Université Grenoble Alpes

Rapport de stage de magistère

Les algèbres vertex d'après Isaac Newton

Figure 1 – Isaac Newton

Auteur : Valentine Soto

Encadrant : Estanislao Herscovich

Année 2019-2020

Table des matières

1 Introduction

La notion d'algèbre vertex a été introduite pour la première fois par Richard Borcherds en 1986 [1]. Cette notion a de nombreuses applications non seulement mathématiques mais aussi physiques. En effet, cette structure algébrique est en fait équivalente à la théorie conforme des champs chiraux à deux dimensions, ce qui en donne une définition mathématique rigoureuse.

Avant même que la notion d'algèbre vertex n'apparaisse, la notion d'opérateurs vertex était déjà présente dans la théorie des cordes. Elle permet de décrire certains types d'interactions entre particules ou cordes. Cependant, il ne s'agit pas de la motivation première pour l'introduction des algèbres vertex. En effet, celle-ci n'est que purement mathématique puisque qu'elle concerne l'étude du groupe Monstre. Plus particulièrement, Borcherds a formalisé cette notion dans le but de démontrer les conjectures du "Monstrous Moonshine" formulées par Conway et Norton. Il n'est cependant pas surprenant de voir que les algèbres vertex ont des applications dans la théorie des cordes.

Dans ce mémoire, on va s'intéresser à la définition des algèbres vertex. Néanmoins, on ne parlera pas ici de la formulation faite par Borcherds. En effet, le but de ce mémoire est de définir les algèbres vertex à l'aide de méthodes provenant des travaux d'Isaac Newton [6]. Pour cela, on va détailler les notions et résultats présents dans l'article de Michael Tuite [7]. On va donc voir ici comment les axiomes des algèbres vertex peuvent être reformulés à l'aide notamment de la théorie des différences finies de Newton. Grâce à cela, on va également pouvoir démontrer de manière plus simple l'identité de Borscherds-Frenkel-Lepowsky-Meurman, qui est équivalent à l'axiome de localité dans la théorie originelle.

Dans la première partie, on fera une brève introduction sur les algèbres de Lie, notion importante qui permettra notamment de donner des exemples d'algèbres vertex. Ensuite, on s'intéressera à la théorie des différences finies de Newton. Cette partie se terminera par un théorème qui regroupera toutes les propositions équivalentes qui découlent de la formule des différences avant de Newton, énoncé qui jouera un rôle important dans la suite du mémoire. Les deux parties suivantes traiteront de la localité et des champs créateurs que l'on définira grâce à la théorie des différences finies de Newton. Ces notions apparaissent comme axiomes dans la formulation originelle des algèbres vertex. Dans la partie traitant de la localité, on va établir un énoncé qui caractérisera la condition de localité et on finira par donner des exemples de séries formelles locales dans des algèbres de Lie. Dans la partie traitant des champs créateurs, on va tout d'abord définir la notion de champ afin de démontrer l'identité de Borscherds-Frenkel-Lepowksy-Meurman et d'en donner des énoncés équivalents. Dans un deuxième temps, on s'intéressera à la notion même de champ créateur et aux relations élémentaires entre champs créateurs. Dans la dernière partie, on définira les algèbres vertex à l'aide des notions définies dans les parties précédentes. On parlera tout d'abord de covariance de translations, notion importante afin d'introduire celle d'opérateur vertex. On définira ensuite la notion d'algèbre vertex et on s'intéressera aux relations vérifiées par ses opérateurs vertex. Pour finir, on établira un théorème permettant de construire une algèbre vertex à partir d'opérateurs vertex puis on l'appliquera pour construire des exemples d'algèbres vertex.

2 Notations et remarques préliminaires

* $\star$ Soit E un ensemble. Dans la suite, on note $E^{\mathbb{Z}}$ l'ensemble des suites indexées par $\mathbb{Z}$ et à valeurs dans E. De plus, si on considère $\alpha \in E^{\mathbb{Z}}$, on note α_n le n^{e} terme de la suite α pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

* $\star$ On définit le coefficient binomial généralisé par

$$\binom{n}{0} = 1 \qquad \text{et} \qquad \binom{n}{i} = \frac{n(n-1)\dots(n-i+1)}{i\,!},$$

pour tout $n \in \mathbb{C}^*$ et $i \in \mathbb{N}^*$. De plus, par convention, on pose

$$\binom{0}{0} = 1 \qquad \text{et} \qquad \binom{n}{i} = 0,$$

pour tout $n \in \mathbb{C}$ et $i < 0$. On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il s'agit du coefficient binomial usuel. En effet, on a

$$\binom{n}{i} = \frac{n\,!}{(n-i)\,!\;i\,!},$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $i \in \mathbb{N}$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $i \geq n+1$, on a $\binom{n}{i} = 0$. Par ailleurs, on remarque que

$$\binom{n}{i} = (-1)^i \binom{-n+i-1}{i}, \tag{$\star$}$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et $i \in \mathbb{N}$. En effet, on a

$$\begin{aligned}\binom{n}{i} &= \frac{n(n-1)\dots(n-i+1)}{i\,!} \\ &= (-1)^i \frac{(-n+i-1)(-n+i-2)\dots(-n+1)(-n)}{i\,!} \\ &= (-1)^i \binom{-n+i-1}{i},\end{aligned}$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et $i \in \mathbb{N}$.

* $\star$ Soit K un corps de caractéristique nulle et U un K-espace vectoriel. On note $U[z]$ l'ensemble des polynômes d'indéterminée z et $U[[z]]$ l'ensemble des séries formelles d'indéterminée z. On remarque que $U[[z, z^{-1}]]$, l'ensemble des séries formelles z et z^{-1}, est un $U[z]$-module.

3 Algèbre de Lie

On va commencer par une petite introduction sur les algèbres de Lie, notion qui sera très utile dans la suite.

On fixe dans la suite un corps K un corps de caractéristique nulle.

3.1 Définitions

Définition 1 (Algèbre de Lie)**.**

Une *algèbre de Lie* est un couple $(\mathfrak{g}, [.,.])$ où $\mathfrak{g}$ est un K-espace vectoriel et $[.,.] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ est une application bilinéaire qui vérifie

$$[x, y] = -[y, x] \qquad \text{et} \qquad [x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0,$$

pour tout $x, y, z \in \mathfrak{g}$. De plus, on dit que $[.,.]$ est un *crochet de Lie*.

Remarque 2. On remarque par la 1^{re} relation à vérifier sur le crochet de Lie que le crochet est une application bilinéaire antisymétrique. La 2^{e} relation à vérifier s'appelle l'*identité de Jacobi*.

Définition 3 (Sous-algèbre de Lie)**.**

Si $(\mathfrak{g}, [.,.])$ est une algèbre de Lie alors une *sous-algèbre de Lie* de $(\mathfrak{g}, [.,.])$ est un sous-espace vectoriel $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ qui est stable par $[.,.]$ i.e. qui vérifie $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$.

Remarque 4. Une sous-algèbre de Lie a une structure induite d'algèbre de Lie : pour cela, on munit le sous-espace vectoriel du crochet restreint au sous-espace.

3.2 Exemples

Exemple 5. Soit A une K-algèbre associative munie d'un crochet $[.,.]_A : A \times A \to A$ défini par

$$[a, b]_A = ab - ba,$$

pour tout $a, b \in A$. On remarque que le couple $(A, [.,.]_A)$ est une algèbre de Lie. En effet, A est en particulier un espace vectoriel et on remarque facilement que $[.,.]_A$ est une application bilinéaire antisymétrique. Il reste donc à vérifier l'identité de Jacobi. On a

$$\begin{aligned}[a,[b,c]_A]_A+[b,[c,a]_A]_A+[c,[a,b]_A]_A &= [a,bc-cb]_A+[b,ca-ac]_A+[c,ab-ba]_A\\ &= a(bc-cb)-(bc-cb)a+b(ca-ac)-(ca-ac)b+c(ab-ba)-(ab-ba)c\\ &= abc-acb-bca+cba+bca-bac-cab+acb+cab-cba-abc+bac\\ &= 0,\end{aligned}$$

pour tout $a,b,c\in A$. L'identité de Jacobi est donc bien vérifiée. Dans ce cas, le crochet de Lie est appelé un *commutateur*.

Exemple 6 (Algèbre des endomorphismes)**.**

Soit V un K-espace vectoriel. On considère $End_K(V)$ la K-algèbre associative des endomorphismes de V munie de la composition. Par l'exemple précédent, $(End_K(V),[.,.]_{End_K(V)})$ est une algèbre de Lie. En général on note cette algèbre de Lie $\mathfrak{gl}(V)$. De plus, si V est de dimension finie $n\in\mathbb{N}$, on la note $\mathfrak{gl}(n,K)$.

Exemple 7. Soit V un K-espace vectoriel de dimension $n\in\mathbb{N}$. On considère l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}(n,K)$ munie de son crochet $[.,.]$ défini dans l'exemple précédent. On définit

$$\mathfrak{sl}(n,K)=\{X\in\mathfrak{gl}(n,K):tr(X)=0\}\subset\mathfrak{gl}(n,K).$$

On remarque que $\mathfrak{sl}(n,K)$ est une sous-algèbre de Lie de $(\mathfrak{gl}(n,K),[.,.])$. En effet, comme la trace est une application linéaire, $\mathfrak{sl}(n,K)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{gl}(n,K)$. De plus, on a

$$tr([X,Y])=tr(X\circ Y-Y\circ X)=tr(X\circ Y)-tr(Y\circ X)=tr(X\circ Y)-tr(X\circ Y)=0,$$

pour tout $X,Y\in\mathfrak{sl}(n,K)$. Le sous-espace $\mathfrak{sl}(n,K)$ est donc stable par $[.,.]$.

Exemple 8 (Centre d'une algèbre de Lie)**.**

Soit $(\mathfrak{g},[.,.])$ une algèbre de Lie. On définit le *centre de* $\mathfrak{g}$, noté $c(\mathfrak{g})$, par

$$c(\mathfrak{g})=\{x\in\mathfrak{g}:\forall y\in\mathfrak{g},[x,y]=0\}\subset\mathfrak{g}.$$

On remarque que $c(\mathfrak{g})$ est une sous-algèbre de Lie de $(\mathfrak{g},[.,.])$. En effet, comme le crochet est une application bilinéaire, $c(\mathfrak{g})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}$. Il reste à montrer que $c(\mathfrak{g})$ est stable par $[.,.]$: pour cela on fixe $x,y\in c(\mathfrak{g})$. Par l'identité de Jacobi appliquée aux éléments de $\mathfrak{g}$, on sait que

$$[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]=0,$$

pour tout $z\in\mathfrak{g}$. Or, comme $x,y\in c(\mathfrak{g})$, on a

$$[x,[y,z]]=0 \text{ et } [y,[z,x]]=0,$$

pour tout $z\in\mathfrak{g}$. On a alors pour tout $z\in\mathfrak{g}$, $[z,[x,y]]=0$. Par antisymétrie, on a alors pour tout $z\in\mathfrak{g}$, $[[x,y],z]=0$. On en déduit donc que $[x,y]\in c(\mathfrak{g})$: le sous-espace $c(\mathfrak{g})$ est donc bien stable par $[.,.]$.

Exemple 9 (Algèbre de Lie de Heisenberg)**.**

Soit W un K-espace vectoriel muni d'une forme bilinéaire alternée $\langle .,. \rangle : W \times W \to K$. On définit l'espace vectoriel

$$\mathfrak{h} = W \oplus Kc.$$

On munit $\mathfrak{h}$ d'un crochet $[.,.] : \mathfrak{h} \times \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}$ défini par

$$[w + \lambda c, w' + \mu c] = \langle w, w' \rangle c,$$

pour tout $w, w' \in W$ et $\lambda, \mu \in K$. On remarque que le couple $(\mathfrak{h}, [.,.])$ est une algèbre de Lie appelée *algèbre de Lie de Heisenberg*. En effet, comme $\langle .,. \rangle$ est une forme bilinéaire alternée, le crochet est une application bilinéaire antisymétrique. Il reste donc à vérifier l'identité de Jacobi : pour cela, on fixe $w_1, w_2, w_3 \in W$ et $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in K$. On a

$$[w_i + \lambda_i c, [w_j + \lambda_j c, w_k + \lambda_k c]] = [w_i + \lambda_i c, \langle w_j, w_k \rangle c] = 0,$$

pour tout i, j, k tel que $\{i, j, k\} \in \{1, 2, 3\}$. On en déduit donc que

$$[w_1 + \lambda_1 c, [w_2 + \lambda_2 c, w_3 + \lambda_3 c]] + [w_2 + \lambda_2 c, [w_3 + \lambda_3 c, w_1 + \lambda_1 c]] + [w_3 + \lambda_{3c}, [w_1 + \lambda_1 c, w_2 + \lambda_2 c]] = 0.$$

L'identité de Jacobi est donc bien vérifiée.

3.3 Algèbre enveloppante

Définition 10 (Algèbre enveloppante)**.** Soit $(\mathfrak{g}, [.,.]_{\mathfrak{g}})$ une algèbre de Lie. On dit que $\mathscr{U}(\mathfrak{g})$, où $\mathscr{U}(\mathfrak{g})$ est une algèbre associative, est *algèbre envoloppante de* $\mathfrak{g}$ si elle vérifie la propriété universelle suivante :

Pour toute application linéaire $\phi : \mathfrak{g} \to A$, où A est une algèbre associative munie du commutateur $[.,.]_A$, vérifiant

$$\phi\left([x, y]_{\mathfrak{g}}\right) = \left[\phi(x), \phi(y)\right]_A,$$

pour tout $x, y \in \mathfrak{g}$, il existe un unique morphisme d'algèbres associatives $\tilde{\phi} : \mathscr{U}(\mathfrak{g}) \to A$ tel que $\phi = \tilde{\phi} \circ i$ où i est l'inclusion. Autrement dit, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "i"'] & & A \\ & \mathscr{U}(\mathfrak{g}) \arrow[u, phantom, "\circlearrowleft"] \arrow[ur, dotted, "\tilde{\phi}"'] & \end{tikzcd}$$

4 Différences avant de Newton et séries formelles

Dans cette partie on va s'intéresser aux techniques sur les séries formelles qui sont utilisées dans les algèbres vertex. On va s'appuyer plus précisément sur la théorie des différences finies de Newton.

On rappelle que K est un corps de caractéristique nulle. Soit U un K-espace vectoriel.

4.1 Différences avant de Newton

Définition 11 (Opérateurs de différence avant)**.**

- On définit l'*opérateur de différence avant* $\Delta : U^{\mathbb{Z}} \to U^{\mathbb{Z}}$ par

$$(\Delta\alpha)_n = \alpha_{n+1} - \alpha_n,$$

pour tout $\alpha \in U^{\mathbb{Z}}$ et $n \in \mathbb{Z}$.

- On définit par récurrence l'*opérateur de la N^e différence avant* Δ^N

$$\Delta^0 = Id \qquad \text{et} \qquad \Delta^N = \Delta \circ \Delta^{N-1},$$

pour tout $N \geq 1$.

Lemme 12. *Soit $\alpha \in U^{\mathbb{Z}}$ et $N \geq 0$. On a*

$$(\Delta^N\alpha)_n = \sum_{i\geq 0}(-1)^i \binom{N}{i}\alpha_{n+N-i},$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Démonstration. On définit un autre opérateur $D : U^{\mathbb{Z}} \to U^{\mathbb{Z}}$ par

$$(D\beta)_n = \beta_{n+1},$$

pour tout $\beta \in U^{\mathbb{Z}}$ et $n \in \mathbb{Z}$. On peut alors définir par récurrence D^M par

$$D^0 = Id \qquad \text{et} \qquad D^M = D \circ D^{M-1},$$

pour tout $M \geq 1$. Comme par définition $\Delta = D - Id$, par le binôme de Newton, on a

$$\Delta^N = \sum_{i=0}^{N} \binom{N}{i}(-1)^i D^{N-i},$$

car $N \in \mathbb{N}$. Or, par récurrence, on a pour tout $k \geq 0$ et $n \in \mathbb{Z}$, $(D^k\alpha)_n = \alpha_{n+k}$. On en déduit donc que

$$(\Delta^N \alpha)_n = \sum_{i=0}^{N} (-1)^i \binom{N}{i} \alpha_{n+N-i} = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \binom{N}{i} \alpha_{n+N-i},$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$, car pour tout $i \geq N+1$, $\binom{N}{i} = 0$. □

Proposition 13 (Formule des différences avant de Newton)**.**

Soit $\alpha \in U^{\mathbb{Z}}$ *et* $N \geq 1$. *On a*

$$\alpha \in \ker \Delta^N = \{\beta \in U^{\mathbb{Z}} : \Delta^N \beta = 0\} \Leftrightarrow \exists R_0, \dots, R_{N-1} \in U, \forall n \in \mathbb{Z}, \alpha_n = \sum_{i=0}^{N-1} \binom{n}{i} R_i.$$

Dans ce cas, on a plus précisément $R_i = (\Delta^i \alpha)_0$ *pour tout* $i \in [\![0, N-1]\!]$.

Démonstration. Pour montrer cette proposition, on va raisonner par double implication.

On suppose que $\alpha \in \ker \Delta^N$. On va montrer que

$$\alpha_n = \sum_{i=0}^{N-1} \binom{n}{i} (\Delta^i \alpha)_0,$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Pour cela, on considère l'opérateur D défini dans la démonstration du lemme 12. On peut définir $D^{-1} : U^{\mathbb{Z}} \to U^{\mathbb{Z}}$ par

$$(D^{-1}\beta)_n = \beta_{n-1},$$

pour tout $\beta \in U^{\mathbb{Z}}$ et $n \in \mathbb{Z}$. On définit alors par récurrence D^{-N} par

$$D^{-N} = D^{-1} \circ D^{-N+1},$$

pour tout $N \geq 2$. Par récurrence, on a pour tout $k, n \in \mathbb{Z}$, $(D^k \alpha)_n = \alpha_{n+k}$. On remarque alors que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\alpha_n = (D^n \alpha)_0$. Pour montrer le résultat voulu, il suffit alors de montrer que

$$D^n \alpha = \sum_{i \geq 0} \binom{n}{i} \Delta^i \alpha,$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

- Si $n \geq 0$, comme $D = \Delta + Id$, par le binôme de Newton, on a

  $$D^n \alpha = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \Delta^i \alpha = \sum_{i \geq 0} \binom{n}{i} \Delta^i \alpha,$$

  car pour tout $i \geq n+1$, $\binom{n}{i} = 0$.

- On raisonne par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$ pour montrer le résultat pour $n = -k \in \mathbb{Z}_-^*$.

  - ⋆ On suppose que $k = 1$. On a

$$\begin{aligned}
D\left(\sum_{i\geq 0}\binom{-1}{i}\Delta^i\alpha\right) &= \sum_{i=0}^{N-1}(-1)^i D\left(\Delta^i\alpha\right) && \text{car } \alpha \in \ker \Delta^N \\
&= \sum_{i=0}^{N-1}(-1)^i\left(\Delta^{i+1}\alpha + \Delta^i\alpha\right) && \text{car } D = \Delta + Id \\
&= \sum_{i=0}^{N-1}(-1)^i\Delta^i\alpha + \sum_{i=1}^{N-1}(-1)^{i-1}\Delta^i\alpha && \text{car } \alpha \in \ker \Delta^N \\
&= \alpha.
\end{aligned}$$

  La formule est donc bien vérifiée pour $k = 1$.

  - ⋆ Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que le résultat soit vrai au rang k. On a

$$\begin{aligned}
D^{k+1}\left(\sum_{i\geq 0}\binom{-k-1}{i}\Delta^i\alpha\right) &= D^k\left(\sum_{i=0}^{N-1}\binom{-k-1}{i}D\left(\Delta^i\alpha\right)\right) && \text{car } \alpha \in \ker \Delta^N \\
&= D^k\left(\sum_{i=0}^{N-1}\binom{-k-1}{i}\left[\Delta^{i+1}\alpha + \Delta^i\alpha\right]\right) && \text{car } D = \Delta + Id \\
&= D^k\left(\sum_{i=0}^{N-1}\binom{-k-1}{i}\Delta^i\alpha + \sum_{i=1}^{N}\binom{-k-1}{i-1}\Delta^i\alpha\right) \\
&= D^k\left(\alpha + \sum_{i=1}^{N-1}\left[\binom{-k-1}{i} + \binom{-k-1}{i-1}\right]\Delta^i\alpha\right) && \text{car } \alpha \in \ker \Delta^N \\
&= D^k\left(\alpha + \sum_{i=1}^{N-1}(-1)^i\left[\binom{k+i}{i} - \binom{k+i-1}{i-1}\right]\Delta^i\alpha\right) && \text{d'après } (\star) \\
&= D^k\left(\alpha + \sum_{i=1}^{N-1}(-1)^i\binom{k+i-1}{i}\Delta^i\alpha\right) && \text{par le triangle de Pascal.}
\end{aligned}$$

On en déduit alors que

$$\begin{aligned}
D^{k+1}\left(\sum_{i\geq 0}\binom{-k-1}{i}\Delta^i\alpha\right) &= D^k\left(\alpha+\sum_{i=1}^{N-1}\binom{-k}{i}\Delta^i\alpha\right) && \text{d'après } (\star)\\
&= D^k\left(\sum_{i=0}^{N-1}\binom{-k}{i}\Delta^i\alpha\right)\\
&= D^k\left(\sum_{i\geq 0}\binom{-k}{i}\Delta^i\alpha\right) && \text{car } \alpha\in\ker\Delta^N\\
&= \alpha && \text{par hypothèse de récurrence.}
\end{aligned}$$

On a donc bien montré que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $D^n\alpha = \sum_{i\geq 0}\binom{n}{i}\Delta^i\alpha$.

Réciproquement, on suppose qu'il existe $R_0, \dots, R_{N-1} \in U$ tels que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\alpha_n = \sum_{i=0}^{N-1}\binom{n}{i}R_i$. On considère pour $k \geq 0$, la suite $\beta^k \in \mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}$ définie par

$$\beta^k_n = n^k,$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$. On remarque que pour $k \geq 0$ fixé, on a $\Delta^{k+1}\beta^k = 0$. En effet, on raisonne par récurrence forte sur $k \geq 0$ pour montrer ceci.

- Si $k = 0$ alors pour tout $n \in \mathbb{Z}, (\Delta\beta^0)_n = (n+1)^0 - n^0 = 0$: on a donc bien le résultat pour $k = 0$.

- Soit $k \geq 0$ tel que le résultat soit vrai pour tout $i \leq k$. On a

  $$(\Delta\beta^{k+1})_n = (n+1)^{k+1} - n^{k+1} = \sum_{i=0}^{k}\binom{k+1}{i}n^i = \sum_{i=0}^{k}\binom{k+1}{i}\beta^i_n,$$

  pour tout $n \in \mathbb{Z}$. On en déduit que

  $$\Delta\beta^{k+1} = \sum_{i=0}^{k}\binom{k+1}{i}\beta^i.$$

  De plus, par hypothèse de récurrence, on sait que pour tout $i \leq k$, $\Delta^{i+1}\beta^i = 0$. Donc, en particulier, on a pour tout $i \leq k$, $\Delta^{k+1}\beta^i = 0$. Ainsi

  $$\Delta^{k+2}\beta^{k+1} = \Delta^{k+1}(\Delta\beta^{k+1}) = \Delta^{k+1}\left(\sum_{i=0}^{k}\binom{k+1}{i}\beta^i\right) = \sum_{i=0}^{k}\binom{k+1}{i}\Delta^{k+1}\beta^i = 0.$$

On a bien montré que pour tout $k \geq 0$, $\Delta^{k+1}\beta^k = 0$. Par ailleurs, il est clair que pour tout $i \geq 0$ et $n \in \mathbb{Z}$, $\binom{n}{i}$ s'écrit sous la forme

$$\binom{n}{i} = \sum_{l=0}^{i} a_l n^l = \sum_{l=0}^{i} a_l \beta_n^l,$$

où $a_l \in \mathbb{Z}$ pour tout $l \leq i$. On définit de plus pour tout $i \geq 0$, $\gamma^i \in U^{\mathbb{Z}}$, par

$$\gamma_n^i = R_i \binom{n}{i} = R_i \sum_{l=0}^{i} a_l \beta_n^l,$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$. On a alors

$$\gamma^i = R_i \sum_{l=0}^{i} a_l \beta^l,$$

pour tout $i \geq 0$. De plus, on a pour tout $i \leq N-1$ et $l \leq i$, $\Delta^N \beta^l = 0$ car $l+1 \leq i+1 \leq N$. Ainsi, on a

$$\Delta^N \gamma^i = R_i \sum_{l=0}^{i} a_l \Delta^N \beta^l = 0,$$

pour tout $i \leq N-1$. Or, on remarque que

$$\begin{aligned}
(\Delta^N \alpha)_n &= \sum_{i \geq 0} (-1)^i \binom{N}{i} \alpha_{n+N-i} && \text{d'après le Lemme 12} \\
&= \sum_{i \geq 0} (-1)^i \binom{N}{i} \left(\sum_{l=0}^{N-1} \binom{n+N-i}{l} R_l \right) && \text{par hypothèse} \\
&= \sum_{l=0}^{N-1} \left(\sum_{i \geq 0} (-1)^i \binom{N}{i} \gamma_{n+N-i}^l \right) \\
&= \sum_{l=0}^{N-1} (\Delta^N \gamma^l)_n && \text{d'après le Lemme 12,}
\end{aligned}$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$. On en déduit donc que $\Delta^N \alpha = \sum_{i=0}^{N-1} \Delta^N \gamma^i = 0$. On a donc bien montré que $\alpha \in \ker \Delta^N$. □

Corollaire 14. *Soit $\alpha \in U^{\mathbb{Z}}$ et $N \geq 1$. On a*

$$\alpha \in \ker \Delta^N \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{Z}, \alpha_n = P_{N-1}(n),$$

où P_{N-1} est un polynôme de degré au plus $N-1$ à coefficients dans U.

Démonstration. Pour montrer ce corollaire, on va raisonner par double implication.

On suppose que $\alpha \in \ker \Delta^N$. Par la proposition précédente, on sait que

$$\alpha_n = \sum_{i\geq 0} \binom{n}{i} (\Delta^i \alpha)_0 = \sum_{i=0}^{N-1} \binom{n}{i} (\Delta^i \alpha)_0,$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$, car $\alpha \in \ker \Delta^N$. Comme pour tout $i \in [\![0, N-1]\!]$ et $n \in \mathbb{Z}$, $\binom{n}{i}$ est un polynôme de degré i en n, on a le résultat.

Réciproquement, on suppose que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\alpha_n = P_{N-1}(n)$ où P_{N-1} est un polynôme de degré au plus $N-1$ à coefficients dans U. On écrit P_{N-1} sous la forme

$$P_{N-1}(X) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k X^k,$$

où $a_k \in U$ pour tout $k \in [\![0, N-1]\!]$. On cherche $R_0, \dots, R_{N-1} \in U$ tels que

$$P_{N-1}(X) = R_0 + R_1 X + R_2 \frac{X(X-1)}{2\,!} + \dots + R_{N-1} \frac{X(X-1)\dots(X-N+2)}{(N-1)\,!}.$$

En identifiant les coefficients, on obtient des équations du type

$$a_0 = R_0 \qquad \text{et} \qquad a_i = \frac{1}{i\,!} R_i + \sum_{k=i}^{N-1} b_k R_k \qquad \text{et} \qquad a_{N-1} = \frac{R_{N-1}}{(N-1)\,!},$$

pour tout $i \in [\![1, N-2]\!]$, où $b_k \in \mathbb{Z}$ pour tout $k \in [\![i, N-1]\!]$. On peut donc résoudre ce système pour trouver de tels $R_0, \dots, R_{N-1}$ et on a alors

$$P_{N-1}(n) = \sum_{i=0}^{N-1} \binom{n}{i} R_i,$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Par la proposition précédente, on en déduit que $\alpha \in \ker \Delta^N$. □

4.2 Séries génératrices formelles

Définition 15. Soit $\alpha \in U^{\mathbb{Z}}$.

