\ \forall t \in [0,1]$. L'inverse d'un lacet est lui-même parcouru dans l'autre sens.

Définition 2.23. *On appelle groupe fondamental (ou groupe de Poincaré) le groupe $\pi_1(X,p)$ muni de cette loi.*

Définition 2.24. *Soit X,F des espaces topologiques, F étant supposé discret.*
Un revêtement de base X et de fibre F est la donnée d'un espace topologique Y et d'une application continue, surjective $p : Y \to X$ ayant la propriété de locale trivialité au dessus de X suivante :
Tout point x_0 de X possède un voisinage ouvert V de sorte qu'il existe un homéomorphisme

$$\Phi_V : p^{-1}(V) \to V \times F$$

tels que le diagramme

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(V) \arrow[rr, "\Phi_V"] \arrow[dr, "p"'] & & V \times F \arrow[dl, "proj"] \\ & V & \end{tikzcd}$$

commute.
L'homéomorphisme ϕ_V est appelé trivialisation de p au dessus de V.

Définition 2.25. *Soit $p : Y \to X$ une application continue.*
Une section de p au-dessus d'une partie V de X est une application continue

$$s : V \to Y$$

qui est un inverse partiel de p, i.e.

$$p(s(x)) = x, \quad \forall x \in V.$$

Proposition 8. *Une application continue $p : Y \to X$ est un revêtement si et seulement si, pour tout point x de X, il existe un voisinage ouvert V de x et une famille de sections $(s_f)_{f \in F}$ (pour un ensemble F non vide) de p au dessus de V telles que les $s_f(V)$ soient des ouverts disjoints de X formant une partition de $p^{-1}(V)$.*

Définition 2.26. *Nous dirons qu'un revêtement $(Y, p : Y \to X)$ est universel si Y est simplement connexe c'est-à-dire si Y est connexe et tout lacet tracé sur Y est homotope à un point.*

Définition 2.27. *Un espace X est dit semi-localement simplement connexe lorsque tout point admet un voisinage U qui a la propriété que tout lacet de U est homotope à un point dans X.*

Remarque. Le voisinage U n'est pas obligatoirement simplement connexe puisque la contraction du lacet s'effectue dans X et non forcément dans U.

Définition 2.28. *Un espace est dit localement connexe par arcs lorsque tout point admet une base de voisinages connexes par arcs.*

Théorème 4.

1. *Soit (Y, p) un revêtement de X. Soit Z connexe par arcs et qui est localement un espace topologique. Soit $\alpha : Z \to Y$ continue telle que les homomorphismes induit sur les groupes fondamentaux $p_\star : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ et $\alpha_\star : \pi_1(Z, z_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ vérifient $\alpha_\star(\pi_1(Z, z_0)) \subset p_\star(\pi_1(X, x_0))$.*
   Alors, il existe une unique foncton continue $\tilde{\alpha} : (Z, z_0) \to (X, x_0)$ telle que $p \circ \tilde{\alpha} = \alpha$.

$$
\begin{tikzcd}
 & (X, x_0) \arrow[d, "p"] \\
(Z, z_0) \arrow[ur, dashed, "\tilde{\alpha}"] \arrow[r, "\alpha"] & (Y, y_0)
\end{tikzcd}
$$

2. *Si X est connexe par arcs, localement connexe par arcs et semi-localement simplement connexe, alors X a un revêtement universel.*

3. *Si (Y, p) est un revêtement et Y est simplement connexe, alors p est un homéomorphisme.*

Preuve. Le lecteur pourra consulter [War71][Théorème 3.23].

Théorème 5. *Le revêtement universel d'un groupe de Lie est lui-même un groupe de Lie. L'application correspondante est un morphisme de groupes de Lie.*

Preuve. Soit G un groupe de Lie connexe d'élément neutre e.
Le théorème 4 nous dit que G a un revêtement universel $(\widetilde{G}, p)$. De plus, la structure différentielle de $\widetilde{G}$ dérive directement de celle de G (c'est la même).
Montrons que l'on peut trouver une structure de groupe pour $\widetilde{G}$ qui est induite par celle de G.
Considérons l'application $\alpha : \begin{array}{ccc} \widetilde{G} \times \widetilde{G} & \longrightarrow & G \\ (\tilde{\sigma}, \tilde{\tau}) & \longmapsto & p(\tilde{\sigma})p(\tilde{\tau})^{-1} \end{array}$.
Choisissons $\tilde{e} \in p^{-1}(e)$. Comme $\widetilde{G} \times \widetilde{G}$ est simplement connexe, il existe une unique application

$$\tilde{\alpha} : \widetilde{G} \times \widetilde{G} \to \widetilde{G}$$

telle que $p \circ \tilde{\alpha} = \alpha$ et $\tilde{\alpha}(\tilde{e}, \tilde{e}) = \tilde{e}$.
Soient $\tilde{\sigma}$ et $\tilde{\tau}$ dans $\widetilde{G}$, définissons

$$\tilde{\tau}^{-1} = \tilde{\alpha}(\tilde{e}, \tilde{\tau}), \qquad \tilde{\sigma}\tilde{\tau} = \tilde{\alpha}(\tilde{\sigma}, \tilde{\tau}^{-1}). \tag{Λ}$$