- La *série génératrice formelle associée à α*, notée $\alpha(z)$, est définie par

$$\alpha(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n z^{-n-1} \in U\left[[z, z^{-1}]\right],$$

On considère maintenant $\alpha(z)$ la série génératrice formelle associée à α.

- La *dérivée formelle de $\alpha(z)$*, notée $\partial_z\alpha(z)$, est définie par

$$\partial_z\alpha(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}(-n-1)\alpha_n z^{-n-2} = \sum_{n\in\mathbb{Z}}(-n)\alpha_{n-1}z^{-n-1} \in U\left[[z,z^{-1}]\right].$$

  On définit de plus par récurrence $\partial_z^i : U\left[[z,z^{-1}]\right] \to U\left[[z,z^{-1}]\right]$ par

$$\partial_z^0 = Id \qquad \text{et} \qquad \partial_z^i = \partial_z \circ \partial_z^{i-1},$$

  pour tout $i \geq 1$. On définit aussi $\partial_z^{(i)} : U\left[[z,z^{-1}]\right] \to U\left[[z,z^{-1}]\right]$ pour $i \geq 0$ par

$$\partial_z^{(i)} = \frac{\partial_z^i}{i\,!}.$$

- Le *résidu formel associé à $\alpha(z)$*, noté $Res_z\alpha(z)$, est défini par

$$Res_z\alpha(z) = \alpha_0.$$

Remarque 16. On remarque que

$$\partial_z^{(i)}\alpha(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\binom{-n-1}{i}\alpha_n z^{-n-1-i}, \tag{$\triangle$}$$

pour tout $i \geq 0$. En effet, pour montrer cela, on va raisonner par récurrence sur $i \geq 0$.

- On suppose que $i = 0$. On a alors

$$\partial_z^{(0)}\alpha(z) = \alpha(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\alpha_n z^{-n-1} = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\binom{-n-1}{0}\alpha_n z^{-n-1}.$$

  On a donc bien le résultat pour $i = 0$.

- Soit $i \geq 0$ tel que le résultat soit vrai au rang i. Par hypothèse de récurrence, on a

$$\partial_z^{(i+1)}\alpha(z) = \frac{1}{i+1}\partial_z\left(\partial_z^{(i)}\alpha(z)\right) = \frac{1}{i+1}\partial_z\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\binom{-n-1}{i}\alpha_n z^{-n-1-i}\right).$$

  Par définition de la dérivée formelle d'une série génératrice formelle, on a alors

$$\partial_z^{(i+1)}\alpha(z) = \frac{1}{i+1}\partial_z\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\binom{-n+i-1}{i}\alpha_{n-i}z^{-n-1}\right) = \frac{1}{i+1}\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-n-1)\binom{-n+i-1}{i}\alpha_{n-i}z^{-n-2}.$$

  On en déduit donc que

$$\partial_z^{(i+1)}\alpha(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{(-n-i-1)}{i+1}\binom{-n-1}{i}\alpha_n z^{-n-1-i-1} = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\binom{-n-1}{i+1}\alpha_n z^{-n-1-i-1}.$$

On obtient ainsi bien le résultat souhaité.

Lemme 17. *Soit $k \geq 1$, $\alpha \in U^{\mathbb{Z}}$ et $\alpha(z)$ sa série génératrice formelle associée. On a*

- $Res_z \partial_z \alpha(z) = 0,$ (17.1)
- $\partial_z(z^k \alpha(z)) = kz^{k-1}\alpha(z) + z^k \partial_z \alpha(z),$ (17.2)
- $Res_z(z^k \partial_z \alpha(z)) = -kRes_z(z^{k-1}\alpha(z)).$ (17.3)

Démonstration. Le point (17.1) découle directement de la définition du résidu formel et de la dérivée formelle.

Par la définition de la dérivée formelle d'une série génératrice formelle, on a

$$\partial_z(z^k \alpha(z)) = \partial_z \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n z^{-n-1+k} \right) = \partial_z \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_{n+k} z^{-n-1} \right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-n-1)\alpha_{n+k} z^{-n-2}.$$

On a alors

$$\partial_z(z^k \alpha(z)) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-n+k-1)\alpha_n z^{-n+k-2} = kz^{k-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n z^{-n-1} + z^k \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-n-1)\alpha_n z^{-n-2}.$$

On en déduit que

$$\partial_z(z^k \alpha(z)) = kz^{k-1}\alpha(z) + z^k \partial_z \alpha_z.$$

On a donc montré le point (17.2).

Par ailleurs, par l'égalité précédente on a

$$Res_z \left(\partial_z(z^k \alpha(z)) \right) = kRes_z(z^{k-1}\alpha(z)) + Res_z(z^k \partial_z \alpha(z)).$$

Or, comme $Res_z \left(\partial_z(z^k \alpha(z)) \right) = 0$ d'après le point (17.1), on en déduit que

$$Res_z(z^k \partial_z \alpha(z)) = -kRes_z(z^{k-1}\alpha(z)).$$

On a donc montré le point (17.3). □

Remarque 18. Les points (17.2) et (17.3) de ce lemme montrent que les séries génératrices formelles vérifient une version de la règle de Leibniz et de l'intégration par parties.

Définition 19 (Série delta formelle)**.**

On définit la *série delta formelle*, notée $\delta(z)$, par

$$\delta(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} z^n = \sum_{n \in \mathbb{Z}} z^{-n-1} \in U\left[[z, z^{-1}]\right].$$

On définit de plus une famille de séries génératrices formelles $(\delta^{(i)}(z))_{i \geq 0}$ par

$$\delta^{(i)}(z) = (-1)^i \partial_z^{(i)} \delta(z),$$

pour tout $i \geq 0$.

Remarque 20. On remarque que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $z^k \delta(z) = \delta(z)$. En particulier, on a $(z-1)\delta(z) = 0$.

Remarque 21. Pour tout $i \geq 0$, $\delta^{(i)}(z)$ est une série génératrice formelle associée à la suite $(\binom{n}{i})_{n \in \mathbb{Z}}$. En effet, on a

$$\delta^{(0)}(z) = \delta(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} z^m = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \binom{n}{0} z^{-n-1}.$$

De plus, d'après ($\triangle$), on a

$$\delta^{(i)}(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} (-1)^i \binom{-m-1}{i} z^{-m-1-i},$$

pour tout $i \geq 1$. Ainsi, on a

$$\delta^{(i)}(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^i \binom{-n-1+i}{i} z^{-n-1} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \binom{n}{i} z^{-n-1},$$

pour tout $i \geq 1$, d'après ($\star$). On en déduit donc que

$$\delta^{(i)}(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \binom{n}{i} z^{-n-1},$$

pour tout $i \geq 0$.

Lemme 22. *Pour tout $i \geq 1$, $(z-1)\delta^{(i)}(z) = \delta^{(i-1)}(z)$.*

Démonstration. Par la remarque précédente, on sait que pour tout $i \geq 0$, $\delta^{(i)}(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \binom{n}{i} z^{-n-1}$. On a alors

$$(z-1)\delta^{(i)}(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \binom{n+1}{i} z^{-n-1} - \sum_{n \in \mathbb{Z}} \binom{n}{i} z^{-n-1} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left[\binom{n+1}{i} - \binom{n}{i}\right] z^{-n-1},$$

pour tout $i \geq 1$. Par le triangle de Pascal, on en déduit que

$$(z-1)\delta^{(i)}(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \binom{n}{i-1} z^{-n-1} = \delta^{(i-1)}(z),$$

pour tout $i \geq 1$. $\square$

Remarque 23. On remarque que ce lemme reste valable pour tout $i \in \mathbb{Z}$ si on pose $\delta^{(i)}(z) = 0$ pour $i < 0$. Cette convention paraît naturelle car si on étend la définition de $\delta^{(i)}(z)$ pour $i < 0$ en considérant son expression sous forme de série formelle génératrice associée à la suite $(\binom{n}{i})_{n\in\mathbb{Z}}$, on obtient le même résultat.

Grâce à ces considérations sur la famille $(\delta^{(i)}(z))_{i\geq 0}$, on peut reformuler le Corollaire 14 qui découle de la formule des différences avant de Newton.

Lemme 24 (Reformulation du Corollaire 14)**.**

Soit $N \geq 1$, $\alpha \in U^{\mathbb{Z}}$ *et* $\alpha(z)$ *sa série génératrice formelle associée. On a*

$$\alpha \in \ker \Delta^N \Leftrightarrow \alpha(z) = \sum_{i=0}^{N-1} R_i \delta^{(i)}(z),$$

où $R_i = Res_z((z-1)^i \alpha(z)) \in U$ *pour tout* $i \in [\![0, N-1]\!]$.

Remarque 25. Soit $\alpha \in U^{\mathbb{Z}}$ et $\alpha(z)$ sa série génératrice formelle associée. On note de plus $(\Delta\alpha)(z)$ la série génératrice formelle associée à $\Delta\alpha$. On remarque que $(\Delta\alpha)(z) = (z-1)\alpha(z)$. En effet, on a

$$(\Delta\alpha)(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\Delta\alpha)_n z^{-n-1} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\alpha_{n+1} - \alpha_n) z^{-n-1} = z \sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n z^{-n-1} - \sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n z^{-n-1} = (z-1)\alpha(z).$$

On définit $f : U[[z, z^{-1}]] \to U[[z, z^{-1}]]$ par

$$f(\beta(z)) = (\Delta\beta)(z),$$

pour tout $\beta(z)$ série génératrice formelle. Par ce qui précéde, on remarque que f multiplie une série génératrice formelle par $(z-1)$. Comme $U[[z, z^{-1}]]$ est un $U[z]$-module, on en déduit que

$$\alpha \in \ker \Delta^N \Leftrightarrow (z-1)^N \alpha(z) = 0,$$

où $N \geq 1$.

Démonstration. Pour montrer ce lemme, on va raisonner par double implication.

On suppose que $\alpha \in \ker \Delta^N$. Par la Proposition 13, on a

$$\alpha_n = \sum_{i\geq 0} \binom{n}{i} (\Delta^i \alpha)_0 = \sum_{i=0}^{N-1} \binom{n}{i} (\Delta^i \alpha)_0,$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$, car $\alpha \in \ker \Delta^N$. Par la remarque précédente, si on note pour tout $i \geq 0$, $(\Delta^i\alpha)(z)$ la série génératrice formelle associée à $\Delta^i\alpha$, on en déduit que

$$(\Delta^i\alpha)(z) = (z-1)^i \alpha(z),$$

pour tout $i \geq 0$. Or, par définition, on sait que $(\Delta^i\alpha)_0 = Res_z((\Delta^i\alpha)(z)) = Res_z((z-1)^i\alpha(z))$. On a alors

$$\alpha_n = \sum_{i=0}^{N-1} \binom{n}{i} Res_z((z-1)^i \alpha(z)) = \sum_{i=0}^{N-1} \binom{n}{i} R_i,$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Ainsi, on en déduit que

$$\alpha(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{i=0}^{N-1} \binom{n}{i} R_i \right) z^{-n-1} = \sum_{i=0}^{N-1} R_i \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \binom{n}{i} z^{-n-1} \right) = \sum_{i=0}^{N-1} R_i \delta^{(i)}(z).$$

Réciproquement, on suppose que $\alpha(z) = \sum_{i=0}^{N-1} R_i \delta^{(i)}(z)$. On a

$$\alpha(z) = \sum_{i=0}^{N-1} R_i \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \binom{n}{i} z^{-n-1} \right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{i=0}^{N-1} \binom{n}{i} R_i z^{-n-1}.$$

De plus, par définition, on sait que $\alpha(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n z^{-n-1}$. En identifiant les coefficients, on a alors

$$\alpha_n = \sum_{i=0}^{N-1} R_i z^{-n-1},$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Par la Proposition 13, on en déduit que $\alpha \in \ker \Delta^N$. □

Remarque 26. Si on considère $U = \mathbb{C}$, le paramètre formel z peut être considéré comme un nombre complexe dans un domaine où la série formelle converge. On remarque que pour tout $i \geq 0$, $\delta^{(i)}(z)$ diverge pour n'importe quel $z \in \mathbb{C}$: il est donc naturel de vouloir couper cette série divergente en deux séries convergentes sur des domaines disjoints. On définit donc

$$\delta^{(i)}(z)_+ = \sum_{n\geq 0} \binom{n}{i} z^{-n-1} \qquad \text{et} \qquad \delta^{(i)}(z)_- = \sum_{n\leq -1} \binom{n}{i} z^{-n-1},$$

pour tout $i \geq 0$ et $z \in \mathbb{C}$. Ces deux séries sont convergentes sur des domaines disjoints. En effet, pour montrer cela, on va considérer les fonctions

$$\iota_{|z|>1} : \mathbb{C}\left[\left[\frac{1}{z-1}\right]\right]] \to \mathbb{C}\left[[z, z^{-1}]\right] \qquad \text{et} \qquad \iota_{|z|<1} : \mathbb{C}\left[\left[\frac{1}{z-1}\right]\right] \to \mathbb{C}\left[[z, z^{-1}]\right]$$

qui à un élément de $\mathbb{C}\left[\frac{1}{z-1}\right]$ associe sa série de Laurent pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > 1$ et $|z| < 1$ respectivement. On remarque que

$$\iota_{|z|>1}\left(\frac{1}{(z-1)^{i+1}}\right) = \delta^{(i)}(z) \qquad \text{et} \qquad \iota_{|z|<1}\left(\frac{1}{(z-1)^{i+1}}\right) = -\delta^{(i)}(z),$$

pour tout $i \geq 0$ et $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > 1$ et $|z| < 1$ respectivement. En effet, on a

$$\iota_{|z|>1}\left(\frac{1}{(z-1)^{i+1}}\right) = \frac{1}{z^{i+1}\left(1-\frac{1}{z}\right)^{i+1}} = z^{-i-1} \sum_{n\geq 0} \binom{-i-1}{n} (-1)^n \frac{1}{z^n},$$

pour tout $i \geq 0$ et $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > 1$. De plus, on a d'après ($\star$)

$$\iota_{|z|>1}\left(\frac{1}{(z-1)^{i+1}}\right)=z^{-i-1}\sum_{n\geq 0}\binom{i+n}{n}z^{-n}=z^{-i-1}\sum_{n\geq 0}\binom{i+n}{i}z^{-n},$$

pour tout $i\geq 0$ et $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z|>1$ car $i+n\geq 0$ pour tout $n\geq 0$. D'où

$$\iota_{|z|>1}\left(\frac{1}{(z-1)^{i+1}}\right)=z^{-i-1}\sum_{n\geq i}\binom{n}{i}z^{-n+i}=\sum_{n\geq 0}\binom{n}{i}z^{-n-1}=\delta^{(i)}(z)_+,$$

pour tout $i\geq 0$ et $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z|>1$ en utilisant le fait que pour tout $n\in[\![0,i-1]\!]$, $\binom{n}{i}=0$. De même, on a

$$\iota_{|z|<1}\left(\frac{1}{(z-1)^{i+1}}\right)=-\frac{(-1)^i}{(1-z)^{i+1}}=-(-1)^i\sum_{n\geq 0}\binom{-i-1}{n}(-1)^n z^n=-(-1)^i\sum_{n\geq 0}\binom{i+n}{n}z^n,$$

pour tout $i\geq 0$ et $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z|<1$, d'après $(\star)$. On en déduit par $(\star)$ que

$$\iota_{|z|<1}\left(\frac{1}{(z-1)^{i+1}}\right)=-\sum_{n\geq 1}(-1)^i\binom{n-1+i}{i}z^{n-1}=-\sum_{n\geq 1}\binom{-n}{i}z^{n-1}=-\sum_{n\leq -1}\binom{n}{i}z^{-n-1}=-\delta^{(i)}(z)_-,$$

pour tout $i\geq 0$ et $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z|<1$. Ces deux séries sont donc bien convergentes sur des domaines disjoints.

Cette remarque justifie donc la considération de la convention suivante pour les paramètres formels.

Définition 27 (Convention pour les paramètres formels)**.**

Soit $m\in\mathbb{Z}$ et x,y deux paramètres formels. On définit $f:K\left[\left[(x+y),(x+y)^{-1}\right]\right]\hookrightarrow K\left[\left[x,x^{-1},\frac{y}{x}\right]\right]\subset K\left[\left[x,x^{-1},y,y^{-1}\right]\right]$ et $g:K\left[\left[(y+x),(y+x)^{-1}\right]\right]\hookrightarrow K\left[\left[y,y^{-1},\frac{x}{y}\right]\right]\subset K\left[\left[x,x^{-1},y,y^{-1}\right]\right]$ par

$$f\left((x+y)^m\right)=\sum_{k\geq 0}\binom{m}{k}x^{m-k}y^k\qquad\text{et}\qquad g\left((y+x)^m\right)=\sum_{k\geq 0}\binom{m}{k}y^{m-k}x^k,$$

pour tout $m\in\mathbb{Z}$. Dans la suite, on identifie pour tout $m\in\mathbb{Z}$, $(x+y)^m$ et $(x+y)^m$ à leur image respective par f et g ce qui fournit la convention pour les paramètres formels.

Remarque 28. On remarque que si $m\geq 0$ alors $(x+y)^m$ est une série finie qui coïncide avec $(y+x)^m$. En effet, on a

$$(x+y)^m=\sum_{k\geq 0}\binom{m}{k}x^{m-k}y^k=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}x^{m-k}y^k,$$

pour tout $m\geq 0$, car pour tout $k\geq m+1$, $\binom{m}{k}=0$. De plus, on a

$$(x+y)^m=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}x^{m-k}y^k=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{m-k}x^k y^{m-k}=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}y^{m-k}x^k=(y+x)^m,$$

pour tout $m\geq 0$. Cependant, on remarque que si $m<0$ alors $(x+y)^m\neq(y+x)^m$. En effet, on a

$$(x+y)^m = \sum_{k\geq 0} \binom{m}{k} x^{m-k} y^k = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \binom{m}{k} x^{m-k} y^k,$$

pour tout $m < 0$ car pour tout $k < 0$, $\binom{m}{k} = 0$. De même, on a

$$(y+x)^m = \sum_{k\geq 0} \binom{m}{k} y^{m-k} x^k = \sum_{k\leq m} \binom{m}{m-k} x^{m-k} y^k = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \binom{m}{m-k} x^{m-k} y^k,$$

pour tout $m < 0$. En particulier, pour tout $m < 0$, le coefficient pour $k = 0$ de $(x+y)^m$ est $\binom{m}{0} x^m = x^m$ et celui de $(y+x)^m$ est $\binom{m}{m} x^m = 0$ car $m < 0$. On a donc bien que pour tout $m < 0$, $(x+y)^m \neq (y+x)^m$.

De plus pour $m < 0$, on note parfois

$$\frac{1}{(x+y)^m} = (x+y)^{-m}.$$

Remarque 29. Soit x, y, z des paramètres formels. On remarque que

$$z^n (x+y)^n = (xz+yz)^n, \tag{$\diamond$}$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$. En effet, par la convention pour les paramètres formels, on a

$$z^n (x+y)^n = z^n \sum_{k\geq 0} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k = \sum_{k\geq 0} \binom{n}{k} (xz)^{n-k} (yz)^k = (xz+yz)^n,$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Définition 30 (Convention pour un paramètre formel et un élément non nul du corps)**.** A partir de la convention pour les paramètres formels, on peut de même faire une autre convention pour un paramètre formel z et un élément non nul a du corps K. Pour cela, on évalue un des deux paramètres formels i.e.

$$(z+a)^m = \sum_{k\geq 0} \binom{m}{k} z^{m-k} a^k \qquad \text{et} \qquad (a+z)^m = \sum_{k\geq 0} \binom{m}{k} a^{m-k} z^k,$$

où $m \in \mathbb{Z}$. On remarque que cette convention garde les mêmes propriétés que la précédente. Pour montrer cela, il suffit d'évaluer un des deux paramètres formels dans les démonstrations des propriétés sur la convention pour les paramètres formels.

Dans la Remarque 26, on a coupé $\delta^{(i)}(z)$ en deux séries formelles $\delta^{(i)}(z)_+$ et $\delta^{(i)}(z)_-$ pour tout $i \geq 0$. Dans la définition suivante, on va généraliser cela pour toutes les séries génératrices formelles.

Définition 31. Soit $\alpha \in U^{\mathbb{Z}}$ et $\alpha(z)$ sa série génératrice formelle associée. On définit

$$\alpha(z)_+ = \sum_{n\geq 0} \alpha_n z^{-n-1} \qquad \text{et} \qquad \alpha(z)_- = \sum_{n\leq -1} \alpha_n z^{-n-1}.$$

Remarque 32. On remarque que

$$\delta^{(i)}(z)_+ = \frac{1}{(z-1)^{i+1}} \qquad \text{et} \qquad \delta^{(i)}(z)_- = -\frac{1}{(-1+z)^{i+1}},$$

pour tout $i \geq 0$. En effet, par la convention pour un paramètre formel et un élément non nul du corps, on a

$$\frac{1}{(z-1)^{i+1}} = \sum_{n\geq 0} \binom{-i-1}{n} (-1)^n z^{-i-1-n} \qquad \text{et} \qquad -\frac{1}{(-1+z)^{i+1}} = \sum_{n\geq 0} \binom{-i-1}{n} (-1)^{-i-n} z^n.$$

On en déduit, d'après ($\star$) que

$$\frac{1}{(z-1)^{i+1}} = \sum_{n\geq 0} \binom{i+n}{n} z^{-i-1-n} = \sum_{n\geq 0} \binom{i+n}{i} z^{-i-1-n},$$

pour tout $i \geq 0$, car $i+n \geq 0$. On a alors

$$\frac{1}{(z-1)^{i+1}} = \sum_{n\geq i} \binom{n}{i} z^{-n-1} = \sum_{n\geq 0} \binom{n}{i} z^{-n-1} = \delta^{(i)}(z)_+,$$

pour tout $i \geq 0$, car pour tout $n \in [\![0, i-1]\!]$, $\binom{n}{i} = 0$. Par ailleurs, on a également

$$-\frac{1}{(-1+z)^{i+1}} = \sum_{n\geq 0} \binom{i+n}{i} (-1)^i z^n = \delta^{(i)}(z)_-,$$

pour tout $i \geq 0$, en raisonnant comme précédemment et en utilisant la Remarque 26.

Avec ces nouvelles considérations, on peut encore une fois reformuler le Corollaire 14 qui découle de la formule des différences avant de Newton.

Lemme 33 (Autre reformulation du Corollaire 14)**.**

Soit $N \geq 1$, $\alpha \in U^{\mathbb{Z}}$ et $\alpha(z)$ sa série génératrice formelle associée. On a

$$\alpha \in \ker \Delta^N \Leftrightarrow \alpha(z)_+ = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{R_i}{(z-1)^{i+1}} \qquad \textit{et} \qquad \alpha(z)_- = -\sum_{i=0}^{N-1} \frac{R_i}{(-1+z)^{i+1}},$$

où $R_i = Res_z((z-1)^i \alpha(z)) \in U$ pour tout $i \in [\![0, N-1]\!]$.

Démonstration. D'après le Lemme 24 qui reformule le Corollaire 14, on a

$$\alpha \in \ker \Delta^N \Leftrightarrow \alpha(z) = \sum_{i=0}^{N-1} R_i \delta^{(i)}(z).$$

Or, on remarque que

$$\alpha(z) = \sum_{i=0}^{N-1} R_i \delta^{(i)}(z) \Leftrightarrow \alpha(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{i=0}^{N-1} R_i \binom{n}{i} z^{-n-1}$$
$$\Leftrightarrow \alpha(z)_+ = \sum_{n\geq 0} \sum_{i=0}^{N-1} R_i \binom{n}{i} z^{-n-1} \qquad \text{et} \qquad \alpha(z)_- = \sum_{n\leq -1} \sum_{i=0}^{N-1} R_i \binom{n}{i} z^{-n-1}$$

Par la remarque précédente, on a alors

$$\alpha(z) = \sum_{i=0}^{N-1} R_i \delta^{(i)}(z) \Leftrightarrow \alpha(z)_+ = \sum_{i=0}^{N-1} R_i \left(\sum_{n\geq 0} \binom{n}{i} z^{-n-1} \right) \qquad \text{et} \qquad \alpha(z)_- = \sum_{i=0}^{N-1} R_i \left(\sum_{n\leq -1} \binom{n}{i} z^{-n-1} \right)$$
$$\Leftrightarrow \alpha(z)_+ = \sum_{i=0}^{N-1} R_i \delta^{(i)}(z)_+ \qquad \text{et} \qquad \alpha(z)_- = \sum_{i=0}^{N-1} R_i \delta^{(i)}(z)_-$$
$$\Leftrightarrow \alpha(z)_+ = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{R_i}{(z-1)^{i+1}} \qquad \text{et} \qquad \alpha(z)_- = -\sum_{i=0}^{N-1} \frac{R_i}{(-1+z)^{i+1}}.$$

□

Les Lemmes 24 et 33 et le Corollaire 14, qui découlent de la formule des différences avant de Newton, sont récapitulés dans le théorème suivant.

Théorème 34. *Soit $N \geq 1$, $\alpha \in U^{\mathbb{Z}}$ et $\alpha(z)$ sa série génératrice formelle associée. On a*

$$\alpha \in \ker \Delta^N \Leftrightarrow (z-1)^N \alpha(z) = 0 \tag{34.1}$$
$$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{Z}, \alpha_n = \sum_{i=0}^{N-1} \binom{n}{i} R_i \tag{34.2}$$
$$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{Z}, \alpha_n = P_{N-1}(n) \tag{34.3}$$
$$\Leftrightarrow \alpha(z) = \sum_{i=0}^{N-1} R_i \delta^{(i)}(z) \tag{34.4}$$
$$\Leftrightarrow \alpha(z)_+ = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{R_i}{(z-1)^{i+1}} \text{ et } \alpha(z)_- = -\sum_{i=0}^{N-1} \frac{R_i}{(-1+z)^{i+1}}, \tag{34.5}$$

où $R_i = Res_z((z-1)^i \alpha(z)) = (\Delta^i \alpha)_0 \in U$ pour tout $i \in [\![0, N-1]\!]$ et P_{N-1} est un polynôme de degré au plus $N-1$ à coefficients dans U.

4.3 Calcul de séries formelles

Lemme 35 (Théorème de Taylor)**.**

Soit x, y deux paramètres formels, $\alpha \in U^{\mathbb{Z}}$ et $\alpha(z)$ sa série génératrice formelle associée. On a

$$\alpha(x+y) = e^{y\partial_x}\left(\alpha(x)\right),$$

où $\alpha(x+y) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n (x+y)^{-n-1}$ et $e^{y\partial_x} = \sum_{i\geq 0} y^i \partial_x^{(i)}$

Démonstration. Par la convention pour les paramètres formels, on a

$$\alpha(x+y) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n (x+y)^{-n-1} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n \left(\sum_{i\geq 0} \binom{-n-1}{i} x^{-n-1-i} y^i \right).$$

Or, d'après ($\triangle$), on sait que

$$\partial_x^{(i)}(x^{-n-1}) = \binom{-n-1}{i} x^{-n-1-i},$$

pour tout $i \geq 0$. Ainsi, on en déduit que

$$\alpha(x+y) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n \left(\sum_{i\geq 0} \partial_x^{(i)}(x^{-n-1}) y^i \right) = \sum_{i\geq 0} y^i \partial_x^{(i)} \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n x^{-n-1} \right) = e^{y\partial_x}\left(\alpha(x)\right).$$

□

Lemme 36. *Soit $\alpha \in U^{\mathbb{Z}}$ et $\alpha(z)$ sa série génératrice formelle associée. On a*

$$\partial_z\left(\alpha(z)_+\right) = \left(\partial_z \alpha(z)\right)_+ \qquad \textit{et} \qquad \partial_z\left(\alpha(z)_-\right) = \left(\partial_z \alpha(z)\right)_-.$$

Démonstration. Par définition, on a

$$\partial_z\left(\alpha(z)_+\right) = \partial_z \left(\sum_{n\geq 0} \alpha_n z^{-n-1} \right) = \sum_{n\geq 0} (-n-1) \alpha_n z^{-n-2} = \left(\partial_z \alpha(z)\right)_+.$$

On montre de même que $\partial_z\left(\alpha(z)_-\right) = \left(\partial_z \alpha(z)\right)_-$. □

Remarque 37. Grâce à ce lemme, on peut écrire sans ambiguïté $\partial_z \alpha(z)_+$ et $\partial_z \alpha(z)_-$.

Lemme 38 (Théorème des résidus)**.**

Soit $\alpha \in U^{\mathbb{Z}}$ *et* $\alpha(z)$ *sa série génératrice formelle associée. On a*

$$Res_x \frac{\alpha(x)}{(x-z)^{k+1}} = \partial_z^{(k)} \alpha(z)_- \qquad et \qquad Res_x \frac{\alpha(x)}{(-z+x)^{k+1}} = -\partial_z^{(k)} \alpha(z)_+,$$

pour tout $k \geq 0$*.*

Démonstration. On remarque tout d'abord que

$$Res_x \frac{\alpha(x)}{x-z} = \alpha(z)_-.$$

En effet, par la convention pour les paramètres formels, on a

$$\frac{\alpha(x)}{x-z} = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n x^{-n-1}\right)\left(\sum_{m\geq 0} \binom{-1}{m} x^{-1-m}(-z)^m\right) = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n x^{-n-1}\right)\left(\sum_{m\geq 0} x^{-1-m} z^m\right).$$

On a alors

$$\frac{\alpha(x)}{x-z} = \sum_{m\geq 0}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n x^{-n-m-2} z^m = \sum_{m\geq 0}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_{n-m-1} x^{-n-1} z^m = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{m\geq 0} \alpha_{n-m-1} z^m\right) x^{-n-1}.$$

Ainsi, on a

$$Res_x \frac{\alpha(x)}{x-z} = \sum_{m\geq 0} \alpha_{-m-1} z^m = \sum_{m\leq -1} \alpha_m z^{-m-1} = \alpha(z)_-.$$

On en déduit donc que

$$\partial_z^{(k)} \alpha(z)_- = \partial_z^{(k)} \left(Res_x \frac{\alpha(x)}{x-z}\right),$$

pour tout $k \geq 0$. Or, on remarque de plus que

$$\partial_z^{(k)} \left(Res_x \frac{\alpha(x)}{x-z}\right) = Res_x \left(\partial_z^{(k)} \frac{\alpha(x)}{x-z}\right),$$

pour tout $k \geq 0$. En effet, on a

$$\partial_z^{(k)} \frac{\alpha(x)}{x-z} = \partial_z^{(k)} \left(\sum_{m\geq 0}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_{n-m-1} z^m x^{-n-1}\right) = \partial_z^{(k)} \left(\sum_{m\leq -1}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_{n+m} x^{-n-1}\right) z^{-m-1}\right),$$

pour tout $k \geq 0$. D'après ($\triangle$), on a alors

$$\partial_z^{(k)} \frac{\alpha(x)}{x-z} = \sum_{m\leq -1}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \binom{-m-1}{k} \alpha_{n+m} x^{-n-1} z^{-m-1-k} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{m\leq -1} \binom{-m-1}{k} \alpha_{n+m} z^{-m-1-k}\right) x^{-n-1},$$

pour tout $k \geq 0$. D'après ($\triangle$), on en déduit que

$$Res_x\left(\partial_z^{(k)}\frac{\alpha(x)}{x-z}\right) = \sum_{m\leq -1}\binom{-m-1}{k}\alpha_m z^{-m-1-k} = \partial_z^{(k)}\left(Res_x\frac{\alpha(x)}{x-z}\right),$$

pour tout $k \geq 0$. Pour montrer le résultat voulu, il suffit de montrer que

$$\frac{\alpha(x)}{(x-z)^{k+1}} = \partial_z^{(k)}\frac{\alpha(x)}{x-z},$$

pour tout $k \geq 0$, pour obtenir la 1re égalité. Par la convention pour les paramètres formels, on a

$$\frac{\alpha(x)}{(x-z)^{k+1}} = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\alpha_n x^{-n-1}\right)\left(\sum_{m\geq 0}\binom{-k-1}{m}x^{-1-k-m}(-z)^m\right).$$

On en déduit donc que

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha(x)}{(x-z)^{k+1}} &= \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\alpha_n x^{-n-1}\right)\left(\sum_{m\geq 0}\binom{m+k}{m}x^{-1-k-m}z^m\right) && \text{d'après } (\star)\\
&= \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\alpha_n x^{-n-1}\right)\left(\sum_{m\geq 0}\binom{m+k}{k}x^{-1-k-m}z^m\right) && \text{car } m+k\geq 0\\
&= \sum_{m\geq 0}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\binom{m+k}{k}\alpha_n x^{-n-1-k-1-m}z^m\\
&= \sum_{m\geq 0}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\binom{m+k}{k}\alpha_{n-k-1-m}x^{-n-1}z^m\\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(\sum_{m\geq 0}\binom{m+k}{k}\alpha_{n-k-1-m}z^m\right)x^{-n-1}\\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(\sum_{m\leq -k-1}\binom{-m-1}{k}\alpha_{n+m}z^{-m-1-k}\right)x^{-n-1}\\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(\sum_{m\leq -1}\binom{-m-1}{k}\alpha_{n+m}z^{-m-1-k}\right)x^{-n-1} && \text{car si } m\in[\![-k,-1]\!] \text{ alors } -m-1\leq k\\
&= \partial_z^{(k)}\frac{\alpha(x)}{x-z} && \text{d'après } (\triangle),
\end{aligned}$$

pour tout $k \geq 0$. On obtient ainsi bien la 1re égalité et on raisonne de même pour montrer la 2e. $\square$

5 Localité

On rappelle que K est un corps de caractéristique nulle ; Soit U une K-algèbre associative.

- On définit un produit formel $\times : U\left[[x, x^{-1}]\right] \times U\left[[y, y^{-1}]\right] \to U\left[[x, x^{-1}, y, y^{-1}]\right]$ par

$$\alpha(x)\beta(y) = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} \alpha_m\beta_n x^{-m-1}y^{-n-1},$$

  pour tout $\alpha, \beta \in U^{\mathbb{Z}}$ et $\alpha(z), \beta(z)$ leurs séries génératrices formelles associées.

- On définit également un commutateur formel $[.,.] : U\left[[x, x^{-1}]\right] \times U\left[[y, y^{-1}]\right] \to U\left[[x, x^{-1}, y, y^{-1}]\right]$ par

$$[\alpha(x), \beta(y)] = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} [\alpha_m, \beta_n]_U x^{-m-1}y^{-n-1},$$

  pour tout $\alpha, \beta \in U^{\mathbb{Z}}$ et $\alpha(z), \beta(z)$ leurs séries génératrices formelles associées, où pour tout $m, n \in \mathbb{Z}$, $[\alpha_m, \beta_n]_U = \alpha_m\beta_n - \beta_n\alpha_m$.

Remarque 39. On peut définir de même le commutateur formel dans le cas où $(U, [.,.]_U)$ est une algèbre de Lie.

Remarque 40. On remarque que $[\alpha(x), \beta(y)] = \alpha(x)\beta(y) - \beta(y)\alpha(x)$. En effet, on a

$$\begin{aligned}
[\alpha(x), \beta(y)] &= \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} [\alpha_m, \beta_n]_U x^{-m-1}y^{-n-1} \\
&= \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} (\alpha_m\beta_n - \beta_n\alpha_m) x^{-m-1}y^{-n-1} \\
&= \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} \alpha_m\beta_n x^{-m-1}y^{-n-1} - \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} \beta_n\alpha_m x^{-m-1}y^{-n-1} \\
&= \alpha(x)\beta(y) - \beta(y)\alpha(x).
\end{aligned}$$

5.1 Localité des séries formelles

Définition 41 (Localité)**.**

Soit $\alpha, \beta \in U^{\mathbb{Z}}$ et $\alpha(z), \beta(z)$ leurs séries génératrices formelles associées. On définit pour $n \geq 0$,

$$C^n(\alpha(x), \beta(y)) = (x-y)^n[\alpha(x), \beta(y)].$$

- On dit que $\alpha(z)$ et $\beta(z)$ sont *mutuellement locaux* s'il existe un entier $n \geq 0$ tel que $C^n(\alpha(x), \beta(y)) = 0$ et on note dans ce cas $\alpha(z) \sim \beta(z)$.

  De plus, on appelle *ordre de localité* le plus petit entier $N \geq 0$ tel que $C^N(\alpha(x), \beta(y)) = 0$. On dit dans ce cas que $\alpha(z)$ et $\beta(z)$ sont *mutuellement locaux d'ordre N* et on note alors $\alpha(z) \overset{N}{\sim} \beta(z)$.

- On dit que $\alpha(z)$ est *local* si $\alpha(z) \sim \alpha(z)$.

Remarque 42. On remarque que la relation $\sim$ est symétrique. En effet, soit $\alpha, \beta \in U^{\mathbb{Z}}$ et $\alpha(z), \beta(z)$ leurs séries génératrices formelles associées. On suppose que $\alpha(z) \sim \beta(z)$: il existe donc $n \geq 0$ tel que $C^n(\alpha(x), \beta(y)) = 0$. Or, on a aussi

$$C^n(\beta(y), \alpha(x)) = (y-x)^n[\beta(y), \alpha(x)] = -(-1)^n(x-y)^n[\alpha(x), \beta(y)],$$

par $(\diamond)$. Donc, on a $C^n(\beta(y), \alpha(x)) = 0$ i.e. $\beta(z) \sim \alpha(z)$.

Remarque 43. La série $C^n(\alpha(x), \beta(y))$ est un élément bien défini de $U\left[[x, x^{-1}, y, y^{-1}]\right]$ pour tout $n \geq 0$car $U\left[[x, x^{-1}, y, y^{-1}]\right]$ est un $U[x, y]$-module. De plus, par la convention pour les paramètres formels, on a

$$\begin{aligned}
C^n(\alpha(x), \beta(y)) &= (x-y)^n[\alpha(x), \beta(y)] \\
&= \left(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i}(-y)^i\right)\left(\sum_{m,l\in\mathbb{Z}} [\alpha_m, \beta_l]_U x^{-m-1}y^{-l-1}\right) && \text{car } n \geq 0 \\
&= \sum_{i=0}^{n} \sum_{m,l\in\mathbb{Z}} (-1)^i \binom{n}{i} [\alpha_m, \beta_l]_U x^{-m-1+n-i}y^{-l-1+i} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \sum_{m,l\in\mathbb{Z}} (-1)^i \binom{n}{i} [\alpha_{m+n-i}, \beta_{l+i}]_U x^{-m-1}y^{-l-1} \\
&= \sum_{m,l\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} [\alpha_{m+n-i}, \beta_{l+i}]_U\right) x^{-m-1}y^{-l-1} \\
&= \sum_{m,l\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} [\alpha_{m+i}, \beta_{l+n-i}]_U\right) x^{-m-1}y^{-l-1} && \text{car } n \geq 0,
\end{aligned}$$

pour tout $n \geq 0$.

Remarque 44. S'il existe un entier $N \geq 0$ tel que $C^N(\alpha(x), \beta(y)) = 0$ alors pour tout $n \geq N$, $C^n(\alpha(x), \beta(y)) = 0$.

Lemme 45. *Soit $N \geq 1$, $\alpha, \beta \in U^{\mathbb{Z}}$ et $\alpha(z), \beta(z)$ leurs séries génératrices formelles associées telles que $\alpha(z) \overset{N}{\sim} \beta(z)$. On a alors*

$$\partial_z \alpha(z) \overset{N+1}{\sim} \beta(z).$$

Démonstration. On remarque tout d'abord que

$$\partial_x C^{k+1}(\alpha(x), \beta(y)) = (k+1)C^k(\alpha(x), \beta(y)) + C^{k+1}(\partial_x \alpha(x), \beta(y)),$$

pour tout $k \geq 0$. En effet, on a

$$\begin{aligned}
\partial_x C^{k+1}(\alpha(x), \beta(y)) &= \partial_x((x-y)^{k+1}[\alpha(x), \beta(y)]) \\
&= \partial_x \left(\sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} (-y)^{k+1-i} x^i [\alpha(x), \beta(y)] \right) \\
&= \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} (-y)^{k+1-i} \partial_x (x^i [\alpha(x), \beta(y)]) \\
&= \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} (-y)^{k+1-i} (i x^{i-1} [\alpha(x), \beta(y)] + x^i \partial_x [\alpha(x), \beta(y)]),
\end{aligned}$$

pour tout $k \geq 0$, d'après le point (17.2) du Lemme 17. Or, on a

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=0}^{k+1} i \binom{k+1}{i} (-y)^{k+1-i} x^{i-1} \right) [\alpha(x), \beta(y)] &= \left(\sum_{i=1}^{k+1} i \binom{k+1}{i} (-y)^{k+1-i} x^{i-1} \right) [\alpha(x), \beta(y)] \\
&= (k+1) \left(\sum_{i=1}^{k+1} \binom{k}{i-1} (-y)^{k+1-i} x^{i-1} \right) [\alpha(x), \beta(y)] \\
&= (k+1) \left(\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-y)^{k-i} x^i \right) [\alpha(x), \beta(y)] \\
&= (k+1)(x-y)^k [\alpha(x), \beta(y)] \\
&= (k+1) C^k(\alpha(x), \beta(y)),
\end{aligned}$$

pour tout $k \geq 0$, en utilisant la convention pour les paramètres formels pour l'avant dernière égalité. De plus, par cette convention, on a également

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} (-y)^{k+1-i} x^i \right) \partial_x [\alpha(x), \beta(y)] &= (x-y)^{k+1} \partial_x \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} [\alpha_m, \beta_n]_U y^{-n-1} \right) x^{-m-1} \right) \\
&= (x-y)^{k+1} \sum_{m \in \mathbb{Z}} (-m) \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} [\alpha_{m-1}, \beta_n]_U y^{-n-1} \right) x^{-m-1} \\
&= (x-y)^{k+1} \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} [-m\alpha_{m-1}, \beta_n]_U x^{-m-1} y^{-n-1},
\end{aligned}$$

pour tout $k \geq 0$. Ainsi, on a

$$\left(\sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} (-y)^{k+1-i} x^i\right) \partial_x[\alpha(x), \beta(y)] = (x-y)^{k+1}[\partial_x \alpha(x), \beta(y)] = C^{k+1}(\partial_x \alpha(x), \beta(y)),$$

pour tout $k \geq 0$. On en déduit donc que

$$\partial_x C^{k+1}(\alpha(x), \beta(y)) = (k+1) C^k(\alpha(x), \beta(y)) + C^{k+1}(\partial_x \alpha(x), \beta(y)),$$

pour tout $k \geq 0$. En particulier, comme $\alpha(z) \overset{N}{\sim} \beta(z)$ on a

$$C^{N+1}(\partial_x \alpha(x), \beta(y)) = \partial_x C^{N+1}(\alpha(x), \beta(y)) - (N+1) C^N(\alpha(x), \beta(y)) = 0.$$

Ainsi, $\partial_z \alpha(z)$ et $\beta(z)$ sont mutuellement locaux d'ordre au plus $N-1$. Par ailleurs, on remarque que

$$\begin{aligned} C^N(\partial_x \alpha(x), \beta(y)) &= \partial_x C^N(\alpha(x), \beta(y)) - N C^{N-1}(\alpha(x), \beta(y)) \\ &= -N C^{N-1}(\alpha(x), \beta(y)) && \text{car } \alpha(z) \overset{N}{\sim} \beta(z) \\ &\neq 0 && \text{car } N \geq 1 \text{ et } \alpha(z) \overset{N}{\sim} \beta(z). \end{aligned}$$

Ceci justifie le fait que l'ordre de localité de $\partial_z \alpha(z)$ et $\beta(z)$ est exactement $N-1$. En effet, si on suppose par l'absurde qu'il existe $n \leq N$ tel que $C^n(\partial_x \alpha(x), \beta(y)) = 0$ alors on a $C^N(\partial_x \alpha(x), \beta(y)) = 0$ ce qui est absurde. □

Définition 46 (Produit résiduel)**.**

On définit pour $n \geq 0$, le *n^e produit résiduel* $*_n : U\left[\left[z, z^{-1}\right]\right] \times U\left[\left[z, z^{-1}\right]\right] \to U\left[\left[z, z^{-1}\right]\right]$ par

$$(\alpha *_n \beta)(z) = Res_x C^n(\alpha(x), \beta(z)),$$

pour tout $\alpha, \beta \in U^{\mathbb{Z}}$ et $\alpha(z), \beta(z)$ leurs séries génératrices formelles associées.

Remarque 47. On remarque qu'on peut écrire $(\alpha *_n \beta)(z)$ sous la forme

$$(\alpha *_n \beta)(z) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-z)^i [\alpha_{n-i}, \beta(z)],$$

pour tout $n \geq 0$. En effet, on a

$$\begin{aligned} (\alpha *_n \beta)(z) &= Res_x \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} [\alpha_{m+n-i}, \beta_{l+i}]_U z^{-l-1}\right) x^{-m-1}\right) \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} [\alpha_{n-i}, \beta_{l+i}]_U\right) z^{-l-1}, \end{aligned}$$

pour tout $n \geq 0$. On en déduit donc que

$$\begin{aligned}
(\alpha *_n \beta)(z) &= \sum_{i=0}^{n} \sum_{l \in \mathbb{Z}} (-1)^i \binom{n}{i} [\alpha_{n-i}, \beta_{l+i}]_U z^{-l-1} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \sum_{l \in \mathbb{Z}} (-1)^i \binom{n}{i} [\alpha_{n-i}, \beta_l]_U z^{-l+i-1} \\
&= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} z^i \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} [\alpha_{n-i}, \beta_l]_U z^{-l-1} \right) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-z)^i [\alpha_{n-i}, \beta(z)],
\end{aligned}$$

pour tout $n \geq 0$.

Remarque 48. S'il existe un entier $N \geq 0$ tel que $C^N(\alpha(x), \beta(z)) = 0$ alors pour tout $n \geq N$, $(\alpha *_n \beta)(z) = 0$.

Remarque 49. La condition de localité est reliée au Théorème 34 qui récapitule les propositions équivalentes découlant de la formule des différences avant de Newton. En effet, on considère $W = U\left[[y, y^{-1}]\right]$, $N \geq 1$, $\alpha, \beta \in U^{\mathbb{Z}}$ et $\alpha(z), \beta(z)$ leurs séries génératrices formelles associées. On a

$$\begin{aligned}
y^{1-N} C^N(\alpha(x), \beta(y)) &= y^{1-N}(x-y)^N [\alpha(x), \beta(y)] \\
&= y(xy^{-1} - 1)^N \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} [\alpha_m, \beta_n]_U x^{-m-1} y^{-n-1} && \text{d'après } (\diamond) \\
&= y(xy^{-1} - 1)^N \sum_{m \in \mathbb{Z}} (xy^{-1})^{-m-1} y^{-m-1} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} [\alpha_m, \beta_n]_U y^{-n-1} \right) \\
&= (xy^{-1} - 1)^N \sum_{m \in \mathbb{Z}} y^{-m} [\alpha_m, \beta(y)] (xy^{-1})^{-m-1}.
\end{aligned}$$

On pose $w = xy^{-1}$ et on définit la suite $\gamma \in W^{\mathbb{Z}}$ par

$$\gamma_m = y^{-m} [\alpha_m, \beta(y)],$$

pour tout $m \in \mathbb{Z}$. Si on note $\gamma(z)$ la série génératrice formelle associée à γ, alors on a

$$\gamma(w) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} y^{-m} [\alpha_m, \beta(y)] w^{-m-1} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} y^{-m} [\alpha_m, \beta(y)] (xy^{-1})^{-m-1}.$$

Par ce qui précède, on a

$$y^{1-N} C^N(\alpha(x), \beta(y)) = (w-1)^N \gamma(w).$$

On en déduit donc que

$$C^N(\alpha(x), \beta(y)) = 0 \Leftrightarrow y^{1-N} C^N(\alpha(x), \beta(y)) = 0 \Leftrightarrow (w-1)^N \gamma(w) = 0.$$

La dernière proposition correspond au point (34.2) du Théorème 34 appliqué à γ.

Grâce à cette remarque, on voit qu'à partir du Théorème 34, on peut énoncer un théorème qui donne des énoncés équivalents à la condition de localité [4].

Théorème 50 (Equivalents à la condition de localité)**.**

Soit $N \geq 1$, $\alpha, \beta \in U^{\mathbb{Z}}$ et $\alpha(z), \beta(z)$ leurs séries génératrices formelles associées. On a

$$C^N(\alpha(x), \beta(y)) = 0 \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{Z}, \sum_{i=0}^{N} \binom{N}{i} (-y)^i [\alpha_{n-i}, \beta(y)] = 0 \tag{50.1}$$

$$\Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{Z}, [\alpha_m, \beta(y)] = \sum_{i=0}^{N-1} \binom{m}{i} y^{m-i} (\alpha *_i \beta)(y) \tag{50.2}$$

$$\Leftrightarrow \forall m, n \in \mathbb{Z}, [\alpha_m, \beta_n]_U = \sum_{i=0}^{N-1} \binom{m}{i} (\alpha *_i \beta)_{m+n-i} \tag{50.3}$$

$$\Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{Z}, y^{-m}[\alpha_m, \beta(y)] = P_{N-1}(m) \tag{50.4}$$

$$\Leftrightarrow [\alpha(x), \beta(y)] = \sum_{i=0}^{N-1} y^{-i-1} \delta^{(i)}(xy^{-1})(\alpha *_i \beta)(y) \tag{50.5}$$

$$\Leftrightarrow [\alpha(x)_+, \beta(y)] = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{(\alpha *_i \beta)(y)}{(x-y)^{i+1}} \qquad et \qquad [\alpha(x)_-, \beta(y)] = -\sum_{i=0}^{N-1} \frac{(\alpha *_i \beta)(y)}{(-y+x)^{i+1}}, \tag{50.6}$$

où P_{N-1} est un polynôme de degré au plus $N-1$ à coefficients dans $U\left[[y, y^{-1}]\right]$.

Démonstration. Pour montrer ce théorème, on va raisonner par équivalence. Plus précisément, on va montrer que les propositions (50.1) à (50.6) sont équivalentes à $C^N(\alpha(x), \beta(y)) = 0$.

On considère tout d'abord $\gamma \in (U\left[[y, y^{-1}]\right])^{\mathbb{Z}}$ définie par

$$\gamma_m = y^{-m}[\alpha_m, \beta_y],$$

pour tout $m \in \mathbb{Z}$. On note $\gamma(z)$ la série génératrice formelle associée à γ. On définit de plus une indéterminée formelle $w = xy^{-1}$. Dans la remarque précédente, on a vu que

$$C^N(\alpha(x), \beta(y)) = 0 \Leftrightarrow (w-1)^N \gamma(w) = 0.$$

De plus, d'après le point (34.1) du Théorème 34 on a

$$C^N(\alpha(x), \beta(y)) = 0 \Leftrightarrow \gamma \in \ker \Delta^N.$$

D'après le Lemme (12), on remarque que

$$\gamma \in \ker \Delta^N \Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{Z}, (\Delta^N \gamma)_m = 0 \Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{Z}, \sum_{i \geq 0} (-1)^i \binom{N}{i} y^{-m-N+i}[\alpha_{m+N-i}, \beta(y)] = 0.$$

Comme $N \geq 0$, on a alors

$$\gamma \in \ker \Delta^N \Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{Z}, y^{-N-m}\sum_{i=0}^{N}(-1)^i\binom{N}{i}y^i[\alpha_{m-i},\beta(y)] = 0 \Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{Z}, \sum_{i=0}^{N}\binom{N}{i}(-y)^i[\alpha_{m-i},\beta(y)] = 0.$$

On en déduit donc que

$$C^N(\alpha(x),\beta(y)) = 0 \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{Z}, \sum_{i=0}^{N}\binom{N}{i}(-y)^i[\alpha_{n-i},\beta(y)] = 0.$$

On a donc bien montré que $C^N(\alpha(x),\beta(y)) = 0$ est équivalent à (50.1).

D'après le point (34.2) du théorème 34, on a

$$\gamma \in \ker \Delta^N \Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{Z}, \gamma_m = \sum_{i=0}^{N-1}\binom{m}{i}Res_z((z-1)^i\gamma(z)).$$

Or, par la convention pour un paramètre formel et un élément non nul du corps, on a

$$\begin{aligned}
(z-1)^i\gamma(z) &= \left(\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}z^{i-k}(-1)^k\right)\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}}y^{-m}[\alpha_m,\beta(y)]z^{-m-1}\right) \qquad \text{car } i \geq 0\\
&= \sum_{k=0}^{i}\sum_{m\in\mathbb{Z}}(-1)^k\binom{i}{k}y^{-m}[\alpha_m,\beta(y)]z^{-m-1+i-k}\\
&= \sum_{k=0}^{i}\sum_{m\in\mathbb{Z}}(-1)^k\binom{i}{k}y^{-m-i+k}[\alpha_{m+i-k},\beta(y)]z^{-m-1}\\
&= \sum_{m\in\mathbb{Z}}\left(\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}(-y)^k y^{-m-i}[\alpha_{m+i-k},\beta(y)]\right)z^{-m-1},
\end{aligned}$$

pour tout $i \in [\![0, N-1]\!]$. Ainsi, on en déduit que

$$Res_z((z-1)^i\gamma(z)) = y^{-i}\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}(-y)^k[\alpha_{i-k},\beta(y)] = y^{-i}(\alpha *_i \beta)(y),$$

pour tout $i \in [\![0, N-1]\!]$. On a alors

$$\begin{aligned}
C^N(\alpha(x),\beta(y)) = 0 &\Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{Z}, y^{-m}[\alpha_m,\beta(y)] = \sum_{i=0}^{N-1}\binom{m}{i}y^{-i}(\alpha *_i \beta)(y)\\
&\Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{Z}, [\alpha_m,\beta(y)] = \sum_{i=0}^{N-1}\binom{m}{i}y^{m-i}(\alpha *_i \beta)(y).
\end{aligned}$$

On a donc bien montré que $C^N(\alpha(x),\beta(y)) = 0$ est équivalent à (50.2).