D'après l'unicité du théorème, les applications $\begin{array}{ccc} \widetilde{G} & \longrightarrow & \widetilde{G} \\ \tilde{\sigma} & \longmapsto & \tilde{\sigma}\tilde{e} \end{array}$, $\begin{array}{ccc} \widetilde{G} & \longrightarrow & \widetilde{G} \\ \tilde{\sigma} & \longmapsto & \tilde{e}\tilde{\sigma} \end{array}$ et $\begin{array}{ccc} \widetilde{G} & \longrightarrow & \widetilde{G} \\ \tilde{\sigma} & \longmapsto & \tilde{\sigma} \end{array}$ font commuter le diagramme ci-dessous et envoie $\tilde{e}$ sur $\tilde{e}$.

$$\begin{tikzcd} & \widetilde{G} \arrow[d, "p"] \\ \widetilde{G} \arrow[ur, dashed] \arrow[r, "p"] & G \end{tikzcd}$$

$\widetilde{G}$ étant simplement connexe, ces applications sont identiques.
Similairement, $\tilde{\sigma}\tilde{\sigma}^{-1} = \tilde{\sigma}^{-1}\tilde{\sigma} = \tilde{e}$ et $(\tilde{\sigma}\tilde{\tau})\tilde{\gamma} = \tilde{\sigma}(\tilde{\tau}\tilde{\gamma})$ pour tous $\tilde{\sigma}$, $\tilde{\tau}$, $\tilde{\gamma} \in \widetilde{G}$.
Enfin, $\tilde{\alpha}$ est lisse donc $\widetilde{G}$ est un groupe de Lie.
D'après (Λ), $p(\tilde{\tau}^{-1}) = p(\tilde{\tau})^{-1}$ et $p(\tilde{\sigma}\tilde{\tau}) = p(\tilde{\sigma}\tilde{\tau})$. Donc $p : \widetilde{G} \to G$ est un homomorphisme de groupe de Lie. □

2.2.4 Lien entre le groupe fondamental et le second groupe de cohomologie pour les groupes de Lie semi-simples

Définition 2.29. *Soit $(G, +)$ un groupe topologique abélien localement compact. Un caractère de G est un homomorphisme continu de G dans $\mathbb{T}$ c'est-à-dire une fonction continue $\chi : G \to \mathbb{T}$ telle que*

$$\chi(x + y) = \chi(x)\chi(y),$$

pour tout $x, y \in G$. L'ensemble des caractères de G est appelé le dual de Pontryagin de G ; il forme un groupe dont la loi est donnée par

$$(\chi \cdot \chi')(x) = \chi(x)\chi'(x)$$

pour tout $x \in G$.

Théorème 6. *Soit G un groupe de Lie semi-simple connexe. Alors, $H^2(G, \mathbb{T})$ est isomorphe au dual de Pontryagin $\widehat{\pi_1(G)}$ du groupe fondamental $\pi_1(G)$ de G.*

Preuve. On rappelle que si $(\widetilde{G}, p : \widetilde{G} \to G)$ est le revêtement universel de G alors $\pi^1(G)$ est identifié au noyau de p.
On considère $s : G \to \widehat{G}$ une section de p.

$$\widehat{G} \underset{p}{\overset{s}{\leftrightarrows}} G$$

Si $\chi \in \widehat{\pi^1(G)}$, on pose $m_\chi : \begin{array}{ccc} G \times G & \longrightarrow & \mathbb{T} \\ (x, y) & \longmapsto & \chi(s(y)^{-1}s(x)^{-1}s(xy)) \end{array}$.

Montrons que $\Omega : \begin{array}{ccc} \widehat{\pi^1(G)} & \longrightarrow & H^2(G, \mathbb{T}) \\ \chi & \longmapsto & [m_\chi] \end{array}$ est un isomorphisme.