De plus, par ce qui précède, on a

$$\begin{aligned}
C^N(\alpha(x),\beta(y))=0 &\Leftrightarrow \forall m\in\mathbb{Z}, \sum_{n\in\mathbb{Z}}[\alpha_m,\beta_n]_U y^{-n-1}=\sum_{i=0}^{N-1}\binom{m}{i}y^{m-i}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}(\alpha *_i \beta)_n y^{-n-1}\right)\\
&\Leftrightarrow \forall m\in\mathbb{Z}, \sum_{n\in\mathbb{Z}}[\alpha_m,\beta_n]_U y^{-n-1}=\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\binom{m}{i}(\alpha *_i \beta)_m y^{-n-1+m-i}\\
&\Leftrightarrow \forall m\in\mathbb{Z}, \sum_{n\in\mathbb{Z}}[\alpha_m,\beta_n]_U y^{-n-1}=\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\binom{m}{i}(\alpha *_i \beta)_{m+n-i} y^{-n-1}\\
&\Leftrightarrow \forall m\in\mathbb{Z}, \sum_{n\in\mathbb{Z}}[\alpha_m,\beta_n]_U y^{-n-1}=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(\sum_{i=0}^{N-1}\binom{m}{i}(\alpha *_i \beta)_{n+m-i}\right) y^{-n-1}.
\end{aligned}$$

En identifiant les coefficients, on obtient alors

$$C^N(\alpha(x),\beta(y))=0 \Leftrightarrow \forall m,n\in\mathbb{Z}, [\alpha_m,\beta_n]_U=\sum_{i=0}^{N-1}\binom{m}{i}(\alpha *_i \beta)_{n+m-i}.$$

On a donc bien montré que $C^N(\alpha(x),\beta(y))=0$ est équivalent à (50.3).

D'après le point (34.3) du Théorème 34, on a

$$\gamma\in\ker\Delta^N \Leftrightarrow \forall m\in\mathbb{Z}, \gamma_m=P_{N-1}(m),$$

où P_{N-1} est un polynôme de degré au plus $N-1$ à coefficient dans $U\left[[y,y^{-1}]\right]$. Or, on a vu que

$$C^N(\alpha(x),\beta(y))=0\Leftrightarrow \gamma\in\ker\Delta^N.$$

On en déduit donc que $C^N(\alpha(x),\beta(y))=0$ est équivalent à (50.4).

D'après le point (34.4) du Théorème 34, on a

$$\gamma\in\ker\Delta^N \Leftrightarrow \gamma(w)=\sum_{i=0}^{N-1}Res_z((z-1)^i\gamma(z))\delta^{(i)}(w).$$

Dans ce qui précède, on a vu que pour tout $i\in[\![0,N-1]\!]$, $Res_z((z-1)^i\gamma(z))=y^{-i}(\alpha *_i \beta)(y)$. De plus, on a

$$\gamma(w)=\sum_{m\in\mathbb{Z}}y^{-m}[\alpha_m,\beta(y)]w^{-m-1}=y\sum_{m\in\mathbb{Z}}[\alpha_m,\beta(y)](yw)^{-m-1}=y[\alpha(yw),\beta(y)]=y[\alpha(x),\beta(y)].$$

On en déduit donc que

$$C^N(\alpha(x),\beta(y)) = 0 \Leftrightarrow y[\alpha(x),\beta(y)] = \sum_{i=0}^{N-1} y^{-i}(\alpha *_i \beta)(y)\delta^{(i)}(xy^{-1})$$

$$\Leftrightarrow [\alpha(x),\beta(y)] = \sum_{i=0}^{N-1} y^{-i-1}(\alpha *_i \beta)(y)\delta^{(i)}(xy^{-1}).$$

On a donc bien montré que $C^N(\alpha(x),\beta(y)) = 0$ est équivalent à (50.5).

D'après le point (34.5) du Théorème 34, on a

$$C^N(\alpha(x),\beta(y)) = 0 \Leftrightarrow \gamma(w)_+ = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{Res_z((z-1)^i\gamma(z))}{(w-1)^{i+1}} \qquad \text{et} \qquad \gamma(w)_- = -\sum_{i=0}^{N-1} \frac{Res_z((z-1)^i\gamma(z))}{(-1+w)^{i+1}}.$$

Dans ce qui précède, on a vu que pour tout $i \in [\![0, N-1]\!]$, $Res_z((z-1)^i\gamma(z)) = y^{-i}(\alpha *_i \beta)(y)$. De plus, on a

$$\gamma(w)_+ = \sum_{m\geq 0} y^{-m}[\alpha_m,\beta(y)]w^{-m-1} = y\sum_{m\geq 0}[\alpha_m,\beta(y)](yw)^{-m-1} = y[\alpha(yw)_+,\beta(y)] = y[\alpha(x)_+,\beta(y)].$$

De même, on a $\gamma(w)_- = y[\alpha(x)_-,\beta(y)]$. Ainsi, on en déduit que

$$C^N(\alpha(x),\beta(y)) = 0 \Leftrightarrow y[\alpha(x)_+,\beta(y)] = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{y^{-i}(\alpha *_i \beta)(y)}{(xy^{-1}-1)^{i+1}} \qquad \text{et} \qquad y[\alpha(x)_-,\beta(y)] = -\sum_{i=0}^{N-1} \frac{y^{-i}(\alpha *_i \beta)(y)}{(-1+xy^{-1})^{i+1}}$$

$$\Leftrightarrow [\alpha(x)_+,\beta(y)] = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{y^{-i-1}(\alpha *_i \beta)(y)}{(xy^{-1}-1)^{i+1}} \qquad \text{et} \qquad [\alpha(x)_-,\beta(y)] = -\sum_{i=0}^{N-1} \frac{y^{-i-1}(\alpha *_i \beta)(y)}{(-1+xy^{-1})^{i+1}}$$

$$\Leftrightarrow [\alpha(x)_+,\beta(y)] = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{(\alpha *_i \beta)(y)}{(x-y)^{i+1}} \qquad \text{et} \qquad [\alpha(x)_-,\beta(y)] = -\sum_{i=0}^{N-1} \frac{(\alpha *_i \beta)(y)}{(-y+x)^{i+1}},$$

d'après ($\diamond$). On a donc bien montré que $C^N(\alpha(x),\beta(y)) = 0$ est équivalent à (50.6). $\square$

Remarque 51. On remarque que ce théorème reste encore valable si U est une algèbre de Lie car on n'a pas utilisé la définition même du crochet comme on l'a défini au début de cette partie.

Remarque 52. Soit $N \geq 2$. En reprenant les notations du théorème précédent, on remarque que

$$\alpha(z) \overset{N}{\sim} \beta(z) \Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{Z}, y^{-m}[\alpha_m,\beta(y)] = P_{N-1}(m),$$

où P_{N-1} est un polynôme de degré $N-1$ à coefficients dans W. En effet, pour montrer cela, on va raisonner par double implication.

On suppose que $\alpha(z) \overset{N}{\sim} \beta(z)$. On a alors

$$C^N(\alpha(x),\beta(y)) = 0 \qquad \text{et} \qquad C^k(\alpha(x),\beta(y)) \neq 0,$$

pour tout $k \leq N-1$. Par le point (50.4) du théorème précédent, on a

$$y^{-m}[\alpha_m, \beta(y)] = P_{N-1}(m),$$

pour tout $m \in \mathbb{Z}$, où P_{N-1} est un polynôme de degré au plus $N-1$ à coefficients dans W. Si on suppose par l'absurde que P_{N-1} n'est pas de degré $N-1$ alors il est de degré au plus $N-2$. D'après le point (50.4) du théorème précédent, on a $C^{N-1}(\alpha(x), \beta(y)) = 0$ car $N \geq 2$, ce qui est absurde. On en déduit donc que P_{N-1} est de degré exactement $N-1$.

La réciproque est donnée directement par le point (50.4) du théorème précédent.

Définition 53 (Produit normalement ordonné)**.**

On rappelle ici que U est une algèbre associative. On définit le *produit normallement ordonné* $: \ldots : : U\left[[x, x^{-1}]\right] \times U\left[[y, y^{-1}]\right] \to U\left[[x, x^{-1}, y, y^{-1}]\right]$ par

$$:\alpha(x)\beta(y): = \alpha(x)_-\beta(y) + \beta(y)\alpha(x)_+,$$

pour tout $\alpha, \beta \in U^{\mathbb{Z}}$ et $\alpha(z), \beta(z)$ leurs séries génératrices formelles associées.

Cette définition permet d'avoir un autre énoncé équivalent à la condition de localité.

Corollaire 54. *Soit $\alpha, \beta \in U^{\mathbb{Z}}$ et $\alpha(z), \beta(z)$ leurs séries génératrices formelles associées. On a*

$$C^N(\alpha(x), \beta(y)) = 0 \Leftrightarrow \alpha(x)\beta(y) = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{(\alpha *_i \beta)(y)}{(x-y)^{i+1}} + :\alpha(x)\beta(y): \qquad et \qquad \beta(y)\alpha(x) = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{(\alpha *_i \beta)(y)}{(-y+x)^{i+1}} + :\alpha(x)\beta(y):.$$

Démonstration. On remarque tout d'abord que $\alpha(x)\beta(y) = [\alpha(x)_+, \beta(y)] + :\alpha(x)\beta(y):$. En effet, on a

$$\begin{aligned}\alpha(x)\beta(y) &= \alpha(x)_+\beta(y) + \alpha(x)_-\beta(y) \\ &= \alpha(x)_+\beta(y) - \beta(y)\alpha(x)_+ + \beta(y)\alpha(x)_+ + \alpha(x)_-\beta(y) \\ &= [\alpha(x)_+, \beta(y)] + :\alpha(x)\beta(y):.\end{aligned}$$

On peut montrer de même que $\beta(y)\alpha(x) = :\alpha(x)\beta(y): - [\alpha(x)_-, \beta(y)]$. Or, par le point (50.6) du théorème 50, on a

$$C^N(\alpha(x), \beta(y)) = 0 \Leftrightarrow [\alpha(x)_+, \beta(y)] = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{(\alpha *_i \beta)(y)}{(x-y)^{i+1}} \qquad \text{et} \qquad [\alpha(x)_-, \beta(y)] = -\sum_{i=0}^{N-1} \frac{(\alpha *_i \beta)(y)}{(-y+x)^{i+1}}.$$

On en déduit donc que

$$C^N(\alpha(x),\beta(y)) = 0 \Leftrightarrow \alpha(x)\beta(y) = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{(\alpha *_i \beta)(y)}{(x-y)^{i+1}} + :\alpha(x)\beta(y): \qquad \text{et} \qquad \beta(y)\alpha(x) = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{(\alpha *_i \beta)(y)}{(-y+x)^{i+1}} + :\alpha(x)\beta(y):.$$

□

Remarque 55. En reprenant les notations du corollaire précédent, si $C^N(\alpha(x),\beta(y)) = 0$, alors on a

$$\alpha(x)\beta(y) = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{(\alpha *_i \beta)(y)}{(x-y)^{i+1}} + :\alpha(x)\beta(y): \qquad \text{et} \qquad \beta(y)\alpha(x) = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{(\alpha *_i \beta)(y)}{(-y+x)^{i+1}} + :\alpha(x)\beta(y):.$$

On note alors dans ce cas $\alpha(x)\beta(y) \overset{OPE}{\sim} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{(\alpha *_i \beta)(y)}{(x-y)^{i+1}}$ où OPE signifie en anglais "*operator product expansion*"

Remarque 56. Si $(U, [.,.]_U)$ est une algèbre de Lie, les résultats précédents restent encore valable si on se place dans une algèbre enveloppante de U.

5.2 Exemples de localité

Exemple 57 (Algèbre de Heisenberg)**.**

On considère l'espace vectoriel

$$\widehat{H} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathbb{C}h_n \oplus \mathbb{C}c.$$

On munit $H = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathbb{C}h_n$ d'une forme bilinéaire alternée $\langle .,. \rangle : H \times H \to \mathbb{C}$ que l'on définit par

$$\langle h_m, h_n \rangle = m\delta^m_{-n},$$

pour tout $m, n \in \mathbb{Z}$. On munit de plus $\widehat{H}$ d'un crochet $[.,.]_{\widehat{H}} : \widehat{H} \times \widehat{H} \to \widehat{H}$ défini par

$$[\lambda h_m + \mu c, \lambda' h_n + \mu' c] = \langle \lambda h_m, \lambda' h_n \rangle c = \lambda\lambda' m \delta^m_{-n} c,$$

pour tout $m, n \in \mathbb{Z}$ et $\lambda, \mu, \lambda', \mu' \in \mathbb{C}$. Par l'Exemple 9, on remarque que $(\widehat{H}, [.,.]_{\widehat{H}})$ est une algèbre de Lie : on peut donc appliquer le Théorème 50 à $\widehat{H}$, d'après la remarque 52. Cette algèbre de Lie s'appelle l'*algèbre de Heisenberg*. Par définition du crochet $[.,.]_{\widehat{H}}$, on a en particulier

$$[h_m, h_n]_{\widehat{H}} = m\delta^m_{-n} c \qquad \text{et} \qquad [h_m, c]_{\widehat{H}} = 0,$$

pour tout $m, n \in \mathbb{Z}$. Si on note $h(z)$ la série génératrice formelle associée à $(h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, on a

$$y^{-m}[h_m, h(y)] = y^{-m} \sum_{n\in\mathbb{Z}} [h_m, h_n]_{\widehat{H}} y^{-n-1} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} m\delta^m_{-n} c y^{-n-1-m} = mcy^{-1} = \binom{m}{1} cy^{-1},$$

pour tout $m \in \mathbb{Z}$. Donc, pour tout $m \in \mathbb{Z}$, $y^{-m}[h_m, h(y)]$ est un polynôme de degré 1 en m à coefficients dans

$\widehat{H}\left[[y, y^{-1}]\right]$. Par la Remarque 52 qui découle du Théorème 50, on en déduit que $h(z)$ est local d'ordre 2. De plus, par le point (50.2) du Théorème 50, on a

$$y^{-m}[h_m, h(y)] = \sum_{i=0}^{1} \binom{m}{i} y^{-i}(h *_i h)(y),$$

pour tout $m \in \mathbb{Z}$. Par identification, on en déduit que

$$(h *_0 h)(y) = 0 \qquad \text{et} \qquad (h *_1 h)(y) = c,$$

Ainsi, on a alors

$$h(x)h(y) \overset{OPE}{\sim} \frac{c}{(x-y)^2}.$$

Exemple 58 (Algèbres affines de Kac-Moody)**.**

On considère $(\mathfrak{g}, [.,.]_{\mathfrak{g}})$ une algèbre de Lie de dimension finie. On munit $\mathfrak{g}$ d'une forme bilinéaire symétrique $\langle .,. \rangle : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{C}$ qui vérifie

$$\langle [a,b]_{\mathfrak{g}}, c \rangle = \langle a, [b,c]_{\mathfrak{g}} \rangle,$$

pour tout $a, b, c \in \mathfrak{g}$. On dit alors que $\langle .,. \rangle$ est *invariante*. On considère de plus l'espace vectoriel

$$\widehat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}c = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g} \otimes t^n \oplus \mathbb{C}c.$$

On munit $\widehat{\mathfrak{g}}$ d'une application bilinéaire antisymétrique $[.,.]_{\widehat{\mathfrak{g}}} : \widehat{\mathfrak{g}} \times \widehat{\mathfrak{g}} \to \widehat{\mathfrak{g}}$ caractérisée par

$$[a \otimes t^m, b \otimes t^n]_{\widehat{\mathfrak{g}}} = [a,b]_{\mathfrak{g}} \otimes t^{m+n} + m\langle a, b \rangle \delta^m_{-n} c \qquad \text{et} \qquad [a \otimes t^m, c]_{\widehat{\mathfrak{g}}} = 0,$$

pour tout $a, b \in \mathfrak{g}$ et $m, n \in \mathbb{Z}$. On remarque que $(\widehat{\mathfrak{g}}, [.,.]_{\widehat{\mathfrak{g}}})$ est une algèbre de Lie. En effet, par définition, $\widehat{\mathfrak{g}}$ est un espace vectoriel et $[.,.]_{\widehat{\mathfrak{g}}}$ est une application bilinéaire antisymétrique. Il reste donc à vérifier l'identité de Jacobi : pour cela, on fixe $a_1, a_2, a_3 \in \mathfrak{g}$, $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z}$ et $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$. Dans la suite, on note

$$A_{i,j,k} = \left[a_i \otimes t^{n_i} + \lambda_i c, [a_j \otimes t^{n_j} + \lambda_j c, a_k \otimes t^{n_k} + \lambda_k c]_{\widehat{\mathfrak{g}}}\right]_{\widehat{\mathfrak{g}}},$$

pour tout i, j, k tel que $\{i, j, k\} \in \{1, 2, 3\}$. On a

$$A_{i,j,k} = \left[a_i \otimes t^{n_i} + \lambda_i c, [a_j, a_k]_{\mathfrak{g}} \otimes t^{n_j + n_k} + n_j \langle a_j, a_k \rangle \delta^{n_j}_{-n_k} c\right]_{\widehat{\mathfrak{g}}} = \left[a_i, [a_j, a_k]_{\mathfrak{g}}\right]_{\mathfrak{g}} \otimes t^{n_i + n_j + n_k},$$

pour tout i, j, k tel que $\{i, j, k\} \in \{1, 2, 3\}$. Ainsi, on a

$$\begin{aligned} A_{1,2,3} + A_{2,3,1} + A_{3,1,2} &= \left[a_1, [a_2, a_3]_{\mathfrak{g}}\right]_{\mathfrak{g}} \otimes t^{n_1+n_2+n_3} + \left[a_2, [a_3, a_1]_{\mathfrak{g}}\right]_{\mathfrak{g}} \otimes t^{n_2+n_3+n_1} + \left[a_3, [a_1, a_2]_{\mathfrak{g}}\right]_{\mathfrak{g}} \otimes t^{n_3+n_1+n_2} \\ &= \Big(\left[a_1, [a_2, a_3]_{\mathfrak{g}}\right]_{\mathfrak{g}} + \left[a_2, [a_3, a_1]_{\mathfrak{g}}\right]_{\mathfrak{g}} + \left[a_3, [a_1, a_2]_{\mathfrak{g}}\right]_{\mathfrak{g}}\Big) \otimes t^{n_1+n_2+n_3} \\ &= 0, \end{aligned}$$

car $[.,.]_{\mathfrak{g}}$ vérifie l'identité de Jacobi. Par linéarité, l'identité de Jacobi est donc bien vérifiée pour $[.,.]_{\widehat{\mathfrak{g}}}$. On en déduit donc que $(\widehat{\mathfrak{g}}, [.,.]_{\widehat{\mathfrak{g}}})$ est bien une algèbre de Lie : on peut donc appliquer le Théorème 50 à $\widehat{\mathfrak{g}}$ d'après la remarque 52. Cette algèbre de Lie est une *algèbre affine de Kac-Moody*. On définit pour $a \in \mathfrak{g}$, la suite $\alpha^a \in (\widehat{\mathfrak{g}})^{\mathbb{Z}}$ par

$$\alpha^a_n = a \otimes t^n,$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Si on note $\alpha^a(z)$ la série génératrice formelle associée à α^a pour tout $a \in \mathfrak{g}$, on a

$$\begin{aligned}
y^{-m}[\alpha^a_m, \alpha^b(y)] &= y^{-m}\sum_{n\in\mathbb{Z}}[\alpha^a_m, \alpha^b_n]_{\widehat{\mathfrak{g}}} y^{-n-1} \\
&= y^{-m}\sum_{n\in\mathbb{Z}}[a\otimes t^m, b\otimes t^n]_{\widehat{\mathfrak{g}}} y^{-n-1} \\
&= y^{-m}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left([a,b]_{\mathfrak{g}}\otimes t^{m+n} + m\langle a,b\rangle \delta^m_{-n} c\right) y^{-n-1} \\
&= y^{-m}\left(m\langle a,b\rangle c y^{m-1}\right) + \sum_{n\in\mathbb{Z}}\left([a,b]_{\mathfrak{g}}\otimes t^{m+n}\right) y^{-m-n-1} \\
&= m\langle a,b\rangle c y^{-1} + \sum_{n\in\mathbb{Z}}\left([a,b]_{\mathfrak{g}}\otimes t^{n}\right) y^{-n-1} \\
&= \binom{m}{1}\langle a,b\rangle c y^{-1} + \sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha^{[a,b]_{\mathfrak{g}}}_n y^{-n-1} \\
&= \alpha^{[a,b]_{\mathfrak{g}}}(y) + \binom{m}{1}\langle a,b\rangle c y^{-1},
\end{aligned}$$

pour tout $a, b \in \mathfrak{g}$ et $m \in \mathbb{Z}$. On en déduit que pour tout $a, b \in \mathfrak{g}$ et $m \in \mathbb{Z}$, $y^{-m}[\alpha^a_m, \alpha^b(y)]$ est un polynôme en m de degré au plus 1 à coefficients dans $\widehat{\mathfrak{g}}\left[\left[y, y^{-1}\right]\right]$. Par le théorème 50, on a alors pour tout $a, b \in \mathfrak{g}$, $C^2(\alpha^a(x), \alpha^b(y)) = 0$. On fixe maintenant $a, b \in \mathfrak{g}$.

- Si $\langle a,b\rangle \neq 0$ alors pour tout $m \in \mathbb{Z}$, $y^{-m}[\alpha^a_m, \alpha^b(y)]$ est de degré 1. Par la Remarque 52 qui découle du Théorème 50, on en déduit que $\alpha^a(z) \overset{2}{\sim} \alpha^b(z)$.

- Si $\langle a,b\rangle = 0$ et $[a,b]_{\mathfrak{g}} \neq 0$ alors pour tout $m \in \mathbb{Z}$, $y^{-m}[\alpha^a_m, \alpha^b(y)]$ est de degré 0. Par la Remarque 52 qui découle du Théorème 50, on en déduit que $\alpha^a(z) \overset{1}{\sim} \alpha^b(z)$.

- Si $\langle a,b\rangle = 0$ et $[a,b]_{\mathfrak{g}} = 0$ alors pour tout $m \in \mathbb{Z}$, $y^{-m}[\alpha^a_m, \alpha^b(y)] = 0$ i.e. $[\alpha^a_m, \alpha^b(y)] = 0$. On a alors

$$[\alpha^a(x), \alpha^b(y)] = \sum_{m\in\mathbb{Z}}[\alpha^a_m, \alpha^b(y)]x^{-m-1} = 0.$$

  On en déduit donc que $\alpha^a(z) \overset{0}{\sim} \alpha^b(z)$.

De plus, par le point (50.2) du Théorème 50, on a

$$y^{-m}[\alpha^a_m, \alpha^b(y)] = \sum_{i=0}^{1} \binom{m}{i} y^{-i} (\alpha^a *_i \alpha^b)(y),$$

pour tout $a, b \in \mathfrak{g}$ et $m \in \mathbb{Z}$. Par identification , on a

$$(\alpha^a *_0 \alpha^b)(y) = \alpha^{[a,b]_{\mathfrak{g}}}(y) \qquad \text{et} \qquad (\alpha^a *_1 \alpha^b)(y) = \langle a, b \rangle c,$$

pour tout $a, b \in \mathfrak{g}$. Ainsi, on a alors

$$\alpha^a(x)\alpha^b(y) \overset{OPE}{\sim} \frac{\alpha^{[a,b]_{\mathfrak{g}}}(y)}{x-y} + \frac{\langle a, b \rangle c}{(x-y)^2},$$

pour tout $a, b \in \mathfrak{g}$.

Exemple 59 (Algèbre de Virasoro)**.**

On définit l'espace vectoriel

$$Vir = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{C} L_n \oplus \mathbb{C} c.$$

On munit Vir d'une application bilinéaire antisymétrique $[.,.]_{Vir} : Vir \times Vir \to Vir$ caractérisée par

$$[L_m, L_n]_{Vir} = (m-n)L_{m+n} + \frac{1}{2}\binom{m+1}{3}\delta^0_{m+n} c \qquad \text{et} \qquad [L_M, c]_{Vir} = 0,$$

pour tout $m, n \in \mathbb{Z}$. On remarque que $(Vir, [.,.]_{Vir})$ est une algèbre de Lie. En effet, par définition, Vir est un espace vectoriel et $[.,.]_{Vir}$ est une application bilinéaire antisymétrique. Il reste donc à vérifier l'identité de Jacobi : pour cela, on fixe $\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2, \lambda_3, \mu_3 \in \mathbb{C}$ et $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z}$. Dans la suite, on note

$$A_{i,j,k} = \left[\lambda_i L_{n_i} + \mu_i c, [\lambda_j L_{n_j} + \mu_j c, \lambda_k L_{n_k} + \mu_k c]_{Vir}\right]_{Vir},$$

pour tout i, j, k tel que $\{i, j, k\} \in \{1, 2, 3\}$. On a

$$\begin{aligned}
A_{i,j,k} &= \lambda_j \lambda_k \left[\lambda_i L_{n_i} + \mu_i c, (n_j - n_k) L_{n_j+n_k} + \frac{1}{2}\binom{n_j+1}{3}\delta^0_{n_j+n_k} c\right]_{Vir} \\
&= \lambda_i \lambda_j \lambda_k (n_j - n_k)(n_i - n_j - n_k) L_{n_i+n_j+n_k} \\
&= \lambda_i \lambda_j \lambda_k (n_j n_i - n_k n_i - n_j^2 + n_k^2) L_{n_i+n_j+n_k},
\end{aligned}$$

pour tout i, j, k tel que $\{i, j, k\} \in \{1, 2, 3\}$. Ainsi, on en déduit que

$$\begin{aligned}
A_{1,2,3} + A_{2,3,1} + A_{3,1,2} = {} & \lambda_1\lambda_2\lambda_3(n_2 n_1 - n_3 n_1 - n_2^2 + n_3^2) L_{n_1+n_2+n_3} + \lambda_2\lambda_3\lambda_1(n_3 n_2 - n_1 n_2 - n_3^2 + n_1^2) L_{n_2+n_3+n_1} \\
& + \lambda_3\lambda_1\lambda_2(n_1 n_3 - n_2 n_3 - n_1^2 + n_2^2) L_{n_3+n_1+n_2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
A_{1,2,3}+A_{2,3,1}+A_{3,1,2} &= \lambda_1\lambda_2\lambda_3\left(n_2n_1-n_3n_1-n_2^2+n_3^2+n_3n_2-n_1n_2-n_3^2+n_1^2+n_1n_3-n_2n_3-n_1^2+n_2^2\right)\\
&\quad\times L_{n_1+n_2+n_3}\\
&=0.
\end{aligned}
$$

Par linéarité, l'identité de Jacobi est donc bien vérifiée. On en déduit donc que $(Vir, [.,.]_{Vir})$ est une algèbre de Lie : on peut donc appliquer le Théorème 50 à Vir, d'après la remarque 52. Cette algèbre de Lie s'appelle l'*algèbre de Virasoro*. On définit la suite $w \in Vir^{\mathbb{Z}}$ par

$$
w_n = L_{n-1},
$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Si on note $w(z)$ la série génératrice formelle associée à w, on a

$$
\begin{aligned}
y^{-m}[w_m, w(y)] &= y^{-m}\sum_{n\in\mathbb{Z}}[w_m, w_n]_{Vir}y^{-n-1}\\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}}[L_{m-1}, L_{n-1}]_{Vir}y^{-n-m-1}\\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\left((m-1-n+1)L_{m-1+n-1}+\frac{1}{2}\binom{m-1+1}{3}\delta^0_{m-1+n-1}c\right)y^{-n-m-1}\\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\left((2m-n)L_{n-2}+\frac{1}{2}\binom{m}{3}\delta^n_2 c\right)y^{-n-1}\\
&= 2m\sum_{n\in\mathbb{Z}}w_{n-1}y^{-n-1}+\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-n)w_{n-1}y^{-n-1}+\frac{1}{2}\binom{m}{3}cy^{-3}\\
&= 2\binom{m}{1}y^{-1}\sum_{n\in\mathbb{Z}}w_ny^{-n-1}+\partial_y w(y)+\frac{1}{2}\binom{m}{3}cy^{-3}\\
&= \partial_y w(y)+2\binom{m}{1}w(y)y^{-1}+\frac{1}{2}\binom{m}{3}cy^{-3},
\end{aligned}
$$

pour tout $m \in \mathbb{Z}$. Ainsi, pour tout $m \in \mathbb{Z}$, $y^{-m}[w_m, w(y)]$ est un polynôme en m de degré 3 à coefficients dans $Vir\left[[y, y^{-1}]\right]$. Par la Remarque 52 qui découle du Théorème 50, on en déduit que $w(z)$ est local d'ordre 4. De plus, par le point (50.2) du Théorème 50, on a

$$
y^{-m}[w_m, w(y)] = \sum_{i=0}^{3}\binom{m}{i}y^{-i}(w *_i w)(y),
$$

pour tout $m \in \mathbb{Z}$. Par identification, on en déduit que

$$
(w *_0 w)(y) = \partial_y w(y) \qquad \text{et} \qquad (w *_1 w)(y) = 2w(y) \qquad \text{et} \qquad (w *_2 w)(y) = 0 \qquad \text{et} \qquad (w *_3 w)(y) = \frac{1}{2}c.
$$

Ainsi, on a alors

$$
w(x)w(y) \overset{OPE}{\sim} \frac{\partial_y w(y)}{x-y}+\frac{2w(y)}{(x-y)^2}+\frac{c}{2(x-y)^4}.
$$

6 Champs créateurs

Dans cette partie, on va s'intéresser aux champs créateurs, notion qui sera utile pour définir les algèbres vertex.