Tout d'abord, Ω est bien définie car si on pose

$$f_\chi(x) = \chi(x^{-1} \times s \circ p(x)), \quad \forall x \in \widetilde{G},$$

alors on peut vérifier que

$$m_\chi(p(x), p(y)) = \frac{f_\chi(xy)}{f_\chi(x)f_\chi(y)}, \quad \forall x, y \in \widetilde{G}. \tag{$\sqsupset$}$$

Ensuite, le morphisme Ω est injectif. Si m_χ est un multiplicateur exacte, alors il existe une fonction mesurable $f : G \to \mathbb{T}$ telle que

$$m_\chi(x,y) = \frac{f(xy)}{f(x)f(y)}, \ \ \forall x,y \in G.$$

D'après (❒), $\frac{f \circ p}{f_\chi}$ est un homomorphisme de $\widetilde{G}$ dans $\mathbb{T}$ et comme G (et donc $\widetilde{G}$) est semi-simple et que $\mathbb{T}$ est abélien, il est forcément trivial. Donc $f \circ p = f_\chi$. Ainsi, f_χ est constant sur $ker(p)$ mais $f_\chi|_{ker(p)} = \chi^{-1}$. Par conséquent, χ est le caractère trivial de $ker(p)$.

Ω est aussi surjectif. Soit m un multiplicateur de G et soit le multiplicateur $\widetilde{m} : \widetilde{G} \times \widetilde{G} \to \mathbb{T}$ telle que $\widetilde{m}(x,y) = m(p(x), p(y))$.
Varadarajan a montré en 1985 que, comme $\widetilde{G}$ est un groupe de Lie connexe, simplement connexe et semi-simple, $H^2(\widetilde{G}, \mathbb{T})$ est trivial. Ainsi, $\widetilde{m}$ est exacte i.e. il existe une fonction mesurable $f : \widetilde{G} \to \mathbb{T}$ telle que

$$m(p(x), p(y)) = \widetilde{m}(x,y) = \frac{f(xy)}{f(x)f(y)}, \ \ \forall x,y \in \widetilde{G}.$$

La restriction de f à $ker(p)$ est un caractère de $ker(p)$ que l'on appelle χ^{-1} (continue car mesurable [Lew83][Théorème 1]), χ est donc également un caractère. De plus,

$$f(xy) = f(x)\chi^{-1}(y), \ \ \forall x \in \widetilde{G}, \ y \in ker(p).$$

Si on pose $g : G \to \mathbb{T}$ la fonction mesurable telle que $g = f \circ s$, alors $f(s(x)z) = g(x)\chi^{-1}(z), \ \ \forall x \in G, \ z \in ker(p)$. Ainsi, pour tous $x, y \in G$,

$$\begin{aligned} m(x,y) &= m(p(s(x)), p(s(y))) \\ &= \frac{f(s(x)s(y))}{f(s(x))s(s(y))} \\ &= \frac{f(s(xy)s(xy)^{-1}s(x)s(y))}{f(s(x))f(s(y))} \\ &= \chi^{-1}(s(xy)^{-1}s(x)s(y))\frac{g(xy)}{g(x)g(y)} = m_\chi(x,y)\frac{g(xy)}{g(x)g(y)}. \end{aligned}$$

On a montré que m est équivalent à m_χ.

La dernière chose à montrer est que l'isomorphisme Ω ne dépend pas du choix de la section s.
Soit $t : G \to \widetilde{G}$ une autre section de p. Soit $\chi \in \widehat{ker(p)}$ et m'_χ le multiplicateur que l'on obtient avec la section t. Il existe donc une fonction mesurable $u : G \to ker(p)$ telle que $t = s \times u$. Soit $v : G \to \mathbb{T}$ la fonction mesurable vérifiant $v = \chi \circ u$. Alors,

$$m'_\chi(x,y) = \frac{m\chi(x,y)v(xy)}{v(x)v(y)}, \ \ \forall x,y \in G.$$

Donc $[m'_\chi] = [m_\chi]$. □

Remarque. Si $\pi_1(G)$ est abélien, alors $\pi_1(G) = H_1(G)$ (homologie singulière à coefficients entiers). De manière générale, $\pi_1(G)$ est l'abélianisé du groupe d'homologie $H_1(G)$.(voir [GH81][Théorème 12.1 page 63]) Le théorème 6 peut être réécrit

$$H^2(G, \mathbb{T}) = Hom(H_1(G), \mathbb{T})$$

où la partie gauche réfère au groupe de cohomologie et la partie droite à l'homologie singulière de G.

On remarque donc une dualité entre le groupe de cohomologie et l'algèbre d'homologie pour les groupes de Lie semi-simples.