6.1 Champs

On considère V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Dans la suite, on appelle *état* un élément de V. On considère de plus $U = End_{\mathbb{C}}(V)$ l'algèbre des endomorphismes de V.

Définition 60 (Champ)**.**

Soit $\alpha \in U^{\mathbb{Z}}$ et $\alpha(z)$ sa série génératrice formelle associée. On dit que $\alpha(z)$ est un *champ* si pour tout $v \in V$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\alpha_n v = 0,$$

pour tout $n \geq N$.

Remarque 61. La relation à vérifier s'appelle la *troncature inférieure* et joue un rôle important dans les algèbres vertex.

Définition 62. Soit $\alpha(z), \beta(z)$ des champs associés à $\alpha, \beta \in U^{\mathbb{Z}}$. On peut étendre la définition de $C^n(\alpha(x), \beta(y))$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ par

$$C^n(\alpha(x), \beta(y))v = (x-y)^n \alpha(x)\beta(y)v - (-y+x)^n \beta(y)\alpha(x)v,$$

pour tout $v \in V$.

Remarque 63. Cette extension colle avec la définition de $C^n(\alpha(x), \beta(y))$ pour $n \geq 0$. En effet, on a

$$C^n(\alpha(x), \beta(y)) = (x-y)^n \left(\alpha(x)\beta(y) - \beta(y)\alpha(x)\right) = (x-y)^n [\alpha(x), \beta(y)],$$

pour tout $n \geq 0$, car $(x-y)^n = (-y+x)^n$.

Remarque 64. La série $C^n(\alpha(x), \beta(y))(v)$ est un élément bien défini de $U\left[[x, x^{-1}, y, y^{-1}]\right]$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. En effet, pour montrer cela, on définit tout d'abord

$$C^n_{l,m}(\alpha, \beta) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \binom{n}{i} \left(\alpha_{l+n-i}\beta_{m+i} - (-1)^n \beta_{m+n-i}\alpha_{l+i}\right),$$

pour tout $n, m, l \in \mathbb{Z}$. Par la convention pour les paramètres formels, on a

$$C^n(\alpha(x), \beta(y)) = \left(\sum_{i \geq 0} \binom{n}{i} x^{n-i}(-y)^i\right) \left(\sum_{l,m \in \mathbb{Z}} \alpha_l \beta_m x^{-l-1} y^{-m-1}\right) - \left(\sum_{i \geq 0} \binom{n}{i} (-y)^{n-i} x^i\right) \left(\sum_{l,m \in \mathbb{Z}} \beta_m \alpha_l x^{-l-1} y^{-m-1}\right),$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$. On en déduit donc que

$$\begin{aligned}
C^n(\alpha(x), \beta(y)) &= \sum_{i \geq 0} \sum_{l,m \in \mathbb{Z}} (-1)^i \binom{n}{i} \alpha_l \beta_m x^{-l-1+n-i} y^{-m-1+i} - \sum_{i \geq 0} \sum_{l,m \in \mathbb{Z}} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} \beta_m \alpha_l x^{-l-1+i} y^{-m-1+n-i} \\
&= \sum_{i \geq 0} \sum_{l,m \in \mathbb{Z}} (-1)^i \binom{n}{i} \alpha_{l+n-i} \beta_{m+i} x^{-l-1} y^{-m-1} - \sum_{i \geq 0} \sum_{l,m \in \mathbb{Z}} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} \beta_{m+n-i} \alpha_{l+i} x^{-l-1} y^{-m-1} \\
&= \sum_{l,m \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{i \geq 0} (-1)^i \binom{n}{i} \left[\alpha_{l+n-i} \beta_{m+i} - (-1)^n \beta_{m+n-i} \alpha_{l+i}\right] \right) x^{-l-1} y^{-m-1} \\
&= \sum_{l,m \in \mathbb{Z}} C^n_{l,m}(\alpha, \beta) x^{-l-1} y^{-m-1},
\end{aligned}$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Par ailleurs, on remarque que pour tout $n, l, m \in \mathbb{Z}$ et $v \in V$, $C^n_{l,m}(\alpha, \beta)v$ est une série finie. En effet, pour montrer cela, on fixe $n, l, m \in \mathbb{Z}$ et $v \in V$. Comme $\alpha(z)$, $\beta(z)$ sont des champs, on a

$$\beta_{m+i} v = 0 \qquad \text{et} \qquad \alpha_{l+i} v = 0,$$

pour i assez grand. Ainsi, $C^n_{l,m}(\alpha, \beta)v$ est bien une série finie. On en déduit donc que la série $C^n(\alpha(x)\beta(y))$ est bien définie pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Lemme 65. *Soit $\alpha(x), \beta(y)$ des champs associés à $\alpha, \beta \in U^{\mathbb{Z}}$. On a*

$$(x-y)^k C^n(\alpha(x), \beta(y)) = C^{n+k}(\alpha(x), \beta(y)),$$

pour tout $k \geq 0$ et $n \in \mathbb{Z}$.

Démonstration. On remarque tout d'abord que pour tout $k \geq 0$ et $n \in \mathbb{Z}$, $(x-y)^k (x-y)^n = (x-y)^{n+k}$. En effet, pour montrer cela, on va raisonner par réccurence sur $k \geq 0$.

- Si $k = 0$ alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $(x-y)^0 (x-y)^n = (x-y)^n$: on a donc bien le résultat pour $k = 0$.

- On suppose que $k = 1$. Par la convention pour les paramètres formels, on a

$$(x-y)(x-y)^n = (x-y) \left(\sum_{i \geq 0} \binom{n}{i} x^{n-i} (-y)^i\right) = \sum_{i \geq 0} \binom{n}{i} x^{n-i+1} (-y)^i + \sum_{i \geq 0} \binom{n}{i} x^{n-i} (-y)^{i+1},$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$. On a alors

$$(x-y)(x-y)^n = \sum_{i\geq 0}\binom{n}{i}x^{n+1-i}(-y)^i + \sum_{i\geq 1}\binom{n}{i-1}x^{n+1-i}(-y)^i = x^{n+1} + \sum_{i\geq 1}\left[\binom{n}{i}+\binom{n}{i-1}\right]x^{n+1-i}(-y)^i,$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Il faut maintenant distinguer deux cas selon les valeurs de n.

- $\star$ Si $n \geq 0$ alors, par le triangle de Pascal, on en déduit que

$$(x-y)(x-y)^n = x^{n+1} + \sum_{i\geq 1}\binom{n+1}{i}x^{n+1-i}y^i = \sum_{i\geq 0}\binom{n+1}{i}x^{n+1-i}y^i = (x+y)^{n+1},$$

en utilisant la convention pour les paramètres formels pour la dernière égalité.

- $\star$ Si $n < 0$ alors on a

$$\begin{aligned}(x-y)(x-y)^n &= x^{n+1} + \sum_{i\geq 1}\left[(-1)^i\binom{-n+i-1}{i} + (-1)^{i-1}\binom{-n+i-2}{i-1}\right]x^{n+1-i}(-y)^i \quad \text{d'après } (\star)\\ &= x^{n+1} + \sum_{i\geq 1}(-1)^i\left[\binom{-n+i-1}{i} - \binom{-n+i-2}{i-1}\right]x^{n+1-i}(-y)^i.\end{aligned}$$

Comme pour tout $i \geq 1$, $-n+i-1 \geq -n+i-2 \geq -n-1 \geq 0$, on en déduit que

$$\begin{aligned}(x-y)(x-y)^n &= x^{n+1} + \sum_{i\geq 1}(-1)^i\binom{-n+i-2}{i}x^{n+1-i}y^i && \text{par le triangle de Pascal}\\ &= x^{n+1} + \sum_{i\geq 1}\binom{n+1}{i}x^{n+1-i}y^i && \text{d'après } (\star)\\ &= (x-y)^{n+k} && \text{en raisonnant de même que dans le cas précédent.}\end{aligned}$$

Ainsi, on a bien montré le résultat pour $k = 1$.

- Soit $k \geq 1$ tel que le résultat soit vrai au rang k. Comme le résultat est vrai pour $k = 1$, on a

$$(x-y)^{k+1}(x-k)^n = (x-y)(x-y)^k(x-k)^n = (x-y)(x-y)^{n+k} = (x-y)^{n+k+1},$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$, en utilisant l'hypothèse de récurrence dans la 2e égalité.

On montre de même que

$$(x-y)^k(-y+x)^n = (-y+x)^k(-y+x)^n = (-y+x)^{n+k},$$

pour tout $k \geq 0$ et $n \in \mathbb{Z}$. On en déduit alors que

$$
\begin{aligned}
(x-y)^k C^n(\alpha(x)\beta(y)) &= (x-y)^k (x-y)^n \alpha(x)\beta(y) - (x-y)^k(-y+x)^n \beta(y)\alpha(x) \\
&= (x-y)^{n+k}\alpha(x)\beta(y) - (-y+x)^{n+k}\beta(y)\alpha(x) \\
&= C^{n+k}(\alpha(x),\beta(y)),
\end{aligned}
$$

pour tout $k \geq 0$ et $n \in \mathbb{Z}$. □

Remarque 66. Grâce à la démonstration du lemme précédent, on retrouve la formule de Vandermonde dans le cas du coefficient binomial généralisé qui dit que

$$\sum_{j=0}^{i} \binom{n}{j}\binom{k}{i-j} = \binom{n+k}{i},$$

pour tout $k, i \geq 0$ et $n \in \mathbb{Z}$. En effet, on a vu que pour tout $k \geq 0$ et $n \in \mathbb{Z}$, $(x+y)^k(x+y)^n = (x+y)^{n+k}$. Par la convention pour les paramètres formels, on a

$$
\begin{aligned}
(x-y)^k(x-y)^n &= \left(\sum_{i\geq 0}\binom{k}{i}x^{k-i}y^i\right)\left(\sum_{j\geq 0}\binom{n}{j}x^{n-j}y^j\right) \\
&= \sum_{i\geq 0}\sum_{j\geq 0}\binom{k}{i}\binom{n}{j}x^{n+k-i-j}y^{i+j} \\
&= \sum_{i\geq 0}\left(\sum_{j=0}^{i}\binom{n}{j}\binom{k}{i-j}\right)x^{n+k-i}y^i,
\end{aligned}
$$

pour tout $k \geq 0$ et $n \in \mathbb{Z}$. Or, par cette convention, on a également

$$(x-y)^{n+k} = \sum_{i\geq 0}\binom{n+k}{i}x^{n+k-i}y^i,$$

pour tout $k \geq 0$ et $n \in \mathbb{Z}$. En identifiant les coefficients des deux séries, on obtient le résultat voulu.

Définition 67. Soit $\alpha(z), \beta(z)$ des champs associés à $\alpha, \beta \in U^{\mathbb{Z}}$. On peut étendre la définition du n^{e} produit résiduel pour tout $n \in \mathbb{Z}$ par

$$(\alpha *_n \beta)(z) = Res_x C^n(\alpha(x), \beta(z)).$$

Remarque 68. On remarque que tout d'abord que $(\alpha *_n \beta)(z) \in U\left[[z, z^{-1}]\right]$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. En effet, on a

$$(\alpha *_n \beta)(z) = Res_x\left(\sum_{l\in\mathbb{Z}}\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} C^n_{l,m}(\alpha,\beta)z^{-m-1}\right)x^{-l-1}\right) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} C^n_{0,m}(\alpha,\beta)z^{-m-1} \in U\left[[z, z^{-1}]\right],$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$. De plus, le n^{e} produit résiduel s'écrit aussi sous la forme

$$(\alpha *_n \beta)(z) = \sum_{i \geq 0} \binom{n}{i} \left[(-z)^i \alpha_{n-i} \beta(z) - (-z)^{n-i} \beta(z) \alpha_i\right],$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$. En effet, on a

$$\begin{aligned}
(\alpha *_n \beta)(z) &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{i \geq 0} (-1)^i \binom{n}{i} \left[\alpha_{n-i}\beta_{m+i} - (-1)^n \beta_{m+n-i}\alpha_i\right] \right) z^{-m-1} \\
&= \sum_{i \geq 0} \sum_{m \in \mathbb{Z}} (-1)^i \binom{n}{i} \alpha_{n-i}\beta_{m+i} z^{-m-1} - \sum_{i \geq 0} \sum_{m \in \mathbb{Z}} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} \beta_{m+n-i}\alpha_i z^{-m-1} \\
&= \sum_{i \geq 0} \sum_{m \in \mathbb{Z}} (-1)^i \binom{n}{i} \alpha_{n-i}\beta_m z^{-m-1+i} - \sum_{i \geq 0} \sum_{m \in \mathbb{Z}} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} \beta_m \alpha_i z^{-m-1+n-i} \\
&= \sum_{i \geq 0} (-z)^i \binom{n}{i} \alpha_{n-i} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} \beta_m z^{-m-1} \right) - \sum_{i \geq 0} (-z)^{n-i} \binom{n}{i} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} \beta_m z^{-m-1} \right) \alpha_i \\
&= \sum_{i \geq 0} \binom{n}{i} \left[(-z)^i \alpha_{n-i} \beta(z) - (-z)^{n-i} \beta(z) \alpha_i\right],
\end{aligned}$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Lemme 69. *Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, le n^{e} produit résiduel de deux champs est aussi un champ.*

Démonstration. Soit $\alpha(z), \beta(z)$ deux champs associés à $\alpha, \beta \in U^{\mathbb{Z}}$ et $n \in \mathbb{Z}$. D'après la remarque précédente, on a

$$(\alpha *_n \beta)_m = C^n_{0,m}(\alpha, \beta) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \binom{n}{i} \left(\alpha_{n-i}\beta_{m+i} - (-1)^n \beta_{m+n-i}\alpha_i\right),$$

pour tout $m \in \mathbb{Z}$. De plus, comme $\alpha(z)$ et $\beta(z)$ sont des champs, on sait que pour tout $m \in \mathbb{Z}$ et $v \in V$, $C^n_{0,m}(\alpha, \beta)v$ est une série finie. Si on fixe $v \in V$, on a pour tout $i \geq 0$,

$$\beta_{m+i} v = 0 \qquad \text{et} \qquad \beta_{m+n-i}\alpha_i v = 0, \tag{$*$}$$

pour m suffisamment grand et le rang à partir duquel ceci est vrai dépend de i. De plus, on remarque que le maximum des valeurs prises par i ne dépend pas de m pour m suffisamment grand. En effet, si on note N_α et N_β les rangs à partir desquels la propriété de troncature inférieure est vérifiée pour α et β respectivement, on a

$$\beta_{m+i} v = 0 \qquad \text{et} \qquad \alpha_i v = 0,$$

pour tout $m \in \mathbb{Z}$ et pour $i \geq \max(\{N_\alpha, N_\beta - m\})$. Or, pour m suffisamment grand, $N_\alpha \geq N_\beta - m$ et donc ces égalités sont vérifiées pour tout $i \geq N_\alpha$. En prenant le maximum entre le rang à partir duquel le maximum des valeurs prises par i ne dépend plus de m et les rangs à partir desquels les égalités $(*)$ sont vérifiées, on en déduit que $(\alpha *_n \beta)_m v = 0$ pour m suffisamment grand. Ainsi, on a bien montré que $(\alpha *_n \beta)(z)$ est un champ. $\square$

Lemme 70. *Soit $\alpha(z), \beta(z)$ des champs associés à $\alpha, \beta \in U^{\mathbb{Z}}$ et $k \geq 0$. On a*

$$(\alpha *_{-k-1} \beta)(z) = :\left(\partial_z^{(k)}\alpha(z)\right)\beta(z):.$$

Démonstration. Par définition, on a

$$\begin{aligned}(\alpha *_{-k-1} \beta)(z) &= Res_x C^{-k-1}(\alpha(x), \beta(z)) \\ &= Res_x \left((x-z)^{-k-1}\alpha(x)\beta(z) - (-z+x)^{-k-1}\beta(z)\alpha(x)\right) \\ &= Res_x \left((x-z)^{-k-1}\alpha(x)\beta(z)\right) - Res_x \left((-z+x)^{-k-1}\beta(z)\alpha(x)\right).\end{aligned}$$

Or, on remarque que

$$Res_x \left((x-z)^{-k-1}\alpha(x)\beta(z)\right) = Res_x \left(\frac{\alpha(x)}{(x-z)^{k+1}}\right)\beta(z).$$

En effet, d'après la Remarque 47 sur le n^{e} produit résiduel pour $n \in \mathbb{Z}$, on sait que

$$Res_x \left((x-z)^{-k-1}\alpha(x)\beta(z)\right) = \sum_{i \geq 0} \binom{-k-1}{i}(-z)^i \alpha_{-k-1-i}\beta(z).$$

Or, dans la démonstration du théorème des résidus, on a vu que

$$\begin{aligned}Res_x \left(\frac{\alpha(x)}{(x-z)^{k+1}}\right) &= \sum_{i \leq -1} \binom{-i-1}{k}\alpha_i z^{-i-1-k} \\ &= \sum_{i \geq -k} \binom{i+k}{k}\alpha_{-k-1-i}z^i \\ &= \sum_{i \geq 0} \binom{i+k}{k}\alpha_{-k-1-i}z^i && \text{car pour tout } i \in [\![-k, -1]\!],\ \tbinom{i+k}{k} = 0 \\ &= \sum_{i \geq 0} \binom{i+k}{i}\alpha_{-k-1-i}z^i && \text{car } i+k \geq 0 \\ &= \sum_{i \geq 0} (-z)^i \binom{-k-1}{i}\alpha_{-k-1-i} && \text{d'après } (\star).\end{aligned}$$

On a donc bien $Res_x \left((x-z)^{-k-1}\alpha(x)\beta(z)\right) = Res_x \left(\frac{\alpha(x)}{(x-z)^{k+1}}\right)\beta(z)$. On peut montrer de même que

$$Res_x \left((-z+x)^{-k-1}\beta(z)\alpha(x)\right) = \beta(z) Res_x \left(\frac{\alpha(x)}{(-z+x)^{k+1}}\right).$$

Par le théorème des résidus, on en déduit alors que

$$(\alpha *_{-k-1} \beta)(z) = Res_x \left(\frac{\alpha(x)}{(x-z)^{k+1}} \right) \beta(z) = \left(\partial_z^{(k)} \alpha(z)_- \right) \beta(z) + \beta(z) \left(\partial_z^{(k)} \alpha(z)_+ \right) =: \left(\partial_z^{(k)} \alpha(z) \right) \beta(z) :.$$

□

Lemme 71. *Soit $\alpha(z), \beta(z)$ des champs associés à $\alpha, \beta \in U^{\mathbb{Z}}$. On a*

$$\partial_z (\alpha *_n \beta)(z) = (\partial\alpha *_n \beta)(z) + (\alpha *_n \partial\beta)(z),$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Démonstration. On remarque que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\partial_x C^n(\alpha(x), \beta(z)) = C^n(\partial_x \alpha(x), \beta(z))$. En effet, on a

$$\partial_x C^n(\alpha(x), \beta(z)) = \partial_x \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} C^n_{l,m}(\alpha, \beta) z^{-m-1} \right) x^{-l-1} \right) = \sum_{l,m \in \mathbb{Z}} (-l) C^n_{l-1,m}(\alpha, \beta) x^{-l-1} z^{-m-1},$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Or

$$\begin{aligned} C^n_{l,m}(\partial\alpha, \beta) &= \sum_{i \geq 0} (-1)^i \binom{n}{i} ((-l)\alpha_{n+l-i-1}\beta_{m+i} - (-1)^n \beta_{m+n-i}(-l)\alpha_{l+i-1}) \\ &= (-l) \sum_{i \geq 0} (-1)^i \binom{n}{i} (\alpha_{l-1+n-i}\beta_{m+i} - (-1)^n \beta_{m+n-i}\alpha_{l-1+i}) \\ &= (-l) C^n_{l-1,m}(\alpha, \beta) \end{aligned}$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$. On en déduit que

$$\partial_x C^n(\alpha(x), \beta(z)) = \sum_{l,m \in \mathbb{Z}} C^n_{l,m}(\partial\alpha, \beta) x^{-l-1} z^{-m-1} = C^n(\partial_x \alpha(x), \beta(z)),$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$. On montre de même que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\partial_z C^n(\alpha(x), \beta(z)) = C^n(\alpha(x), \partial_z \beta(z))$. Or, par le point (17.1) du Lemme 17, on sait que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $Res_x \left(\partial_x C^n(\alpha(x), \beta(z)) \right) = 0$. On a donc

$$\begin{aligned} Res_x C^n(\partial_x \alpha(x), \beta(z)) + Res_x C^n(\alpha(x), \partial_z \beta(z)) &= Res_x \left(\partial_x C^n(\alpha(x), \beta(z)) \right) + Res_x \left(\partial_z C^n(\alpha(x), \beta(z)) \right) \\ &= Res_x \left(\partial_z C^n(\alpha(x), \beta(z)) \right), \end{aligned}$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$. On en déduit donc que

$$Res_x \left(\partial_z C^n(\alpha(x), \beta(z)) \right) = (\partial\alpha *_n \beta)(z) + (\alpha *_n \partial\beta)(z),$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Pour avoir le résultat, il reste donc à montrer que

$$Res_x \left(\partial_z C^n(\alpha(x), \beta(z)) \right) = \partial_z (\alpha *_n \beta)(z),$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$. En effet, on a

$$\begin{aligned}
\partial_z C^n(\alpha(x), \beta(z)) &= \partial_z \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} C^n_{l,m}(\alpha, \beta) x^{-l-1} \right) z^{-m-1} \right) \\
&= \sum_{l,m \in \mathbb{Z}} (-m) C^n_{l,m-1}(\alpha, \beta) z^{-m-1} x^{-l-1} \\
&= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} (-m) C^n_{l,m-1}(\alpha, \beta) z^{-m-1} \right) x^{-l-1},
\end{aligned}$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$. On en déduit que

$$Res_x \left(\partial_z C^n(\alpha(x), \beta(z)) \right) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} (-m) C^n_{0,m-1}(\alpha, \beta) z^{-m-1},$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Or, on remarque de plus que

$$\partial_z(\alpha *_n \beta)(z) = \partial_z \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} C^n_{0,m}(\alpha, \beta) z^{-m-1} \right) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} (-m) C^n_{0,m-1}(\alpha, \beta) z^{-m-1},$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$. On a donc bien montré que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $Res_x \left(\partial_z C^n(\alpha(x), \beta(z)) \right) = \partial_z(\alpha *_n \beta)(z)$. $\square$

Théorème 72 (Identité de Borcherds-Frenkel-Lepowsky-Meurman)**.**

Soit $\alpha(z), \beta(z)$ des champs mutuellement locaux associés à $\alpha, \beta \in U^{\mathbb{Z}}$. On a

$$C^n_{l,m}(\alpha, \beta) \stackrel{(def)}{=} \sum_{i \geq 0} (-1)^i \binom{n}{i} \left(\alpha_{l+n-i} \beta_{m+i} - (-1)^n \beta_{m+n-i} \alpha_{l+i} \right) = \sum_{i \geq 0} \binom{l}{i} (\alpha *_{n+i} \beta)_{l+m-i},$$

pour tout $l, m, n \in \mathbb{Z}$.

Démonstration. On note $N \geq 0$ l'ordre de localité de $\alpha(z)$ et $\beta(z)$. On a alors

$$(\alpha *_n \beta)(z) = 0 \qquad \text{et} \qquad C^n(\alpha(x), \beta(y)) = 0,$$

pour tout $n \geq N$. En considérant les coefficients de ces séries, on a alors

$$(\alpha *_n \beta)_m = 0 \qquad \text{et} \qquad C^n_{l,m}(\alpha, \beta) = 0,$$

pour tout $n \geq N$ et $l, m \in \mathbb{Z}$. On remarque alors que le résultat est vrai pour tout $l, m \in \mathbb{Z}$ et $n \geq N$. Il reste donc à montrer le résultat pour tout $l, m \in \mathbb{Z}$ et $n < N$: pour cela, on va utiliser le théorème 34 qui récapitule les propositions équivalentes qui découlent de la formule des différences avant de Newton. On définit pour tout $n < N$, $\gamma^n \in U^{\mathbb{Z}}$ par

$$\gamma^n_l = y^{-l} \sum_{m \in \mathbb{Z}} C^n_{l,m}(\alpha, \beta) y^{-m-1},$$

pour tout $l \in \mathbb{Z}$. Si on note pour tout $n < N$, $\gamma^n(z)$ la série génératrice formelle associée à γ^n, on a

$$\gamma^n(z) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \left(y^{-l} \sum_{m\in\mathbb{Z}} C^n_{l,m}(\alpha,\beta) y^{-m-1} \right) z^{-l-1} = y \sum_{l,m\in\mathbb{Z}} C^n_{l,m}(\alpha,\beta)(yz)^{-l-1} y^{-m-1} = yC^n(\alpha(yz),\beta(y)),$$

pour tout $n < N$. De plus, on a

$$\begin{aligned}
(z-1)^{N-n}\gamma^n(z) &= y(z-1)^{N-n}C^n(\alpha(yz),\beta(y)) \\
&= y^{1+n-N}(yz-y)^{N-n}C^n(\alpha(yz),\beta(y)) && \text{d'après } (\diamond) \\
&= y^{1+n-N}C^N(\alpha(yz),\beta(y)) && \text{par le Lemme 65 car } N-n \geq 0,
\end{aligned}$$

pour tout $n < N$. Comme $\alpha(z) \overset{N}{\sim} \beta(z)$, on a

$$(z-1)^{N-n}\gamma^n(z) = 0,$$

pour tout $n < N$. On en déduit donc que pour tout $n < N$, γ^n vérifie le point (34.1) du Théorème 34. De plus, par le point (34.2) du Théorème 34, on a

$$\gamma^n_l = \sum_{i=0}^{N-n-1} \binom{l}{i} R^n_i,$$

pour tout $n < N$ et $l \in \mathbb{Z}$, où $R^n_i = Res_z\left((z-1)^i\gamma^n(z)\right)$ pour tout $n < N$ et $i \in [\![0, N-n-1]\!]$. Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned}
R^n_i &= yRes_z\left((z-1)^iC^n(\alpha(yz),\beta(y)\right) \\
&= y^{1-i}Res_z\left((yz-y)^iC^n(\alpha(yz),\beta(y))\right) && \text{d'après } (\diamond) \\
&= y^{1-i}Res_zC^{n+i}(\alpha(yz),\beta(y)) && \text{d'après le Lemme 65}
\end{aligned}$$

pour tout $n < N$ et $i \in [\![0, N-n-1]\!]$. Or, on a

$$Res_zC^{n+i}(\alpha(yz),\beta(y)) = Res_z\left(\sum_{l,m\in\mathbb{Z}} C^{n+i}_{l,m}(\alpha,\beta)(yz)^{-l-1}y^{-m-1}\right) = Res_z\left(\sum_{l\in\mathbb{Z}}\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} C^{n+i}_{l,m}(\alpha,\beta)y^{-m-1-l-1}\right)z^{-l-1}\right),$$

pour tout $n < N$ et $i \in [\![0, N-n-1]\!]$. On a alors

$$Res_zC^{n+i}(\alpha(yz),\beta(y)) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} C^{n+i}_{0,m}(\alpha,\beta)y^{-m-2} = y^{-1}\sum_{m\in\mathbb{Z}} C^{n+i}_{0,m}(\alpha,\beta)y^{-m-1} = y^{-1}(\alpha *_{n+i} \beta)(y),$$

pour tout $n < N$ et $i \in [\![0, N-n-1]\!]$. Ainsi, on a

$$R^n_i = y^{-i}(\alpha *_{n+i} \beta)(y),$$

pour tout $n < N$ et $i \in [\![0, N-n-1]\!]$. On en déduit donc que

$$\gamma_l^n = \sum_{i\geq 0} \binom{l}{i} y^{-i}(\alpha *_{n+i} \beta)(y),$$

pour tout $n < N$ et $l \in \mathbb{Z}$. Ainsi, on a

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} C_{l,m}^n(\alpha,\beta)y^{-m-1} = \sum_{i\geq 0} \binom{l}{i} y^{l-i}(\alpha *_{n+i} \beta)(y) = \sum_{i\geq 0}\sum_{m\in\mathbb{Z}} \binom{l}{i}(\alpha *_{n+i} \beta)_m y^{-m-1+l-i},$$

pour tout $n < N$ et $l \in \mathbb{Z}$. On en déduit donc que

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} C_{l,m}^n(\alpha,\beta)y^{-m-1} = \sum_{i\geq 0}\sum_{m\in\mathbb{Z}} \binom{l}{i}(\alpha *_{n+i} \beta)_{m+l-i} y^{-m-1} = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{i\geq 0} \binom{l}{i}(\alpha *_{n+i} \beta)_{m+l-i}\right) y^{-m-1},$$

pour tout $n < N$ et $l \in \mathbb{Z}$. En identifiant les coefficients, on obtient le résultat pour tout $l, m \in \mathbb{Z}$ et $n < N$. □

Remarque 73. Ce théorème est fondamental dans la théorie des algèbres vertex. Il peut être soit considéré comme un axiome [1],[3],[5] ou être prouvé sous certaines hypothèses comme on l'a fait précédemment [5],[4].

Remarque 74. L'identité de Borcherds-Frenkel-Lepowsky-Meurman permet de retrouver certains résultats déjà montrés pour des champs mutuellement locaux. En effet, on considère $\alpha(z), \beta(z)$ deux champs mutuellement locaux associés à $\alpha, \beta \in U^{\mathbb{Z}}$. On note $N \geq 0$ l'ordre de localité de $\alpha(z), \beta(z)$.

- En appliquant l'identité de Borcherds-Frenkel-Lepowsky-Meurman à $n = 0$, on a

$$\sum_{i\geq 0} \binom{l}{i}(\alpha *_i \beta)_{m+l-i} = \sum_{i\geq 0}(-1)^i \binom{0}{i} (\alpha_{l-i}\beta_{m+i} - \beta_{m-i}\alpha_{l+i}) = \alpha_l\beta_m - \beta_m\alpha_l = [\alpha_l, \beta_m]_U,$$

  pour tout $l, m \in \mathbb{Z}$. On retrouve donc ici le point (50.3) du Théorème 50.

- En appliquant l'identité de Borcherds-Frenkel-Lepowsky-Meurman à $l = 0$, on a

$$\sum_{i\geq 0}(-1)^i \binom{n}{i} (\alpha_{n-i}\beta_{m+i} - (-1)^n\beta_{m+n-i}\alpha_i) = \sum_{i\geq 0} \binom{0}{i}(\alpha *_{n+i} \beta)_{m-i} = (\alpha *_n \beta)_m$$

  pour tout $m, n \in \mathbb{Z}$. On retrouve alors la formule des coefficients du n^{e} produit résiduel pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Proposition 75 (Equivalents à l'identité de Borcherds-Frenkel-Lepowsky-Meurman)**.**

Soit $\alpha(z), \beta(z)$ des champs mutuellement locaux associés à $\alpha, \beta \in U^{\mathbb{Z}}$. L'identité de Borcherds-Frenkel-Lepowsky-Meurman est équivalente à

- $$\sum_{i\geq 0} y^{-i-1}\delta^{(i)}(xy^{-1})(\alpha *_{n+i} \beta)(y) = (x-y)^n\alpha(x)\beta(y) - (-y+x)^n\beta(y)\alpha(x) = C^n(\alpha(x), \beta(y)), \quad (41.1)$$

- $$y^{-1}\delta\left(\frac{x-z}{y}\right)\sum_{m\in\mathbb{Z}}(\alpha *_m \beta)(y)z^{-m-1} = z^{-1}\delta\left(\frac{x-y}{z}\right)\alpha(x)\beta(y) - z^{-1}\delta\left(\frac{-y+x}{z}\right)\beta(y)\alpha(x), \quad (41.2)$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Démonstration. Pour montrer cette proposition, on va raisonner par équivalence.

Dans la démonstration de l'identité de Borcherds-Frenkel-Lepowsky-Meurman, on a vu que cette identité est équivalente à

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} C^n_{l,m}(\alpha, \beta) y^{-m-1} = \sum_{i \geq 0} \binom{l}{i} y^{l-i} (\alpha *_{n+i} \beta)(y),$$

pour tout $n, l \in \mathbb{Z}$. On en déduit donc que cette identité est équivalente à

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} C^n_{l,m}(\alpha, \beta) y^{-m-1} \right) x^{-l-1} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{i \geq 0} \binom{l}{i} y^{l-i} (\alpha *_{n+i} \beta)(y) \right) x^{-l-1},$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Ainsi, cette identité est équivalente à

$$\begin{aligned} C^n(\alpha(x), \beta(y)) &= \sum_{i \geq 0} \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} \binom{l}{i} (xy^{-1})^{-l-1} \right) y^{-i-1} (\alpha *_{n+i} \beta)(y) \\ &= \sum_{i \geq 0} \delta^{(i)}(xy^{-1}) y^{-i-1} (\alpha *_{n+i} \beta)(y), \end{aligned}$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$. On a bien montré que l'identité de Borcherds-Frenkel-Lepowsky-Meurman est équivalente à (41.1).

De plus, cette identité est équivalente à

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{i \geq 0} y^{-i-1} \delta^{(i)}(xy^{-1}) (\alpha *_{n+i} \beta)(y) \right) z^{-n-1} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} C^n(\alpha(x), \beta(y)) z^{-n-1}.$$

Or, on a

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} C^n(\alpha(x), \beta(y)) z^{-n-1} &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left[(x-y)^n \alpha(x)\beta(y) - (-y+x)^n \beta(y)\alpha(x) \right] z^{-n-1} \\ &= z^{-1} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{x-y}{z} \right)^n \right) \alpha(x)\beta(y) - z^{-1} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{-y+x}{z} \right)^n \right) \beta(y)\alpha(x) \quad \text{d'après } (\diamond) \\ &= z^{-1} \delta\left(\frac{x-y}{z} \right) \alpha(x)\beta(y) - z^{-1} \delta\left(\frac{-y+x}{z} \right) \beta(y)\alpha(x) \end{aligned}$$

Par ailleurs, on remarque que

$$\delta\left(\frac{x-z}{y} \right) = \sum_{i \geq 0} (zy^{-1})^i \delta^{(i)}(xy^{-1}).$$

En effet, on a

$$\begin{aligned}
\delta\left(\frac{x-z}{y}\right) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(xy^{-1}-zy^{-1}\right)^n \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{i\geq 0} \binom{n}{i} (xy^{-1})^{n-i}(-zy^{-1})^i\right) && \text{par la convention pour les paramètres formels} \\
&= \sum_{i\geq 0} (zy^{-1})^i \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \binom{-n+i-1}{i} (xy^{-1})^{n-i}\right) && \text{d'après } (\star) \\
&= \sum_{i\geq 0} (zy^{-1})^i \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \binom{n}{i} (xy^{-1})^{-n-1}\right) \\
&= \sum_{i\geq 0} (zy^{-1})^i \delta^{(i)}(xy^{-1}).
\end{aligned}$$

On en déduit donc que

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{i\geq 0} y^{-i-1}\delta^{(i)}(xy^{-1})(\alpha *_{n+i} \beta)(y) z^{-n-1} &= y^{-1}\sum_{i\geq 0}\sum_{n\in\mathbb{Z}} (zy^{-1})^i \delta^{(i)}(xy^{-1})(\alpha *_{n+i} \beta)(y) z^{-n-1-i} \\
&= y^{-1}\sum_{i\geq 0}\sum_{n\in\mathbb{Z}} (zy^{-1})^i \delta^{(i)}(xy^{-1})(\alpha *_n \beta)(y) z^{-n-1} \\
&= y^{-1}\left(\sum_{i\geq 0} (zy^{-1})^i \delta^{(i)}(xy^{-1})\right)\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} (\alpha *_n \beta)(y) z^{-n-1}\right) \\
&= y^{-1}\delta\left(\frac{x-z}{y}\right)\sum_{n\in\mathbb{Z}} (\alpha *_n \beta)(y) z^{-n-1}
\end{aligned}$$

On en déduit donc que l'identité de Borcherds-Frenkel-Lepowsky-Meurman est équivalente à

$$y^{-1}\delta\left(\frac{x-z}{y}\right)\sum_{m\in\mathbb{Z}} (\alpha *_m \beta)(y) z^{-m-1} = z^{-1}\delta\left(\frac{x-y}{z}\right)\alpha(x)\beta(y) - z^{-1}\delta\left(\frac{-y+x}{z}\right)\beta(y)\alpha(x).$$

Ainsi, on a bien montré que l'identité de Borcherds-Frenkel-Lepowsky-Meurman est équivalente à (41.2). □

Remarque 76. On remarque que pour $n \geq 0$, l'identité de Borcherds-Frenkel-Lepowsky-Meurman peut être prouvée grâce à des résultats déjà montrés auparavant. En effet, on considère $\alpha(z), \beta(z)$ des champs mutuellement locaux associés à $\alpha, \beta \in U^{\mathbb{Z}}$. On note $N \geq 0$ l'ordre de localité de $\alpha(z)$ et $\beta(z)$. Par le point (50.5) du Théorème 50, on a

$$[\alpha(x), \beta(y)] = \sum_{i=0}^{N-1} y^{-i-1}\delta^{(i)}(xy^{-1})(\alpha *_i \beta)(y) = \sum_{i\geq 0} y^{-i-1}\delta^{(i)}(xy^{-1})(\alpha *_i \beta)(y),$$

car pour tout $i \geq N$, $(\alpha *_i \beta)(y) = 0$. On en déduit donc que

$$
\begin{aligned}
C^n(\alpha(x),\beta(y)) &= (x-y)^n[\alpha(x),\beta(y)] \\
&= \sum_{i\geq 0} y^{-i-1}(x-y)^n\delta^{(i)}(xy^{-1})(\alpha *_i \beta)(y) \\
&= \sum_{i\geq 0} y^{-i+n-1}(xy^{-1}-1)^n\delta^{(i)}(xy^{-1})(\alpha *_i \beta)(y) && \text{d'après } (\diamond) \\
&= \sum_{i\geq -n} y^{-i-1}(xy^{-1}-1)^n\delta^{(i+n)}(xy^{-1})(\alpha *_{n+i} \beta)(y) \\
&= \sum_{i\geq -n} y^{-i-1}\delta^{(i)}(xy^{-1})(\alpha *_{n+i} \beta)(y) && \text{d'après le Lemme 22} \\
&= \sum_{i\geq 0} y^{-i-1}\delta^{(i)}(xy^{-1})(\alpha *_{n+i} \beta)(y) && \text{car pour tout } i<0,\ \delta^{(i)}(z)=0,
\end{aligned}
$$

pour tout $n \geq 0$. On a donc montré le point (41.1) du théorème précédent, ce qui donne l'identité de Borcherds-Frenkel-Lepowsky-Meurman par le théorème précédent.

Lemme 77 (Lemme de Dong)**.**

Soit $\alpha(z), \beta(z), \gamma(z)$ des champs deux à deux mutuellement locaux associés à $\alpha, \beta, \gamma \in U^{\mathbb{Z}}$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $(\alpha *_n \beta)(z)$ et $\gamma(z)$ sont alors des champs mutuellement locaux.

Démonstration. D'après le Lemme 69, comme $\alpha(z)$ et $\beta(z)$ sont des champs, on sait pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $(\alpha *_n \beta)(z)$ est aussi un champ. On note $K, L, M \geq 0$ les ordres de localité respectifs de $\alpha(z), \beta(z)$, de $\alpha(z), \gamma(z)$ et de $\beta(z), \gamma(z)$. En particulier, on a pour tout $n \geq K$, $(\alpha *_n \beta)(z) = 0$, ce qui donne le résultat pour tout $n \geq K$. Il reste donc à montrer de résultat pour tout $n < K$: on fixe donc $n < K$. On définit

$$N_n = K + L + M - n - 1 \geq 0 \qquad \text{et} \qquad D(x,y,z) = (y-z)^{N_n}[\gamma(y), C^n(\alpha(x),\beta(z))].$$

Grâce à la démonstration du Lemme 65, on a

$$D(x,y,z) = (y-z)^M(y-x+x-z)^{N_n-M}\left(\gamma(y)C^n(\alpha(x),\beta(z)) - C^n(\alpha(x),\beta(z))\gamma(y)\right),$$

car $M \geq 0$. De plus, par la convention pour les paramètres formels, on a

$$D(x,y,z) = (y-z)^M \sum_{r=0}^{N_n-M} \binom{N_n-M}{r} (y-x)^{N_n-M-r}(x-z)^r \left(\gamma(y)C^n(\alpha(x),\beta(z)) - C^n(\alpha(x),\beta(z))\gamma(y)\right).$$

Par le Lemme 65, on en déduit donc que

$$\begin{aligned}
D(x,y,z) &= (y-z)^M \sum_{r=0}^{N_n-M} \binom{N_n-M}{r} (y-x)^{N_n-M-r} \left(\gamma(y)C^{n+r}(\alpha(x),\beta(z)) - C^{n+r}(\alpha(x),\beta(z))\gamma(y)\right) \\
&= (y-z)^M \sum_{r=0}^{N_n-M} \binom{N_n-M}{r} (y-x)^{N-M-r} [\gamma(y), C^{n+r}(\alpha(x),\beta(z))] \\
&= (y-z)^M \sum_{r=0}^{K-n-1} \binom{N_n-M}{r} (y-x)^{N_n-M-r} [\gamma(y), C^{n+r}(\alpha(x),\beta(z))],
\end{aligned}$$

car pour $r \geq K-n$, $C^{n+r}(\alpha(x),\beta(z)) = 0$. Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned}
[\gamma(y), C^{n+r}(\alpha(x),\beta(z))] &= [\gamma(y), (x-z)^{n+r}\alpha(x)\beta(z) - (-z+x)^{n+r}\beta(z)\alpha(x)] \\
&= (x-z)^{n+r} \left(\gamma(y)\alpha(x)\beta(z) - \alpha(x)\beta(z)\gamma(y)\right) - (-z+x)^{n+r} \left(\gamma(y)\beta(z)\alpha(x) - \beta(z)\alpha(x)\gamma(y)\right) \\
&= (x-z)^{n+r} \left(\gamma(y)\alpha(x)\beta(z) - \alpha(x)\gamma(y)\beta(z) + \alpha(x)\gamma(y)\beta(z) - \alpha(x)\beta(z)\gamma(y)\right) \\
&\quad - (-z+x)^{n+r} \left(\gamma(y)\beta(z)\alpha(x) - \beta(z)\gamma(y)\alpha(x) + \beta(z)\gamma(y)\alpha(x) - \beta(z)\alpha(x)\gamma(y)\right) \\
&= (x-z)^{n+r} \left([\gamma(y),\alpha(x)]\beta(z) + \alpha(x)[\gamma(y),\beta(z)]\right) \\
&\quad - (-z+x)^{n+r} \left([\gamma(y),\beta(z)]\alpha(x) - \beta(z)[\gamma(y),\alpha(x)]\right)
\end{aligned}$$

On en déduit donc que

$$\begin{aligned}
(y-z)^M (y-x)^{N_n-M-r} [\gamma(y), C^{n+r}(\alpha(x),\beta(z))] &= (y-z)^M (x-z)^{n+r} C^{N_n-M-r}(\gamma(y),\alpha(x))\beta(z) \\
&\quad + (y-x)^{N_n-M-r} (x-z)^{n+r} \alpha(x) C^M(\gamma(y),\beta(z)) \\
&\quad - (y-x)^{N_n-M-r} (-z+x)^{n+r} C^M(\gamma(y),\beta(z))\alpha(x) \\
&\quad - (y-z)^M (-z+x)^{n+r} \beta(z) C^{N_n-M-r}(\gamma(y),\alpha(x)),
\end{aligned}$$

pour tout $r \in [\![0, K-n-1]\!]$ car $N_n - M - r = K + L - n - 1 - r \geq L \geq 0$ et $M \geq 0$. Ainsi, on a

$$(y-z)^M (y-x)^{N_n-M-r} [\gamma(y), C^{n+r}(\alpha(x),\beta(z))] = 0,$$

pour tout $r \in [\![0, K-n-1]\!]$ car $N_n - M - r \geq L$, $\alpha(z) \overset{L}{\sim} \gamma(z)$ et $\beta(z) \overset{M}{\sim} \gamma(z)$. On en conclut que

$$D(x,y,z) = 0.$$

En particulier, on a alors $Res_x D(x,y,z) = 0$. Or, on a

$$
\begin{aligned}
Res_x D(x,y,z) &= Res_x \left((y-z)^{N_n}\left[\gamma(y)C^n(\alpha(x),\beta(z)) - C^n(\alpha(x),\beta(z))\gamma(y)\right]\right) \\
&= (y-z)^{N_n}\left(\gamma(y)Res_x C^n(\alpha(x),\beta(z)) - Res_x C^n(\alpha(x),\beta(z))\gamma(y)\right) \\
&= (y-z)^{N_n}\left(\gamma(y)(\alpha *_n \beta)(z) - (\alpha *_n \beta)(z)\gamma(y)\right) \\
&= (y-z)^{N_n}[\gamma(y),(\alpha *_n \beta)(z)] \\
&= C^{N_n}(\gamma(y),(\alpha *_n \beta)(z)),
\end{aligned}
$$

en montrant la 2e égalité comme dans la démonstration du Lemme 70 et en utilisant le fait que $N_n \geq 0$ pour la dernière égalité. Par ce qui précède, on en déduit donc que $\gamma(z)$ et $(\alpha *_n \beta)(z)$ sont mutuellement locaux d'ordre de localité d'au plus N_n pour tout $n \in \mathbb{Z}$. □

6.2 Champs créateurs

On considère $\mathbb{1} \in V$ un état particulier de V que l'on appelle *vecteur de vide*.

Définition 78 (Champ créateur)**.**

Soit $\alpha \in U^{\mathbb{Z}}$ et $\alpha(z)$ sa série génératrice formelle associée.

- On dit que $\alpha(z)$ est un *champ créateur* si $\alpha(z)$ est un champ dont les composantes vérifient

  $$\alpha_n \mathbb{1} = 0,$$

  pour tout $n \geq 0$. De plus, les composantes de $\alpha(z)$ sont appelées des *modes*.

- On dit que $\alpha(z)$ est un *champ créateur pour $a \in V$* si $\alpha(z)$ est un champ créateur qui vérifie $\alpha_{-1}\mathbb{1} = a$.

Remarque 79. On peut reformuler les conditions à vérifier pour qu'un champ soit un champ créateur.

- $\alpha(z)$ est un champ créateur si et seulement si $\alpha(z)_+\mathbb{1} = 0$. En effet, on a

  $$\alpha(z)_+\mathbb{1} = 0 \Leftrightarrow \sum_{n\geq 0} \alpha_n \mathbb{1} z^{-n-1} = 0 \Leftrightarrow \forall n \geq 0, \alpha_n \mathbb{1} = 0.$$

- $\alpha(z)$ est un champ créateur pour a si et seulement si $\alpha(z)\mathbb{1} = a + O(z) \in V[[z]]$. En effet, on a

  $$\alpha_{-1}\mathbb{1} = a \text{ et } \forall n \geq 0, \alpha_n \mathbb{1} = 0 \Leftrightarrow \alpha(z)\mathbb{1} = a + \sum_{n\leq -2} \alpha_n \mathbb{1} z^{-n-1} = a + \sum_{n \geq 1} \alpha_{-n-1}\mathbb{1} z^n = a + O(z).$$

Lemme 80. *Soit $\alpha(z), \beta(z)$ des champs créateurs pour les états $a, b \in V$, associés à $\alpha, \beta \in U^{\mathbb{Z}}$. On a*

- *$z\alpha(z)$ est un champ créateur pour le vecteur nul 0.* (80.1)

- *Soit $I(z)$ la série génératrice formelle associée à $(I_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ définie par*

$$I_{-1} = Id_V \qquad et \qquad I_n = 0,$$

  pour tout $n \neq -1$. $I(z)$ est un champ créateur pour $\mathbb{1}$. (80.2)

- *$\lambda\alpha(z) + \mu\beta(z)$ est un champ créateur pour $\lambda a + \mu b$ pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.* (80.3)

- *$(\alpha *_n \beta)(z)$ est un champ créateur pour $\alpha_n b$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.* (80.4)

- *$:\left(\partial_z^{(k)}\alpha(z)\right)\beta(z):$ est un champ créateur pour $\alpha_{-k-1}b$ pour tout $k \geq 0$.* (80.5)

- *$\partial_z^{(k)}\alpha(z)$ est un champ créateur pour $\alpha_{-k-1}\mathbb{1}$ pour tout $k \geq 0$.* (80.6)

Démonstration. On remarque tout d'abord que

$$z\alpha(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n z^{-n} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_{n+1} z^{-n-1}.$$

Comme $\alpha(z)$ est un champ, on en déduit que $z\alpha(z)$ est aussi un champ. De plus

$$\alpha_0\mathbb{1} = 0 \qquad \text{et} \qquad \alpha_{n+1}\mathbb{1} = 0,$$

pour tout $n \geq 0$, car $\alpha(z)$ est un champ créateur. On a donc bien montré (80.1).

On remarque facilement que $I(z)$ est un champ car cette série a un unique terme non nul. Si on note $I \in U^{\mathbb{Z}}$ la suite associée à $I(z)$, on a

$$I_{-1}\mathbb{1} = Id_V(\mathbb{1}) = \mathbb{1} \qquad \text{et} \qquad I_n\mathbb{1} = 0,$$

pour tout $n \geq 0$. On a donc bien montré (80.2).

On fixe $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. On a

$$\lambda\alpha(z) + \mu\beta(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\lambda\alpha_n + \mu\beta_n)\, z^{-n-1}.$$

Comme $\alpha(z), \beta(z)$ sont des champs, on en déduit que $\lambda\alpha(z) + \mu\beta(z)$ est aussi un champ. De plus, on a

$$\lambda\alpha_{-1} + \mu\beta_{-1} = \lambda a + \mu b \qquad \text{et} \qquad \lambda\alpha_n + \mu\beta_n = 0,$$

pour tout $n \geq 0$, car $\alpha(z)$ et $\beta(z)$ sont des champs créateurs. On a donc bien montré (80.3).

On fixe $n \in \mathbb{Z}$. D'après le Lemme 69, comme $\alpha(z)$ et $\beta(z)$ sont des champs, on sait que $(\alpha *_n \beta)(z)$ est aussi un champ. De plus, on a vu que

$$(\alpha *_n \beta)(z) = \sum_{i\geq 0} \binom{n}{i} \left((-z)^i \alpha_{n-i}\beta(z) - (-z)^{n-i}\beta(z)\alpha_i\right).$$

On en déduit donc que

$$\begin{aligned}
(\alpha *_n \beta)(z)\mathbb{1} &= \sum_{i\geq 0} \binom{n}{i} \left((-z)^i \alpha_{n-i}\beta(z)\mathbb{1} - (-z)^{n-i}\beta(z)\alpha_i\mathbb{1}\right) \\
&= \sum_{i\geq 0} \binom{n}{i} (-z)^i \alpha_{n-i} \left(b + O(z)\right) \\
&= \alpha_n b + O(z),
\end{aligned}$$

car $\alpha(z)$ et $\beta(z)$ sont des champs créateurs associés à a, b respectivement. On a donc bien montré (80.4).

On fixe $k \geq 0$. D'après le Lemme 70, on a

$$(\alpha *_{-k-1} \beta)(z) = :\left(\partial_z^{(k)}\alpha(z)\right)\beta(z):.$$

Par ce qui précède, $:\left(\partial_z^{(k)}\alpha(z)\right)\beta(z):$ est donc un champ créateur pour $\alpha_{-k-1}b$. On a donc bien montré (80.5).

On fixe $k \geq 0$. Par définition du produit normalement ordonné, on a

$$:\left(\partial_z^{(k)}\alpha(z)\right)\beta(z): = \left(\partial_z^{(k)}\alpha(z)\right)_- \beta(z) + \beta(z)\left(\partial_z^{(k)}\alpha(z)\right)_+ .$$

En considérant $\beta(z) = I(z)$, on a

$$:\left(\partial_z^{(k)}\alpha(z)\right)I(z): = \partial_z^{(k)}\alpha(z)_- + \partial_z^{(k)}\alpha(z)_+ = \partial_z^{(k)}\alpha(z).$$

Par ce qui précède, on en déduit que $\partial_z^{(k)}\alpha(z)$ est un champ créateur pour $\alpha_{-k-1}\mathbb{1}$. On a donc bien montré (80.6). □

Remarque 81. Soit $\alpha(z)$ un champ créateur pour $a \in V$, associé à $\alpha \in U^{\mathbb{Z}}$. On remarque que l'on peut créer d'autres champs créateurs pour a à partir de $\alpha(z)$. En effet, si on considère $\beta(z)$ un champ créateur quelconque, les points (80.1) et (80.3) du lemme précédent justifient le fait que $\alpha(z) + z\beta(z)$ est un champ créateur pour a.

Grâce à ces considérations sur les champs créateurs, on peut être plus précis sur la propriété de troncature inférieure pour des champs créateurs mutuellements locaux.