Définition 2.30. *Soient G un groupe topologique et $(\widetilde{G}, p : \widetilde{G} \to G)$ le revêtement universel de G. Soit β une représentation ordinaire unitaire de $\widetilde{G}$.*
On dit que β est de type pur s'il existe un caractère χ de $ker(p)$ tel que $\beta(z) = \chi(z)I \ \ \forall z \in ker(p)$. On dit aussi que β est pur de type χ.

Exemple. Si $\beta : \widetilde{G} \to GL(V)$ est irréductible, alors β est de type pur.
Effectivement, si on considère $z \in Ker(p)$ et $\chi(z)$ une valeur propre de $\beta(z)$ alors $f_z = \beta(z) - \chi(z) : (\beta, V) \to (\beta, V)$ est un endomorphisme de représentation irréductible. Cela résulte de $Ker(p) \subset Z(\widetilde{G})$ (voir [Kna41] [Proposition 1.93 (d)]) :

$$f_z(g \cdot v) = g \cdot f_z(v) \quad \forall g \in \widetilde{G}, \ \ \forall v \in V.$$

Par le lemme de Schur, f_z n'étant pas un isomorphisme ($Ker(f_z) \neq 0$), f_z est trivial. Ainsi, $\beta(z) = \chi(z)Id|_V$.

Théorème 7. *Soit G un groupe de Lie, semi-simple, connexe et soit $\widetilde{G}$ son revêtement universel.*
Il y a une bijection naturelle entre les classes d'équivalence des représentations projectives unitaires de G et les classes d'équivalence des représentations ordinaires de type pur de $\widetilde{G}$.
De plus, les représentations projectives irréductibles unitaires de G sont en bijection avec les représentations irréductibles de $\widetilde{G}$.

Preuve. Si m est un multiplicateur de G, $\widetilde{m}$ désigne le multiplicateur de $\widetilde{G}$ tel que $\widetilde{m}(x, y) = m(p(x), p(y))$.
Soit α une représentation projective de G de multiplicateur m. Quitte à remplacer α par une représentation équivalente, on peut prendre $m = m_\chi$ où χ est un caractère de $ker(p)$.
Considérons également $\widetilde{\alpha} = \alpha \circ p$ qui est une représentation projective de $\widetilde{G}$ de multiplicateur $\widetilde{\alpha}$.
Par ($\sqsupset$), on a $\widetilde{m}(x, y) = \frac{f_\chi(xy)}{f_\chi(x)f_\chi(y)}$ (où f_χ est défini dans la preuve précédente).
Définissons maintenant $\beta : x \mapsto f_\chi(x)^{-1}\widetilde{\alpha}(x), \ \ \forall x \in \widetilde{G}$. β est une représentation ordinaire pur de type χ.
Montrons que $\alpha \mapsto \beta$ est la bijection souhaitée.
Tout d'abord, α est irréductible si, et seulement si β est irréductible.
De plus, cette fonction respecte les équivalences.
Enfin, elle est bijective. Si β est une représentation ordinaire de type pur χ, alors $\beta(z) = \chi(z)I \ \ \forall z \in ker(p)$. Considérons $\widetilde{\alpha} : x \mapsto f_\chi(x)\beta(x)$. $\widetilde{\alpha}$ est une représentation projective de $\widetilde{G}$ qui est donc trivial sur $ker(p)$. Donc, il existe une unique représentation projective de G α tel que $\widetilde{\alpha} = \alpha \circ p$. □

Remarque. On a ainsi montré que pour trouver les représentations iréductibles projectives d'un groupe de Lie semi-simple connexe, il suffit de trouver les représentations irréductibles ordinaires de son revêtement universel.

3 Spin

Dans cette partie, nous allons utiliser les notions définies et les théorème prouvés précédemment pour comprendre ce qu'est le spin. La mécanique quantique, finalement, ne prédit que les probabilités de transition entre les états, on va donc étudier les symétries (par rotations) : en effet, une symétrie est, par définition, une bijection entre les états qui préserve les probabilités de transition et qui donc est cohérente avec la mécanique quantique. L'analyse du comportement des objets sous l'effet des rotations nécessite de prendre en compte la structure mathématique de groupe formé par celles-ci. À un objet se transformant sous les rotations est associée une représentation de groupe. Deux objets ayant des propriétés de symétrie similaires seront donc associés à des représentations équivalentes du groupe des rotations. De ce point de vue, le spin n'est rien d'autre qu'un nombre qui permet de classifier les différentes représentations inéquivalentes du groupe des rotations.

3.1 Historique

La notion de spin a été introduite par Pauli en décembre 1924 pour l'électron afin d'expliquer un résultat expérimental qui restait incompréhensible dans le cadre naissant de la mécanique quantique non relativiste : l'effet Zeeman anormal. L'approche développée par Pauli consistait à introduire de façon ad-hoc le spin en ajoutant un postulat supplémentaire aux autres postulats de la mécanique quantique non relativiste (équation de Schrödinger, etc.).

L'introduction du spin permet de comprendre également d'autres effets expérimentaux, comme les doublets des spectres des métaux alcalins, ou le résultat de l'expérience de Stern et Gerlach.

En 1928, Paul Dirac construisit une version quantique et relativiste de l'équation de Schrödinger, appelée aujourd'hui équation de Dirac, qui permet de décrire les fermions de spin $1/2$. Le spin y apparaît comme une propriété dérivée de son équation, et non comme un postulat supplémentaire.

3.2 Plus rigoureusement

Notation. Pour tout entier $n \geq 1$, on désigne par $O(n)$, $SO(n)$, $U(n)$ et $SU(n)$ les ensembles suivants :

$O(n) = \{P \in M_n(\mathbb{R}) \ / \ P$ inversible et $P^t = P^{-1}\}$.
$SO(n) = \{P \in O(n) \mid det(P) = 1\}$.

Les éléments de $O(n)$ sont appelés matrices orthogonales d'ordre n.

$U(n) = \{P \in M_n(\mathbb{C}) \mid P$ inversible et $P^{*t} = P^{-1}\}$.
$SU(n) = \{P \in U(n) \mid det(P) = 1\}$

Les éléments de $U(n)$ sont appelés matrices unitaires d'ordre n.

Définition 3.1. *Soient* $\mathbf{1}= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{i}= \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $\mathbf{j}= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $\mathbf{k}= \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$.
On définit $\mathbb{H}$ *comme l'ensemble des matrices de la forme* $a\mathbf{1}+b\mathbf{i}+c\mathbf{j}+d\mathbf{k}$ *avec* $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$. *On appellera les éléments de* $\mathbb{H}$ *quaternions.*

Propriété 3. *Toutes les matrices de* $\mathbb{H}$ *sont de la forme*

$$A = \begin{pmatrix} x & y \\ -\bar{y} & \bar{x} \end{pmatrix}.$$

Preuve. Il suffit de prendre $x = a + ib$ et $y = c + id$. □

Corollaire 1. *Le groupe* $SU(2)$ *est le groupe des quaternions unitaires, c'est-à-dire des quaternions vérifiant* $x\bar{x} + y\bar{y} = 1$.

Remarque. Topologiquement, $SU(2)$ est homéomorphe à la sphère unité dans $\mathbb{C}^2 \simeq \mathbb{R}^4$. Il est donc bien connexe et simplement connexe.

Théorème 8. *On considère* $G = SO(3)$. *Alors, son revêtement universel est* $(\widetilde{G}, p)$ *avec* $\widetilde{G} = SU(2)$ *et* $p : q \mapsto (v \mapsto qvq^{-1})$. *De plus,* $Ker(p) = \{\pm 1\}$.
Ainsi, on a la suite exacte suivante

$$1 \longrightarrow \{\pm 1\} \longrightarrow SU(2) \longrightarrow SO(3) \longrightarrow 1.$$

Preuve. L'application $p : q \mapsto (v \mapsto qvq^{-1})$ envoie $q = w\mathbf{1}+x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ sur la matrice de rotation

$$\begin{pmatrix} 1-2y^2-2z^2 & 2xy-2zw & 2xz+2yw \\ 2xy+2zw & 1-2x^2-2z^2 & 2yz-2xw \\ 2xz-2yw & 2yz+2xw & 1-2x^2-2y^2 \end{pmatrix}.$$

C'est une rotation autour du vecteur (x, y, z) d'angle 2θ où $cos(\theta) = w$ et $|sin(\theta)| = ||(x, y, z)||$.
De plus,

$$\begin{aligned} p(q) = p(q') &\Longrightarrow \begin{cases} (x,y,z) = \lambda(x',y',z') \\ 2\theta \equiv 2\theta' \pmod{2\pi} \end{cases} \\ &\Longrightarrow \begin{cases} (x,y,z) = \lambda(x',y',z') \\ w = w' \\ sin(\theta) = sin(\theta') \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} (x,y,z) = \lambda(x',y',z') \\ w = -w' \\ sin(\theta) = -sin(\theta') \end{cases} \\ &\Longrightarrow q = \pm q' \end{aligned}$$

En effet, $1 = w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = w'^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2$ implique que $\lambda = \pm 1$ donc $(x, y, z) = \pm(x', y', z')$. $\square$