Corollaire 82 (Troncature inférieure)**.**

Soit $\alpha(z), \beta(z)$ des champs créateurs pour les états $a, b \in V$, mutuellement locaux et associés à $\alpha, \beta \in U^{\mathbb{Z}}$. Si on note $N \geq 0$ l'ordre de localité de $\alpha(z)$ et $\beta(z)$, on a

$$\alpha_n b = 0,$$

pour tout $n \geq N$.

Démonstration. D'après le point (80.4) du lemme précédent, on sait que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $(\alpha *_n \beta)(z)$ est un champ créateur pour $\alpha_n b$. Or, comme $\alpha(z) \overset{N}{\sim} \beta(z)$, on en déduit que

$$(\alpha *_n \beta)(z) = 0,$$

pour tout $n \geq N$. En particulier, on a alors

$$0 = (\alpha *_n \beta)_{-1} \mathbb{1} = \alpha_n b,$$

pour tout $n \geq N$. □

7 Algèbres vertex

Dans cette partie, on va utiliser les notions définies dans les parties précédentes pour définir une algèbre vertex.

7.1 Unicité et covariance par translations

On considère V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et $\mathbb{1} \in V$, le vecteur de vide. On considère également $\mathscr{F}$ un ensemble de champs créateurs deux à deux mutuellement locaux tel que pour tout $v \in V$, il existe un champ créateur pour v dans $\mathscr{F}$.

De plus, par la Remarque 81 qui découle du Lemme 80, on remarque qu'a priori les éléments de $\mathscr{F}$ ne sont pas uniques i.e. $\mathscr{F}$ peut contenir plusieurs champs créateurs pour un même état $a \in V$.

Remarque 83. Quitte à considérer $\mathscr{F} \cup \{I(z)\}$, on peut supposer que $Iz \in \mathscr{F}$ car par le point (80.2) du Lemme 80, on sait que $I(z)$ est un champ créateur pour $\mathbb{1}$. De plus, on remarque que $I(z)$ est mutuellement local avec tous les champs créateurs. En effet, si on considère $\alpha(z)$ un champ créateur quelconque, on a

$$C^0(\alpha(x), I(y)) = \alpha(x)I(y) - I(y)\alpha(x) = 0.$$

Proposition 84. *Soit $\phi(z)$ un champ créateur de $\mathscr{F}$ pour le vecteur nul 0. On a*

$$\phi(z)\mathbb{1} = 0 \Leftrightarrow \phi(z) \equiv 0.$$

Démonstration. Pour montrer cette proposition, on va raisonner par double implication.

On suppose que $\phi(z)\mathbb{1} = 0$. On considère $a \in V$ et $\alpha(z)$ un champ créateur de $\mathscr{F}$ pour a. Si on note $N \geq 0$ l'ordre de localité de $\alpha(z)$ et $\phi(z)$, on a

$$z^{-N} C^N(\phi(z), \alpha(y))\mathbb{1} = 0.$$

Or, on a également

$$\begin{aligned}
z^{-N} C^N(\phi(z), \alpha(y))\mathbb{1} &= z^{-N}(z-y)^N \left(\phi(z)\alpha(y) - \alpha(y)\phi(z)\right)\mathbb{1} && \text{car } N \geq 0 \\
&= z^{-N}(z-y)^N \phi(z)\alpha(y)\mathbb{1} && \text{car par hypothèse } \phi(z)\mathbb{1} = 0 \\
&= z^{-N}(z-y)^N \phi(z)\left(a + O(y)\right) && \text{car } \alpha(z) \text{ est un champ créateur pour } a \\
&= \left(\sum_{i \geq 0} \binom{N}{i} z^{-i}(-y)^i\right) \phi(z)\left(a + O(y)\right) \\
&= \phi(z)a + O(y)
\end{aligned}$$

On en déduit donc que $\phi(z)a = 0$. Ceci étant valable pour tout $a \in V$, on en conclut que $\phi(z) \equiv 0$.

La réciproque est immédiate. $\square$

Corollaire 85. *Soit $\alpha(z)$ et $\tilde{\alpha}(z)$ deux champs créateurs de $\mathscr{F}$ pour un même état $a \in V$. On a*

$$\alpha(z) = \tilde{\alpha}(z) \Leftrightarrow \alpha(z)\mathbb{1} = \tilde{\alpha}(z)\mathbb{1}.$$

Démonstration. On considère $\phi(z) = \alpha(z) - \tilde{\alpha}(z)$: cela revient alors à montrer que

$$\phi(z)\mathbb{1} = 0 \Leftrightarrow \phi(z) \equiv 0.$$

On considère pour cela l'ensemble $\mathscr{F} \cup \{\phi(z)\}$. Il suffit de montrer que $\mathscr{F} \cup \{\phi(z)\}$ vérifie les mêmes propriétés que $\mathscr{F}$ pour pouvoir appliquer la proposition précédente. Pour cela, on va vérifier que ϕ est un champ créateur mutuellement local avec tous les éléments de $\mathscr{F}$. Par le point (80.3) du Lemme 80, on sait que $\phi(z)$ est un champ créateur pour le vecteur nul 0. De plus, comme $\alpha(z)$ et $\tilde{\alpha}(z)$ sont mutuellement locaux avec tous les éléments de $\mathscr{F}$, on en déduit que $\phi(z)$ est aussi mutullement local avec tous les éléments de $\mathscr{F}$. On peut donc appliquer la proposition précédente avec $\mathscr{F} \cup \{\phi(z)\}$ et on en déduit ainsi le résultat. $\square$

On cherche maintenant un critère pour que les éléments de $\mathscr{F}$ soient uniques i.e. pour que $\mathscr{F}$ contienne un unique champ créateur pour un état $a \in V$.

Définition 86 (Covariance par translations)**.**

- Soit $T \in End_{\mathbb{C}}(V)$ tel que

  $$T\mathbb{1} = 0 \qquad \text{et} \qquad [T, \alpha(z)] = \partial_z \alpha(z),$$

  pour tout $\alpha(z) \in \mathscr{F}$. On dit alors que T est un *opérateur de translations*.

- On dit que $\mathscr{F}$ est *convariant par translations* s'il existe $T \in End_{\mathbb{C}}(V)$ tel que les deux conditions précédentes soient vérifiées.

Remarque 87. La 2$^{\text{e}}$ condition à vérifier est équivalente à

$$[T, \alpha_n]_{End_{\mathbb{C}}(V)} = -n\alpha_{n-1},$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et pour tout champ créateur $\alpha(z)$ de $\mathscr{F}$ qui est associé à $\alpha \in End_{\mathbb{C}}(V)^{\mathbb{Z}}$. En effet, si on considère $\alpha(z)$ un champ créateur de $\mathscr{F}$ pour $a \in V$, associé à $\alpha \in End_{\mathbb{C}}(V)^{\mathbb{Z}}$, on a

$$[T, \alpha(z)] = \partial_z \alpha(z) \Leftrightarrow \sum_{n \in \mathbb{Z}} [T, \alpha_n]_{End_{\mathbb{C}}(V)} z^{-n-1} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-n)\alpha_{n-1} z^{-n-1}$$
$$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{Z}, [T, \alpha_n]_{End_{\mathbb{C}}(V)} = -n\alpha_{n-1},$$

en identifiant les coefficients.

Théorème 88 (Théorème d'unicité)**.**

Les éléments de $\mathscr{F}$ sont uniques, i.e. il existe un unique champ créateur dans $\mathscr{F}$ pour $a \in V$, si et seulement si $\mathscr{F}$ est covariant par translations.

Démonstration. Pour montrer ce théorème, on va raisonner par double implication.

On suppose que les éléments de $\mathscr{F}$ sont uniques. On définit $T \in End_{\mathbb{C}}(V)$ par

$$Ta = \alpha_{-2}\mathbb{1},$$

pour tout $a \in V$, où $\alpha(z)$ est l'unique champ créateur de $\mathscr{F}$ pour a, associé à $\alpha \in End_{\mathbb{C}}(V)^{\mathbb{Z}}$. Par la Remarque 83, on sait que $I(z) \in \mathscr{F}$. Par hypothèse, $I(z)$ est alors l'unique champ créateur de $\mathscr{F}$ pour $\mathbb{1}$. Par définition de T, on a alors

$$T\mathbb{1} = 0.$$

Par la remarque énoncée à la page 60 qui découle de la définition de covariance par translations, il reste donc à montrer que

$$[T, \alpha_n]_{End_{\mathbb{C}}(V)} = -n\alpha_{n-1},$$

pour tout champ créateur $\alpha(z)$ de $\mathscr{F}$ qui est associé à $\alpha \in End_{\mathbb{C}}(V)^{\mathbb{Z}}$ et $n \in \mathbb{Z}$. Pour cela, on considère $a, b \in V$ et $\alpha(z), \beta(z)$ les uniques champs créateurs de $\mathscr{F}$ pour a, b respectivement qui sont associés à $\alpha, \beta \in End_{\mathbb{C}}(V)^{\mathbb{Z}}$. Par le point (80.4) du Lemme 80, on sait que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $(\alpha *_n \beta)(z)$ est un champ créateur pour $\alpha_n b$. De plus, comme $\alpha(z)$ et $\beta(z)$ sont mutuellement locaux avec tous les éléments de $\mathscr{F}$, par le lemme de Dong, on sait que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $(\alpha *_n \beta)(z)$ est aussi mutuellement local avec tous les éléments de $\mathscr{F}$. On en déduit donc que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $(\alpha *_n \beta)(z) \in \mathscr{F}$. Par hypothèse, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $(\alpha *_n \beta)(z)$ est l'unique champ créateur de $\mathscr{F}$ pour $\alpha_n b$. Par définition de T, on a alors

$$T(\alpha_n b) = (\alpha *_n \beta)_{-2}\mathbb{1} = C^n_{0,-2}(\alpha, \beta)\mathbb{1} = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \binom{n}{i} \left(\alpha_{n-i}\beta_{i-2} - (-1)^n \beta_{n-i-2}\alpha_i\right)\mathbb{1},$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Or, comme $\alpha(z), \beta(z)$ sont des champs créateurs pour a, b respectivement, on a

$$T(\alpha_n b) = \alpha_n \beta_{-2}\mathbb{1} - n\alpha_{n-1}\beta_{-1}\mathbb{1} = \alpha_n(Tb) - n\alpha_{n-1}b,$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$. On en déduit donc que

$$[T, \alpha_n]_{End_{\mathbb{C}}(V)} b = T(\alpha_n b) - \alpha_n(Tb) = -n\alpha_{n-1} b,$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Ceci étant valable pour tout $b \in V$, on a alors

$$[T, \alpha_n]_{End_{\mathbb{C}}(V)} = -n\alpha_{n-1},$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Ainsi, $\mathscr{F}$ est covariant par translations.

Réciproquement, on suppose que $\mathscr{F}$ est covariant par translations pour un certain opérateur de translations $T \in End_{\mathbb{C}}(V)$. On considère $\alpha(z)$ un champ créateur de $\mathscr{F}$ pour $a \in V$ qui est associé à $\alpha \in End_{\mathbb{C}}(V)^{\mathbb{Z}}$. On définit tout d'abord par récurrence T^N par

$$T^0 = Id_V \qquad \text{et} \qquad T^N = T \circ T^{N-1},$$

pour tout $N \geq 1$. Par hypothèse, on a

$$k\alpha_{-k-1} = [T, \alpha_{-k}]_{End_{\mathbb{C}}(V)} = T\alpha_{-k} - \alpha_{-k}T,$$

pour tout $k \in \mathbb{Z}$. En particulier, comme $T\mathbb{1} = 0$, on a

$$k\alpha_{-k-1}\mathbb{1} = T\alpha_{-k}\mathbb{1}, \tag{$\spadesuit$}$$

pour tout $k \in \mathbb{Z}$. On peut alors montrer que

$$T^n a = n\,!\alpha_{-n-1}\mathbb{1}, \tag{$\square$}$$

pour tout $n \geq 0$. En effet, pour cela, on va raisonner par récurrence sur $n \geq 0$.

- Si $n = 0$ alors $T^0 a = a = \alpha_{-1}\mathbb{1}$ car $\alpha(z)$ est un champ créateur pour a : le résultat est bien vérifié pour $n = 0$.

- Soit $n \geq 0$ tel que le résultat soit vrai au rang n. On a

  $$T^{n+1} a = T(T^n a) = n\,!\; T\alpha_{-n-1}\mathbb{1} = (n+1)\,!\; \alpha_{-n-2}\mathbb{1},$$

  en utilisant l'hypothèse de récurrence pour la 2[e] égalité et en utilisant ($\spadesuit$) pour la dernière égalité.

On a donc bien montré ($\square$). Comme $\alpha(z)$ est un champ créateur pour a, on en déduit alors que

$$\alpha(z)\mathbb{1} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n \mathbb{1} z^{-n-1} = \sum_{n\leq -1} \alpha_n \mathbb{1} z^{-n-1} = \sum_{n\geq 0} \alpha_{-n-1}\mathbb{1} z^n = \sum_{n\geq 0} \frac{(Tz)^n}{n\,!} a = e^{zT} a,$$

en utilisant ($\square$) pour l'avant dernière égalité. Par le même raisonnement, si on considère $\tilde{\alpha}(z)$ un autre champ créateur de $\mathscr{F}$ pour a, on a

$$\tilde{\alpha}(z)\mathbb{1} = e^{zT}a = \alpha(z)\mathbb{1}.$$

Par le corollaire 85, on en déduit que $\alpha(z) = \tilde{\alpha}(z)$: les éléments de $\mathscr{F}$ sont donc uniques. $\square$

7.2 Algèbres vertex

On considère V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et $\mathscr{F}$ un ensemble de champs créateurs deux à deux mutuellement locaux pour V que l'on suppose covariant par translations pour un certain $T \in End_{\mathbb{C}}(V)$. Par le théorème précédent, on en déduit que les éléments de $\mathscr{F}$ sont uniques : on note alors $Y(a,z)$, l'unique champ créateur de $\mathscr{F}$ pour $a \in V$ et on note $Y^a \in End_{\mathbb{C}}(V)^{\mathbb{Z}}$ sa suite associée. On dit que $Y(a,z)$ est l'*opérateur vertex pour a*. On peut également définir une application $Y : V \to End_{\mathbb{C}}(V)\left[[z,z^{-1}]\right]$ par

$$Y(a) = Y(a,z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} Y_n^a z^{-n-1},$$

pour tout $a \in V$. On dit que Y est une *correspondance état-champ*.

Définition 89 (Algèbres vertex)**.**

Une *algèbre vertex* est la donnée d'un quadruplet $(V, Y, T, \mathbb{1})$ où V est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, $\mathbb{1} \in V$, $T \in End_{\mathbb{C}}(V)$ et Y est une correspondance état-champ qui vérifient

$$Y(a,z) \sim Y(b,z)\ ,\ Y(a,z)\mathbb{1} = a + O(z)\ ,\ T\mathbb{1} = 0 \quad \text{et} \quad [T, Y(a,z)] = \partial_z Y(a,z),$$

pour tout $a, b \in V$.

Remarque 90. Grâce à la 2ᵉ condition, on remarque que pour tout $a \in V$, $Y(a,z)$ est un champ créateur pour a. De plus, les autres conditions justifient le fait que $\{Y(a,z)\}_{a\in V}$ est un ensemble de champs créateurs pour V deux à deux mutuellement locaux qui est covariant par translations pour T.

Lemme 91. *Soit $(V, Y, T, \mathbb{1})$ une algèbre vertex. L'application Y est linéaire et injective.*

Démonstration. Par le point (80.3) du Lemme 80, on sait que pour tout $a, b \in V$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $\lambda Y(a,z) + \mu Y(b,z)$ est un champ créateur pour $\lambda a + \mu b$. De plus, pour tout $a, b \in V$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $\lambda Y(a,z) + \mu Y(b,z)$ est mutuellement local avec tous les éléments de $\{Y(a,z)\}_{a\in V}$ car $Y(a,z)$ et $Y(b,z)$ le sont. Par ailleurs, on a

$$[T, \lambda Y(a,z) + \mu Y(b,z)] = \lambda[T, Y(a,z)] + \mu[T, Y(b,z)] = \lambda\partial_z Y(a,z) + \mu\partial_z Y(b,z) = \partial_z\left(\lambda Y(a,z) + \mu Y(b,z)\right),$$

pour tout $a, b \in V$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Par unicité, on a alors

$$\lambda Y(a,z) + \mu Y(b,z) = Y(\lambda a + \mu b, z),$$

pour tout $a, b \in V$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. On en déduit que Y est une application linéaire

On fixe maintenant $a, b \in V$ et on suppose que $Y(a, z) = Y(b, z)$. Si on note Y^a, Y^b les suites associées à $Y(a, z), Y(b, z)$ respectivement, on a

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} Y_n^a z^{-n-1} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} Y_n^b z^{-n-1}.$$

En identifiant les coefficients, on a alors

$$Y_n^a = Y_n^b,$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$. En particulier, on a

$$a = Y_{-1}^a = Y_{-1}^b = b,$$

car $Y(a, z)$ et $Y(b, z)$ sont des champs créateurs pour a et b respectivement. On en déduit que Y est injective. $\square$

Proposition 92. *Soit $(V, Y, T, \mathbb{1})$ une algèbre vertex, $a, b \in V$ et $Y(a, z), Y(b, z)$ les opérateurs vertex associés à a, b respectivement. On note $Y^a, Y^b \in End_{\mathbb{C}}(V)^{\mathbb{Z}}$ les suites associées à $Y(a, z), Y(b, z)$ respectivement. On a*

- $Y(\mathbb{1}, z) = I(z) = Id_V,$ (92.1)

- $Y(a, z)\mathbb{1} = e^{zT}a,$ (92.2)

- $Y(Y_n^a b, z) = (Y^a *_n Y^b)(z),$ (92.3)

- $Y(Ta, z) = \partial_z Y(a, z),$ (92.4)

pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Démonstration. Dans la démonstration du théorème d'unicité, on a vu que $I(z)$ est un champ créateur pour $\mathbb{1}$ mutuellement local avec tous les champs créateurs. De plus, on a

$$[T, I(z)] = TI(z) - I(z)T = 0 = \partial_z I(z).$$

Par unicité, on en déduit que $Y(\mathbb{1}, z) = I(z)$. On a donc bien montré (92.1).

On remarque que le point (92.2) a déjà été montré dans la démonstration du théorème d'unicité.

Dans la démonstration du théorème d'unicité, on a vu que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $(Y^a *_n Y^b)(z)$ est un champ créateur pour $Y^a_n b$ qui est mutuellement local avec tous les éléments de $\{Y(a,z)\}_{a \in V}$. De plus, on a

$$[T, C^n(Y^a(x), Y^b(y))] = C^n(\partial_x Y^a(x), Y^b(y)) + C^n(Y^a(x) + \partial_y Y^b(y)),$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$. En effet, on a

$$\begin{aligned}
[T, C^n(Y^a(x), Y^b(y))] &= [T, (x-y)^n Y^a(x)Y^b(y) - (-y+x)^n Y^b(y)Y^a(x)] \\
&= (x-y)^n \big(TY^a(x)Y^b(y) - Y^a(x)Y^b(y)T\big) - (-y+x)^n \big(TY^b(y)Y^a(x) - Y^b(y)Y^a(x)T\big) \\
&= (x-y)^n \big(TY^a(x)Y^b(y) - Y^a(x)TY^b(y) + Y^a(x)TY^b(y) - Y^a(x)Y^b(y)T\big) \\
&\quad - (-y+x)^n \big(TY^b(y)Y^a(x) - Y^b(y)TY^a(x) + Y^b(y)TY^a(x) - Y^b(y)Y^a(x)T\big) \\
&= (x-y)^n \big([T, Y^a(x)]Y^b(y) + Y^a(x)[T, Y^b(y)]\big) - (-y+x)^n \big([T, Y^b(y)]Y^a(x) + Y^b(y)[T, Y^a(x)]\big) \\
&= (x-y)^n \big(\partial_x Y(a,x)Y^b(y) + Y^a(x)\partial_y Y(b,y)\big) - (-y+x)^n \big(\partial_y Y(b,y)Y^a(x) + Y^b(y)\partial_x Y(a,x)\big) \\
&= C^n(\partial_x Y^a(x), Y^b(y)) + C^n(Y^a(x), \partial_y Y^b(y)),
\end{aligned}$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$, en utilisant la covariance par translations pour l'avant dernière égalité. On en déduit donc que

$$\begin{aligned}
[T, (Y^a *_n Y^b)(z)] &= Res_x[T, C^n(Y^a(x), Y^b(y)] \\
&= Res_x \big(C^n(\partial_x Y^a(x), Y^b(y)) + C^n(Y^a(x) + \partial_y Y^b(y))\big) \\
&= (\partial Y^a *_n Y^b)(y) + (Y^a *_n \partial Y^b)(y) \\
&= \partial_y (Y^a *_n Y^b)(y),
\end{aligned}$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$, d'après le Lemme 71. Par unicité, on en déduit que

$$Y(Y_n b, z) = (Y^a *_n Y^b)(z),$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$. On a donc bien montré (92.3).

D'après le lemme 45, on sait que $\partial_z Y(a,z)$ est mutuellement local avec tous les éléments de $\{Y(a,z)\}_{a \in V}$ car $Y(a,z)$ l'est. De plus, d'après le point (80.6) du Lemme 80, on sait que $\partial_z Y(a,z)$ est un champ créateur pour $Y^a_{-2}\mathbb{1}$. Or, par la Remarque 87, on a

$$(-n)Y^a_{n-1} = [T, Y^a_n]_{End_{\mathbb{C}}(V)} = TY^a_n - Y^a_n T,$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$. En particulier, on a donc

$$(-n)Y^a_{n-1}\mathbb{1} = TY^a_n \mathbb{1},$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$, car $T\mathbb{1} = 0$. On en déduit donc que

$$Y^a_{-2}\mathbb{1} = TY^a_{-1}\mathbb{1} = Ta,$$

car $Y(a,z)$ est un champ créateur pour a. De plus, on a

$$[T, \partial_z Y(a,z)] = \sum_{n\in\mathbb{Z}} [T, -nY^a_{n-1}]_{End_{\mathbb{C}}(V)} z^{-n-1} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-n)[T, Y^a_{n-1}]_{End_{\mathbb{C}}(V)} z^{-n-1} = \partial_z [T, Y(a,z)].$$

Par covariance par translations, on a alors

$$[T, \partial_z Y(a,z)] = \partial_z \left(\partial_z Y(a,z)\right).$$

Par unicité, on en déduit que $Y(Ta,z) = \partial_z Y(a,z)$. On a donc bien montré (92.4). □

Corollaire 93. *Soit $(V, Y, T, \mathbb{1})$ une algèbre vertex. On note pour tout $a \in V$, $Y^a \in End_{\mathbb{C}}(V)$ la suite associée à l'opérateur vertex $Y(a,z)$. On a*

$$T(Y^a_n b) = Y^{Ta}_n b + Y^a_n (Tb),$$

pour tout $a, b \in V$ et $n \in \mathbb{Z}$.

Démonstration. Par le point (92.4) de la proposition précédente, on a

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} Y^{Ta}_n z^{-n-1} = Y(Ta,z) = \partial_z Y(a,z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-n) Y^a_{n-1} z^{-n-1},$$

pour tout $a \in V$. En identifiant les coefficients, on a alors

$$Y^{Ta}_n = -nY^a_{n-1},$$

pour tout $a \in V$ et $n \in \mathbb{Z}$. De plus, par la Remarque 87, on a

$$[T, Y^a_n]_{End_{\mathbb{C}}(V)} = -nY^a_{n-1} = Y^{Ta}_n,$$

pour tout $a \in V$ et $n \in \mathbb{Z}$. En particuler, on a donc

$$Y^{Ta}_n b = [T, Y^a_n]_{End_{\mathbb{C}}(V)} b = T(Y^a_n b) - Y^a_n (Tb),$$

pour tout $a, b \in V$ et $n \in \mathbb{Z}$. On a donc bien le résultat voulu. □

Remarque 94. On considère $(V, Y, T, \mathbb{1})$ une algèbre vertex. On note pour tout $a \in V$, $Y^a \in End_{\mathbb{C}}(V)$ la suite associée à l'opérateur vertex $Y(a,z)$. Par le point (92.3) de la Proposition 92, on remarque qu'on peut remplacer pour tout $n \in \mathbb{Z}$, le n^{e} produit résiduel $(Y^a *_n Y^b)(z)$ par $Y(Y^a_n b)$ dans les résultats montrés dans les parties précédentes pour tout $a, b \in V$. Ainsi, les points (50.2) et (50.3) du Théorème 50 qui donne des énoncés équivalents à la condition de localité peuvent être reformulés par

$$[Y_m^a, Y(b,z)] = \sum_{i\geq 0} \binom{m}{i} Y(Y_i^a b, z) z^{m-i} \qquad \text{et} \qquad [Y_m^a, Y_n^b]_{End_{\mathbb{C}}(V)} = \sum_{i\geq 0} \binom{m}{i} Y_{m+n-i}^{Y_i^a b},$$

pour tout $a, b \in V$ et $n, m \in \mathbb{Z}$. Ces formules sont appelées les *formules du commutateurs.* De plus, on a

$$Y_m^{Y_n^a b} = C_{0,m}^n(Y^a, Y^b) = \sum_{i\geq 0} (-1)^i \binom{n}{i} \left(Y_{n-i}^a Y_{m+i}^b - (-1)^n Y_{m+n-i}^b Y_i^a \right),$$

pour tout $a, b \in V$ et $m, n \in \mathbb{Z}$. Cette formule s'appelle la *formule d'association.* De plus, l'identité de Borcherds-Frenkel-Lepowsky-Meurman peut être reformulée par

$$\sum_{i\geq 0} Y_{l+m-i}^{Y_{n+i}^a b} = \sum_{i\geq 0} (-1)^i \binom{n}{i} \left(Y_{l+n-i}^a Y_{m+i}^b - (-1)^n Y_{m+n-i}^b Y_{l+i}^a \right),$$

pour tout $a, b \in V$ et $l, m, n \in \mathbb{Z}$. Les identités équivalentes à l'identité de Borcherds-Frenkel-Lepowsky-Meurman peuvent être reformulées par

- $\displaystyle\sum_{i\geq 0} y^{-i-1} \delta^{(i)}(xy^{-1}) Y(Y_{n+i}^a b, y) = (x-y)^n Y(a,x) Y(b,y) - (-y+x)^n Y(b,y) Y(a,x) = C^n(Y(a,x), Y(b,y)),$

- $\displaystyle z^{-1}\delta\left(\frac{x-y}{z}\right) Y(a,x)Y(b,y) - z^{-1}\delta\left(\frac{-y+x}{z}\right) Y(b,y)Y(a,x) = y^{-1}\delta\left(\frac{x-z}{y}\right) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} Y(Y_m^a b, y) z^{-m-1},$

pour tout $a, b \in V$ et $n \in \mathbb{Z}$.

Remarque 95. La 2e formule du commutateur et la formule d'association sont des axiomes dans la formulation des algèbres vertex faite par Borcherds [1]. De plus, la 2e identité reformulée qui est équivalente à l'identité de Borcherds-Frenkel-Lepowsky-Meurman a été nommée l'*identité de Jacobi* par Frenkel, Lepowsky et Meurman [3].

7.3 Translation et asymétrie

Proposition 96 (Formule de Baker-Campbell-Hausdorff)**.**

Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et $A, B \in End_{\mathbb{C}}(V)$. On a

$$e^A B e^{-A} = e^{ad_A} B,$$

où $ad_A(.) = [A, .]_{End_{\mathbb{C}}(V)}$.