Essayons de comprendre d'où vient le spin :

1. Le Théorème de Wigner (Théorème 2) donne les possibles symétries d'un système quantique. Si les symétries forment un groupe topologique (i.e., les symétries sont "continues"), cela donne en conséquence une représentation projective unitaire de $SO(3)$.
2. Le Théorème 7 précédent nous dit que les représentations projectives irréductibles de $G = SO(3)$ sont en bijection avec les représentations irréductibles de $\widetilde{G} = SU(2)$.

$$\begin{tikzcd} \{\pm 1\} \arrow[r] & SU(2) \arrow[r, "p"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & SO(3) \arrow[d, dashed] \\ & U(\mathcal{H}) \arrow[r] & PU(\mathcal{H}) \end{tikzcd}$$

Il nous reste à trouver les représentations irréductibles de $SU(2)$.

3.3 Représentations irréductibles de $SU(2)$

Soit $\mathbb{K}$ un corps.

Définition 3.2. *Si W est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, l'algèbre tensorielle est*

$$TW = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} W^{\otimes n}.$$

Proposition 9. *TW est une algèbre (associative, unitaire).*

Preuve. On vérifie aisément que TW est un anneau si l'on considère la loi $\times$ de concaténation suivante :

$$(v_1 \otimes ... \otimes v_n) \times (w_1 \otimes ... \otimes w_m) = v_1 \otimes ... \otimes v_n \otimes w_1 \otimes ... \otimes w_m.$$

Par ailleurs, l'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \longrightarrow & TW \\ \lambda & \longmapsto & \lambda \cdot 1 \end{array}$ (où $1 \in V^{\otimes 0}$) est un morphisme d'anneau qui confère à TW une structure d'algèbre. □

Définition 3.3. *On considère I l'idéal de W défini par*

$$I = \langle v \otimes w - w \otimes v, \quad v, w \in W \rangle.$$

L'algèbre symétrique de W par

$$S^\bullet(W) = TW/I.$$

On considère maintenant $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $W = \mathbb{K}x + \mathbb{K}y$. Alors, $TW = \mathbb{K}[x, y]$.

Proposition 10. *$SU(2)$ agit naturellement sur W.*

Preuve. Il suffit d'identifier $W = \mathbb{C}x + \mathbb{C}y$ à $\mathbb{C}^2$ et de considérer l'action

$$\begin{array}{ccc} SU(2) & \longrightarrow & GL(\mathbb{C}^2) \\ M & \longmapsto & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{array}$$

□

Proposition 11. *Cette action induit une action de $SU(2)$ sur $S^\bullet(W)$.*

Preuve. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a une action induite sur $W^{\otimes n}$ par

$$g \cdot (v_1 \otimes ... \otimes v_n) = g.v_1 \otimes ... \otimes g.v_n.$$

Ainsi, on a une action d'algèbre de $SU(2)$ sur TW :

$$\left\{ \begin{array}{l} g \cdot 1_{TW} = 1_{TW} \\ g \cdot (\bar{v} \times \bar{w}) = (g \cdot \bar{v}) \times (g \cdot \bar{v}) \end{array} \right. \quad \forall (\bar{v}, \bar{w}) \in TW^2.$$

Or, $\forall g \in SU(2)$, $g.I \subset I$.
Donc $SU(2)$ agit sur $S^\cdot(W) = \mathbb{C}[x, y]$ □

Théorème 9. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une représentation irréductible de $SU(2)$ de dimension n.*

Preuve. Considérons $S^nW = W^{\otimes n}/I$ l'ensemble des polynômes homogènes de degré n.
La dimension de l'espace $S^n(W)$ est $n+1$ (il y a deux indéterminées) et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall g \in SU(2)$, $g \cdot S^nW \subset S^nW$. □

On peut démontrer qu'il n'y a pas d'autres représentations irréductibles de $SU(2)$. Je continuerai en ne faisant pas forcément les preuves mais dans ces cas, une référence sera donnée.

Définition 3.4. *Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif.*
Une algèbre de Lie sur $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel $\mathfrak{g}$ sur $\mathbb{K}$ muni d'une application bilinéaire $\begin{array}{ccc} \mathfrak{g}\times\mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathfrak{g} \\ (x,y) & \longmapsto & [x,y] \end{array}$ *qui vérifie les propriétés suivantes :*

1. $\forall x \in \mathfrak{g}$, $[x,x] = 0$,
2. $\forall (x,y,z) \in \mathfrak{g}^3$, $[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0$.

$[x,y]$ est appelé crochet de Lie de x et y.

Définition 3.5. *Pour tout espace vectoriel V sur $\mathbb{K}$, l'espace vectoriel $End(V)$ des endomorphismes de V, muni du crochet $[x,y] = x\circ y - y \circ x$, est une algèbre de Lie sur $\mathbb{K}$, que nous noterons $\mathfrak{gl}(V)$.*

Proposition 12. *Il est possible d'associer naturellement à tout groupe de Lie G une algèbre de Lie.*

Preuve. Le lecteur pourra consulter [Kna41][page 3]. □

Exemple. L'algèbre de Lie de $SU(2)$ est

$$\mathfrak{su}(2) = \{X \in \mathfrak{gl}_2(\mathbb{C}),\ \ X^* = -X,\ tr(X) = 0\}.$$

Les matrices suivantes forment une base vectorielle réelle de $\mathfrak{su}(2)$

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{i}{2} \\ \frac{i}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_3 = \begin{pmatrix} \frac{i}{2} & 0 \\ 0 & \frac{-i}{2} \end{pmatrix}.$$

Définition 3.6. *Soit V un espace vectoriel réel.*
La complexification de V est

$$V^{\mathbb{C}} = V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}.$$

$V^{\mathbb{C}}$ est alors un espace vectoriel complexe si l'on définit la multiplication complexe suivante

$$\alpha(v\otimes\beta) = v \otimes (\alpha\beta).$$

Proposition 13. *La complexificaion de l'algèbre de Lie réelle $\mathfrak{su}(2)$ est*

$$\mathfrak{su}(2)^{\mathbb{C}} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}).$$

Preuve. $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ admet pour base le triplet (H, X_-, X_+), où

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad X_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ces éléments satisfont les relations de commutation

$$[X_+, X_-] = H \quad \text{et} \quad [H, X_\pm] = \pm 2X_\pm.$$

$\mathfrak{su}(2)^{\mathbb{C}}$ a pour base (sur $\mathbb{C}$) (ξ_1, ξ_2, ξ_3) donc a également pour base

$$(-2i\xi_3, -i\xi_1 + \xi_2, -i\xi_1 - \xi_2) = (H, X_-, X_+).$$

Proposition 14. *Soient G et H des groupes de Lie et $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ leur algèbre de Lie avec G simplement connexe. Soit $\psi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ un homomorphisme.*
Alors, il existe un unique homomorphisme $\phi : G \to H$ tel que $d\phi = \psi$.

Preuve. Voir [War71][Théorème 3.27]
Voici un diagramme illustrant la preuve.

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{g} \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\exp"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathfrak{h} \arrow[d, "\exp"] \\
G \arrow[r, dashed, "\exists\phi"'] & H
\end{tikzcd}$$

□

Théorème 10. *Soit G un groupe de Lie simplement connexe et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie.*
Il y a une bijection entre les représentations irréductibles de G et celles de $\mathfrak{g}$.

Preuve. Si l'on a une représentation irréductible $\psi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$, on peut appliquer la proposition précédente à $H = GL(V)$ (et $\mathfrak{h} = \mathfrak{gl}(V)$) pour obtenir la représentation irréductible $\phi : G \to GL(V)$ correspondante.

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{g} \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\exp"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathfrak{gl}(V) \arrow[d, "\exp"] \\
G \arrow[r, dashed, "\exists\phi"'] & GL(V)
\end{tikzcd}$$

L'autre sens est beaucoup plus facile. Si l'on a une représentation irréductible $\phi : G \to GL(V)$, alors $\psi = d\phi$ est la représentation de $\mathfrak{g}$ recherchée.
L'application $\phi \mapsto d\phi$ est surjective par la proposition précédente et injective par [War71][Théorème 3.16]. □

Corollaire 2. *L'ensemble des classes d'équivalence de représentations irréductibles de $SU(2)$ est en bijection avec celui des classes d'équivalence de représentations irréductibles de $\mathfrak{su}(2)$ et avec celui des classes d'équivalence de représentations irréductibles de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.*

Théorème 11. *Pour tout entier $m \geq 1$, il existe à équivalence près une unique représentation irréductible complexe de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ de dimension m.*

Preuve. (C'est la partie unicité qui nous intéresse.) Le lecteur pourra consulter [Kna41][Théorème 1.63].

Ce qui clôture la preuve du théorème 9.