Démonstration. On définit la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = e^{xA} B e^{-xA},$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. Il suffit de calculer $F(1)$ pour avoir le résultat. On remarque que F est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. On a

$$F'(x) = Ae^{xA}Be^{-xA} - e^{xA}Be^{-xA}A = AF(x) - F(x)A,$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. De plus, comme la fonction exponentielle est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, F l'est aussi et on peut alors l'écrire sous la forme

$$F(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{F_n}{n\,!} x^n,$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$ où $F_n \in End_{\mathbb{C}}(V)$ pour tout $n \geq 0$. Ainsi, en dérivant la série termes à termes, on a

$$F'(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{F_n}{(n-1)\,!} x^{n-1},$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. On en déduit donc que

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n\,!} [A, F_n]_{End_{\mathbb{C}}(V)} x^n = AF(x) - F(x)A = \sum_{n \geq 1} \frac{F_n}{(n-1)\,!} x^{n-1} = \sum_{n \geq 0} \frac{F_{n+1}}{n\,!} x^n,$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. En identifiant les coefficients, on a alors

$$F_{n+1} = [A, F_n]_{End_{\mathbb{C}}(V)} = ad_A(F_n) \qquad \text{et} \qquad F_0 = B,$$

pour tout $n \geq 0$. On définit par récurrence $(ad_A)^N$ pour $N \geq 2$ par

$$(ad_A)^N = ad_A \circ (ad_A)^{N-1}.$$

En particulier, on a $(ad_A)^0 = Id_V$ et $(ad_A)^1 = ad_A$. Ainsi, par récurrence on peut alors montrer que

$$F_n = (ad_A)^n(B),$$

pour tout $n \geq 0$. En évaluant F en $x = 1$, on obtient alors

$$e^A B e^{-A} = F(1) = \sum_{n \geq 0} \frac{(ad_A)^n}{n\,!} B = e^{ad_A} B.$$

$\square$

Lemme 97 (Symétrie par translations)**.**

Soit $(V, Y, T, \mathbb{1})$ *une algèbre vertex. On a*

$$e^{yT} Y(a, x) e^{-yT} = Y(a, x + y),$$

pour tout $a \in V$.

Démonstration. Si on note pour tout $a \in V$, $Y^a \in End_{\mathbb{C}}(V)^{\mathbb{Z}}$ la suite associée à $Y(a,z)$, on a

$$e^{yT}Y(a,x)e^{-yT} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{yT}Y_n^a e^{-yT}x^{-n-1},$$

pour tout $a \in V$. Or, par la formule de Baker-Campbell-Hausdorff, on a

$$e^{yT}Y_n^a e^{-yT} = e^{y ad_T}Y_n^a = \sum_{m\geq 0}\frac{1}{m!}(ad_T)^m(Y_n^a)y^m,$$

pour tout $a \in V$ et $n \in \mathbb{Z}$. Or, on remarque que

$$(ad_T)^m(Y_n^a) = (-n+m-1)\dots(-n)Y_{n-m}^a,$$

pour tout $a \in V$, $n \in \mathbb{Z}$ et $m \geq 0$. En effet, pour montrer cela, on raisonne par récurrence sur $m \geq 0$.

- Si $m = 0$ alors pour tout $a \in V$ et $n \in \mathbb{Z}$, $(ad_T)^0(Y_n^a) = Y_n^a$: on a donc bien le résultat pour $m = 0$.

- Soit $m \geq 0$ tel que le résultat soit vrai au rang m. On a

  $$(ad_T)^{m+1}(Y_n^a) = ad_T\left((ad_T)^m(Y_n^a)\right) = ad_T\left((-n+m-1)\dots(-n)Y_{n-m}^a\right),$$

  pour tout $a \in V$ et $n \in \mathbb{Z}$, par hypothèse de récurrence. On en déduit que

  $$(ad_T)^{m+1}(Y_n^a) = [T,(-n+m-1)\dots(-n)Y_{n-m}^a]_{End_{\mathbb{C}}(V)} = (-n+m-1)\dots(-n)[T,Y_{n-m}^a]_{End_{\mathbb{C}}(V)},$$

  pour tout $a \in V$ et $n \in \mathbb{Z}$. Or, par la Remarque 87, on a

  $$[T,Y_n^a]_{End_{\mathbb{C}}(V)} = -nY_{n-1}^a,$$

  pour tout $a \in V$ et $n \in \mathbb{Z}$. Ainsi, on a

  $$(ad_T)^{m+1}(Y_n^a) = (-n+m)\dots(-n)Y_{n-m-1}^a,$$

  pour tout $a \in V$ et $n \in \mathbb{Z}$.

On a donc bien pour tout $a \in V$, $n \in \mathbb{Z}$ et $m \geq 0$, $(ad_T)^m(Y_n^a) = (-n+m-1)\dots(-n)Y_{n-m}^a$. On a alors

$$e^{yT}Y_n^a e^{-yT} = \sum_{m\geq 0}\frac{1}{m!}(-n+m-1)\dots(-n)Y_{n-m}^a,$$

pour tout $a \in V$ et $n \in \mathbb{Z}$. On en déduit donc que

$$
\begin{aligned}
e^{yT}Y(a,x)e^{-yT} &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(\sum_{m\geq 0}\frac{1}{m!}(-n+m-1)\dots(-n)Y^a_{n-m}\right)x^{-n-1}\\
&= \sum_{m\geq 0}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{(-n+m-1)\dots(-n)}{m!}Y^a_{n-m}x^{-n-1}\right)y^m\\
&= \sum_{m\geq 0}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{(-n-1)\dots(-n-m)}{m!}Y^a_{n}x^{-n-m-1}\right)y^m\\
&= \sum_{m\geq 0}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\binom{-n-1}{m}Y^a_{n}x^{-n-1-m}\right)y^m,
\end{aligned}
$$

pour tout $a \in V$. D'après ($\triangle$), on a ainsi

$$e^{yT}Y(a,x)e^{-yT} = \sum_{m\geq 0}\partial_x^{(m)}Y(a,x)y^m = e^{y\partial_x}Y(a,x),$$

pour tout $a \in V$. Par le théorème de Taylor, on en conclut que pour tout $a \in V$, $e^{yT}Y(a,x)e^{-yT} = Y(a,x+y)$. $\square$

Lemme 98 (Asymétrie)**.**

Soit $(V,Y,T,\mathbb{1})$ *une algèbre vertex et* $a,b \in V$*. On a*

$$Y(a,z)b = e^{zT}Y(b,-z)a.$$

Démonstration. Si on note $N \geq 0$ l'ordre de localité de $Y(a,z)$ et $Y(b,z)$, on a $C^N(Y(a,z),Y(b,y)) = 0$. On a donc

$$(z-y)^N Y(a,z)Y(b,y) = (-y+z)^N Y(b,y)Y(a,z).$$

En particulier, on a alors

$$(z-y)^N Y(a,z)Y(b,y)\mathbb{1} = (-y+z)^N Y(b,y)Y(a,z)\mathbb{1}.$$

Par le point (92.2) de la Proposition 92, on a

$$(z-y)^N Y(a,z)e^{yT}b = (-y+z)^N Y(b,y)e^{zT}a.$$

De plus, par le lemme de symétrie par translations, on a

$$(z-y)^N Y(a,z)e^{yT}b = (-1)^N(y-z)^N e^{-zT}Y(b,y-z)a.$$

Si on note $Y^b \in End_{\mathbb{C}}^{\mathbb{Z}}$ la suite associée à $Y(b,z)$, par la propriété de troncature inférieure pour les champs créateurs mutuellement locaux, on a $Y^b_n a = 0$, pour tout $n \geq N$. On remarque alors que

$$x^N Y(b,x)a = \sum_{n\in\mathbb{Z}} Y_n^b a x^{-n-1+N} = \sum_{n<N} Y_n^b a x^{-n-1+N} = \sum_{n\geq 0} Y_{-n-1+N}^b a x^n.$$

On en déduit donc que $x^N Y(b,x)a$ ne contient que des puissances positives de x. Ainsi, $(y-z)^N Y(b,y-z)a$ ne contient que des puissances positives de $y-z$. Or, par la convention pour les paramètres formels, on a

$$(y-z)^k = \sum_{i\geq 0} \binom{k}{i} y^{k-i}(-z)^i = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} y^{k-i}(-z)^i,$$

pour tout $k \geq 0$. Donc, $(y-z)^N Y(b,y-z)a$ ne contient que des puissances positives de y : on peut donc évaluer cette quantité en $y=0$. On a alors

$$z^N Y(a,z)b = (-1)^N(-z)^N Y(b,-z)a = z^N Y(b,-z)a.$$

Ainsi, on obtient donc le résultat voulu en multipliant cette dernière égalité par z^{-N}. □

7.4 Exemples d'algèbre vertex

Après avoir défini ce qu'est une algèbre vertex, on va maintenant donner quelques exemples d'algèbre vertex. Avant cela, on va énoncer un théorème qui permet de construire une algèbre vertex à partir d'une famille de champs créateurs deux à deux mutuellement locaux [2].

Théorème 99 (Théorème du générateur)**.**

Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, $\mathbb{1}$, le vecteur de vide et $T \in End_{\mathbb{C}}(V)$. On considère J un ensemble et $\{\alpha^i(z) : i \in J\}$ un ensemble de champs créateurs deux à deux mutuellement locaux, associés aux suites $\alpha^i \in End_{\mathbb{C}}(V)^{\mathbb{Z}}$ respectivement, que l'on suppose covariant par translations pour T et qui engendre V i.e.

$$V = Vect_{\mathbb{C}}\left(\{\alpha_{n_1}^{i_1}\dots\alpha_{n_k}^{i_k}\mathbb{1} : n_1,\dots,n_k \in \mathbb{Z}, i_1,\dots,i_k \in J\}\right).$$

Il existe alors une unique algèbre vertex $(V,Y,T,\mathbb{1})$ telle que ses opérateurs vertex soient définis sur l'ensemble générateur par

$$Y(\alpha_{n_1}^{i_1}\dots\alpha_{n_k}^{i_k}\mathbb{1},z) = \left(\alpha^{i_1} *_{n_1}\left(\alpha^{i_2} *_{n_2}\left(\dots(\alpha^{i_k} *_{n_k} I)\right)\right)\right)(z),$$

soit une composition de k produits résiduels, où $I(z) = Y(\mathbb{1},z) = Id_V$.

Démonstration. On définit l'ensemble $\mathscr{F}$ par

$$\mathscr{F} = \{\left(\alpha^{i_1} *_{n_1}\left(\alpha^{i_2} *_{n_2}\left(\dots(\alpha^{i_k} *_{n_k} I)\right)\right)\right)(z) : n_1,\dots,n_k \in \mathbb{Z}, i_1,\dots,i_k \in J\}.$$

Par le lemme de Dong et le point (80.4) du Lemme 80, on sait que pour tout $i \in J$ et $n \in \mathbb{Z}$, $(\alpha^i *_n I)(z)$ est un champ créateur pour $\alpha^i_n \mathbb{1}$ qui est mutuellement local avec tous les $\alpha^l(z)$ pour tout $l \in J$. En utilisant cela un nombre fini de fois, on en déduit que pour tout $i_1, \dots, i_k \in J$ et $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{Z}$, $\left(\alpha^{i_1} *_{n_1} \left(\alpha^{i_2} *_{n_2} \left(\dots (\alpha^{i_k} *_{n_k} I)\right)\right)\right)(z)$ est un champ créateur pour $\alpha^{i_1}_{n_1} \dots \alpha^{i_k}_{n_k} \mathbb{1}$ qui est mutuellement local avec tous les $\alpha^l(z)$ pour tout $l \in J$. $\mathscr{F}$ est donc un ensemble de champs créateurs deux à deux mutuellement locaux. De plus, dans la démonstration du point (92.3) de la Proposition 92, on a vu que

$$[T, (\alpha^i *_n \alpha^j)(z)] = \partial_z (\alpha^i *_n \alpha^j)(z),$$

pour tout $i, j \in J$ et $n \in \mathbb{Z}$. On en déduit donc que $\mathscr{F}$ est covariant par translations pour T. Par le théorème d'unicité, $\mathscr{F}$ forme un ensemble d'opérateurs vertex, qui sont uniques, sur l'ensemble générateur. Par linéarité, on a ainsi construit un ensemble d'opérateurs vertex, qui sont uniques, sur V tout entier. □

Exemple 100 (Algèbre vertex de Heisenberg)**.**

On construit l'algèbre vertex d'Heisenberg à partir de l'algèbre de Heisenberg définie dans l'Exemple 57. On remarque tout d'abord que $End_{\mathbb{C}}(V)$ peut être vue comme une algèbre de Heisenberg car son centre est de dimension 1 : il s'agit de l'ensemble des homothéties. On considère donc ici $End_{\mathbb{C}}(V)$ comme une algèbre d'Heisenberg et on reprend les notations utilisées dans l'Exemple 57.

On définit l'espace vectoriel M_0 par

$$M_0 = Vect_{\mathbb{C}} \left(\{ h_{-n_1} \dots h_{-n_k} v_0 : n_1, \dots, n_k \geq 1 \} \right),$$

où $h_n v_0 = 0$ pour tout $n \geq 0$ et $c v_0 = v_0$. Par définition du commutateur, on a

$$h_m h_n - h_n h_m = m \delta^m_{-n} c \qquad \text{et} \qquad h_n c = c h_n, \tag{$\blacklozenge$}$$

pour tout $n, m \in \mathbb{Z}$. On considère $V = M_0$, $\mathbb{1} = v_0$ et $T = \sum_{n \geq 0} h_{-n-1} h_n \in End_{\mathbb{C}}(V)$. On remarque tout d'abord que T est bien défini. En effet, on va montrer par récurrence sur $k \geq 0$ que pour tout $n_1, \dots, n_k \geq 1$, $h_n h_{-n_1} \dots h_{-n_k} v_0 = 0$ pour n assez grand.

- Si k=0 alors pour tout $n \geq 0$, $h_n v_0 = 0$: on a donc bien le résultat pour $k = 0$.

- Soit $k \geq 0$ tel que le résultat soit vrai au rang k et $n_1, \dots, n_{k+1} \geq 1$. On a

$$\begin{aligned} h_n h_{-n_1} \dots h_{-n_{k+1}} v_0 &= \left(h_{-n_1} h_n + n \delta^n_{n_1} c \right) h_{-n_2} \dots h_{-n_{k+1}} v_0 \\ &= h_{-n_1} h_n h_{-n_2} \dots h_{-n_{k+1}} v_0 + n \delta^n_{n_1} c h_{-n_2} \dots h_{-n_{k+1}} v_0 \\ &= 0, \end{aligned}$$

  pour n assez grand, en utilisant ($\blacklozenge$) pour la première égalité et l'hypothèse de récurrence pour la dernière égalité.

On en déduit que pour tout $h_{-n_1} \dots h_{-n_k} v_0 \in V$, $T h_{-n_1} \dots h_{-n_k} v_0$ est une série finie. Par linéarité, on a pour tout $v \in V$, Tv est une série finie, ce qui justifie le fait que T soit bien défini.

De plus, par ce qui précède, on remarque que $h(z)$ est un champ. Comme pour tout $n \geq 0$, $h_n v_0 = 0$, on sait plus précisément que $h(z)$ est un champ créateur pour $h = h_{-1}v_0$. Par ailleurs, on a vu dans l'Exemple 57 que $h(z)$ est local. En outre, on a

$$\begin{aligned}
[T, h_m]_{End_{\mathbb{C}}(V)} &= \sum_{n\geq 0} [h_{-n-1}h_n, h_m]_{End_{\mathbb{C}}(V)} \\
&= \sum_{n\geq 0} (h_{-n-1}h_n h_m - h_m h_{-n-1}h_n) \\
&= \sum_{n\geq 0} \left[h_{-n-1}h_n h_m - \left(h_{-n-1}h_m + m\delta^m_{n+1}c\right) h_n\right],
\end{aligned}$$

pour tout $m \in \mathbb{Z}$, d'après ($\blacklozenge$). Ainsi, on a

$$\begin{aligned}
[T, h_m]_{End_{\mathbb{C}}(V)} &= \sum_{n\geq 0} \left(h_{-n-1}[h_n, h_m]_{End_{\mathbb{C}}(V)} - m\delta^{n+1}_m c h_n\right) \\
&= \sum_{n\geq 0} \left(h_{-n-1}(n\delta^n_{-m}c) - m\delta^{n+1}_m c h_n\right) \\
&= \sum_{n\geq 0} \left(n\delta^m_{-n}h_{-n-1}c - m\delta^{n+1}_m c h_n\right)
\end{aligned}$$

pour tout $m \in \mathbb{Z}$. Or, on remarque que

$$[T, h_m]_{End_{\mathbb{C}}(V)} = -mh_{m-1},$$

pour tout $m \in \mathbb{Z}$. En effet, pour montrer cela, on fixe $m \in \mathbb{Z}$ et on va différencier trois cas selon les valeurs de m.

- Si $m > 0$, alors $\delta^n_{-m} = 0$ pour tout $n \geq 0$ car $-m < 0$. On a alors

$$\begin{aligned}
[T, h_m]_{End_{\mathbb{C}}(V)} h_{-n_1} \dots h_{-n_k} v_0 &= -mch_{m-1}h_{-n_1} \dots h_{-n_k} v_0 \\
&= -mh_{m-1}h_{-n_1} \dots h_{-n_k} c v_0 && \text{d'après } (\blacklozenge) \\
&= -mh_{m-1}h_{-n_1} \dots h_{-n_k} v_0 && \text{car } cv_0 = v_0,
\end{aligned}$$

  pour tout $h_{-n_1} \dots h_{-n_k} v_0 \in V$. Par linéarité, on en déduit que $[T, h_m]_{End_{\mathbb{C}}(V)} = -mh_{m-1}$.

- Si $m = 0$ alors $\delta^{n+1}_m = 0$ pour tout $n \geq 0$ car $n + 1 \geq 1$. On a alors $[T, h_m]_{End_{\mathbb{C}}(V)} = 0 = -mh_{m-1}$.

- Si $m < 0$ alors $\delta^{n+1}_m = 0$ pour tout $n \geq 0$ car $n + 1 \geq 1$. On a alors

$$[T, h_m]_{End_{\mathbb{C}}(V)} h_{-n_1} \dots h_{-n_k} v_0 = -mh_{m-1}ch_{-n_1} \dots h_{-n_k} v_0 = -mh_{m-1}h_{-n_1} \dots h_{-n_k} v_0,$$

  pour tout $h_{-n_1} \dots h_{-n_k} v_0 \in V$, en raisonnant de même que dans le cas $m > 0$. Par linéarité, on en déduit que $[T, h_m]_{End_{\mathbb{C}}(V)} = -mh_{m-1}$.

On a ainsi bien montré dans les trois cas que $[T, h_m]_{End_{\mathbb{C}}(V)} = -mh_{m-1}$. Si on considère l'ensemble $\{h(z)\}$ qui contient un champ créateur local, par ce qui précède on en déduit que $\{h(z)\}$ est covariant par translations pour T. Par le théorème du générateur, on en conclut que cet ensemble induit une unique algèbre vertex $(V, Y, T, \mathbb{1})$ définie sur l'espace générateur par

$$Y(h_{-n_1} \dots h_{-n_k} v_0, z) = (h *_{-n_1} (h *_{-n_2} (\dots (h *_{-n_k} I)))) (z),$$

où $n_1, \dots, n_k \geq 1$ et $I(z) = Y(v_0, z) = Id_V$. Cette algèbre vertex s'appelle l'*algèbre vertex de Heisenberg*. Or, d'après le lemme 70, on sait que pour tout $n \geq 1$, $(h *_{-n} I)(z) = :\left(\partial_z^{(n-1)} h(z)\right) I(z):$. Ainsi, on en déduit que

$$Y(h_{-n_1} \dots h_{-n_k} v_0, z) = :\partial_z^{(n_1-1)} h(z) \left(:\partial_z^{(n_2-1)} h(z) \left(\dots :(\partial_z^{(n_k-1)} h(z)) I(z):\right) :\right) :,$$

où $n_1, \dots, n_k \geq 1$.

Exemple 101 (Algèbre vertex de Virasoro)**.**

On construit l'algèbre vertex de Virasoro à partir de l'algèbre de Virasoro définie dans l'Exemple 59. On remarque que $End_{\mathbb{C}}(V)$ peut être vue comme une algèbre de Virasoro car son centre est de dimension 1. On considère donc ici $End_{\mathbb{C}}(V)$ comme une algèbre de Virasoro et on reprend les notations utlisées dans l'Exemple 59.

On définit l'espace vectoriel $M_{C,0}$ par

$$M_{C,0} = Vect_{\mathbb{C}} \left(\{L_{-n_1} \dots L_{-n_k} v_0 : n_1, \dots, n_k \geq 1\}\right),$$

où $L_n v_0 = 0$ pour tout $n \geq 0$ et $cv_0 = Cv_0$. Par définition du commutateur, on a

$$L_m L_n - L_n L_m = (m-n) L_{m+n} + \frac{1}{2} \binom{m+1}{3} \delta_0^{m+n} c \qquad \text{et} \qquad L_n c = c L_n, \tag{$\blacksquare$}$$

pour tout $m, n \in \mathbb{Z}$. On remarque tout d'abord que $w(z)$ est un champ. En effet, on va commencer par montrer par récurrence sur $k \geq 0$ que pour tout $n_1, \dots, n_k \geq 1$, $L_n L_{-n_1} \dots L_{-n_k} v_0 = 0$ pour n assez grand.

- Si $k = 0$ alors pour tout $n \geq 0$, $L_n v_0 = 0$: on a donc bien le résultat pour $k = 0$.

- Soit $k \geq 0$ tel que le résultat soit vrai au rang k et $n_1, \dots, n_{k+1} \geq 1$. On a

$$\begin{aligned} L_n L_{-n_1} \dots L_{-n_{k+1}} v_0 &= \left(L_{-n_1} L_n + (n+n_1) L_{n-n_1} + \frac{1}{2} \binom{n+1}{3} \delta_0^{n-n_1} c\right) \dots L_{-n_{k+1}} v_0 \\ &= L_{-n_1} L_n L_{-n_2} \dots L_{-n_{k+1}} v_0 + (n+n_1) L_{n-n_1} L_{-n_2} \dots L_{-n_{k+1}} v_0 \\ &\quad + \frac{1}{2} \binom{n+1}{3} \delta_n^{n_1} c L_{-n_2} \dots L_{-n_{k+1}} v_0 \\ &= 0, \end{aligned}$$

  pour n assez grand, en utilisant ($\blacksquare$) pour la première égalité et l'hypothèse de récurrence pour la dernière égalité.

En particulier, on a pour tout $L_{-n_1}\dots L_{-n_k}v_0 \in M_{C,0}$, $L_{n-1}L_{-n_1}\dots L_{-n_k}v_0 = 0$ pour n assez grand. Par linéarité, on en déduit que $w(z)$ est bien un champ. De plus, on a

$$w(z)v_0 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} L_{n-1}v_0 z^{-n-1} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} L_n v_0 z^{-n-2} = \sum_{n\leq -1} L_n v_0 z^{-n-2} = \sum_{n\geq 1} L_{-n}v_0 z^{n-2},$$

en utilisant le fait que pour tout $n \geq 0$, $L_n v_0 = 0$ pour l'avant dernière égalité. On a alors

$$w(z)v_0 = z^{-1}L_{-1}v_0 + L_{-2}v_0 + O(z).$$

On remarque que qu'a priori $w(z)$ n'est pas un champ créateur : pour cela, il suffit d'annuler $L_{-1}v_0$. On considère alors le sous-espace $M_{C,1}$ de $M_{C,0}$ défini par

$$M_{C_1} = Vect_{\mathbb{C}}\left(\{L_{-n_1}\dots L_{-n_k}L_{-1}v_0 : n_1,\dots,n_k \geq 1\}\right).$$

On considère maintenant $V = M_{C,0}/M_{C,1}$ un espace vectoriel quotient, $\mathbb{1} = v_0$ et $T = L_{-1}$. Par la suite, par abus de notations, on identifie les états, opérateurs et champs associés à $M_{C,0}$ aux états, opérateurs et champs correspondants dans V. Par définition de V, on en déduit que $w(z)$ est un champ créateur pour $w = L_{-2}v_0$. De plus, dans l'exemple 59, on a vu que $w(z)$ est un champ local. Par ailleurs, on a

$$[T, w_m]_{End_{\mathbb{C}}(V)} = [L_{-1}, L_{m-1}]_{End_{\mathbb{C}}(V)} = (-1-m+1)L_{-1+m-1} + \frac{1}{2}\binom{-1+1}{3}\delta^0_{-1+m-1}c = -mL_{m-2} = -mw_{m-1},$$

pour tout $m \in \mathbb{Z}$. Si on considère l'ensemble $\{w(z)\}$ qui contient un champ créateur local, par ce qui précède on en déduit que $\{w(z)\}$ est covariant par translations pour T. Par le théorème du générateur, on en conclut que cet ensemble induit une unique algèbre vertex $(V, Y, T, \mathbb{1})$ définie sur l'espace générateur par

$$Y(L_{-n_1}\dots L_{-n_k}v_0, z) = \left(w *_{-n_1+1}\left(w *_{-n_2+1}\left(\dots\left(w *_{-n_k+1} I\right)\right)\right)\right)(z),$$

où $n_1,\dots,n_k \geq 1$, $I(z) = Y(v_0, z) = Id_V$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $w_n = L_{n-1}$. Cet algèbre vertex s'appelle l'*algèbre vertex de Virasoro*. Par un raisonnement similaire à celui de l'exemple précédent, on a aussi

$$Y(L_{-n_1}\dots L_{-n_k}v_0, z) = {:}\partial_z^{(n_1)}w(z)\left({:}\partial_z^{(n_2)}w(z)\left(\dots{:}(\partial_z^{(n_k)}w(z))I(z){:}\right){:}\right){:}.$$

Références

[1] Richard E. Borcherds, *Vertex algebras, Kac-Moody algebras, and the Monster*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **83** (1986), no. 10, 3068–3071, DOI 10.1073/pnas.83.10.3068. MR843307 ↑

[2] Edward Frenkel, Victor Kac, Andrey Radul, and Weiqiang Wang, $\mathcal{W}_{1+\infty}$ *and* $\mathcal{W}(\mathfrak{gl}_N)$ *with central charge* N, Comm. Math. Phys. **170** (1995), no. 2, 337–357. MR1334399 ↑

[3] Igor Frenkel, James Lepowsky, and Arne Meurman, *Vertex operator algebras and the Monster*, Pure and Applied Mathematics, vol. 134, Academic Press, Inc., Boston, MA, 1988. MR996026 ↑

[4] Victor Kac, *Vertex algebras for beginners*, 2nd ed., University Lecture Series, vol. 10, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998. MR1651389 ↑

[5] Hai-Sheng Li, *Local systems of vertex operators, vertex superalgebras and modules*, J. Pure Appl. Algebra **109** (1996), no. 2, 143–195, DOI 10.1016/0022-4049(95)00079-8. MR1387738 ↑

[6] I. S. Newton, *Philosophiae naturalis principia mathematica*, William Dawson & Sons, Ltd., London, undated (Latin). MR0053865 ↑

[7] Michael Tuite, *Vertex algebras according to Isaac Newton*, J. Phys. A **50** (2017), no. 41, 413001, 21, DOI 10.1088/1751-8121/aa8534. MR3708101 ↑

Index