3.4 Conclusion

Définition 3.7. *Soit ρ une représentation irréductible de $SU(2)$ de dimension m. On appelle spin total associé à ρ*

$$j = \frac{m-1}{2}.$$

Remarque fondamentale. Pour effectuer une certaine expérience, les physiciens utilisent l'une des représentations irréductibles de $SU(2)$.
Disons qu'ils utilisent $\rho : SU(2) \to GL(\mathcal{H})$.
Alors, le spin total correspondant aux particules de l'expérience est $j = \frac{dim(\mathcal{H})-1}{2}$.
Il s'agit d'un paramètre sur notre espace de Hilbert $\mathcal{H}$ indiquant le type des particules impliquées dans l'expérience. Par exemple, on ne peut pas décrire des électrons et des photons à l'aide du même espace de Hilbert.

Définition 3.8. *Soit $\rho : SU(2) \to GL(\mathcal{H})$ une représentation irréductible de $SU(2)$ de dimension m et $(e_i,\ i \in [\![1,n]\!])$ la base orthonormée de $\mathcal{H}$ correspondant aux vecteurs propres de l'observable correspondant à la matrice semblable à*

$$\begin{pmatrix} -j & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -j+1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & j-1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & j \end{pmatrix}.$$

La valeur de la projection du spin d'une particule (dans une certaine direction) l'état de celle-ci après l'opération de mesure.

Exemple. Si on étudie des électrons, il faut utiliser la représentation naturelle de $SU(2)$ à savoir l'application $SU(2) \to GL(\mathbb{C}^2)$ définie par $M \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
L'observable en question est associé à $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$.
La base de vecteurs propres est $(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix})$.
Le spin total est $1/2$.
La projection du spin d'une particule appartiendra à l'ensemble $\{-1/2, 1/2\}$.

Remarque. On a vu que les symétries fournissaient une représentation projective de $SO(3)$ par le théorème de Wigner. Donc lorsque l'on classe les représentations projectives de $SO(3)$ qui existent, on énumère les différents ensembles de symétries qui peuvent agir sur les états possibles de notre particule. On associe l'ensemble dans lequel vit l'état de spin de la particule (par exemple, $\{-1, 0, 1\}$ si le spin total est 1) à cet ensemble de symétries. Le spin n'est rien d'autre qu'un nombre qui permet de classifier les propriétés de symétrie qu'une particule peut posséder.

Voici, pour finir, une classification des particules élémentaires en fonction de leur spin :

Spin total	Particules élémentaires
0	boson de Higgs
$\frac{1}{2}$	électron, positron, neutrino, quark,...
1	photon, gluon, boson $W^{\pm}$, boson Z^0
2	graviton ?

Remarque. Le spin de particules composées, comme le proton ou le neutron, est constitué des spins des particules qui les composent auxquels s'ajoute le moment angulaire des particules élémentaires l'une par rapport à l'autre. Ici, il vaut $\frac{1}{2}$.

Remarque. Le noyau de p, l'application de revêtement, est $\{\pm 1\}$ et est donc de cardinal 2. On dit que $SU(2)$ est un revêtement d'ordre 2 de $SO(3)$. En fait, lorsque l'on fait de la mécanique classique, on n'utilise que la moitié des représentations irréductibles de $SU(2)$. En effet, avec la mécanique quantique, les états sont maintenant des éléments de l'espace projectif : on utilise les représentations projectives alors qu'en mécanique classique, on n'utilisait les représentations ordinaires de $SO(3)$. En mécanique classique, les représentations de $SU(2)$ utilisées sont les représentations de dimension impaire c'est-à-dire les représentations correspondant à un spin entier. Les particules ayant un spin entier sont des bosons. La mécanique quantique, par sa structure plus riche, nous permet de décrire, en plus, les fermions comme par exemple, les électrons.

Index

Références

[Bar64] Valentine "Valya" Bargmann. Note on Wigner's theorem on symmetry operations. *Journal of mathematical physics*, janvier 1964.

[BG00] Bagchi Bhaskar and Misra Gadadhar. A note on the multiplieurs and projective representations of semi-simple Lie groups. *The Indian Journal of Statistics*, 2000.

[Bre99] Haïm Brezis. *Analyse fonctionnelle : théorie et applications.* Éditions Masson, 1999.

[GH81] Marvin J. Greenberg and John R. Harper. *Algebraic topology.* Westview Press, janvier 1981.

[Kna41] Anthony William Knapp. *Lie groups beyond an introduction.* Springer Science, Business Media, 1941.

[Lew83] Jonathan W. Lewin. *Automatic continuity of measurable group homomorphisms.* American Mathematical Society, janvier 1983.

[Var04] Veeravalli Seshadri Varadarajan. *Supersymmetry for Mathematicians : An Introduction.* American Mathematical Society, 2004.

[War71] Frank Wilson Warner. *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups.* Foresman, Scott, 1971.