Institut Joseph Fourier

Université Grenoble Alpes

Projet de fin d'études du magistère

Théorème de Serre-Swan sur les variétés lisses

Auteure
Habibatou DIALLO

Enseignant encadrant
Estanislao HERSCOVICH

Janvier 2021

Table des matières

1 Introduction

Le théorème de Serre-Swan relie la notion géométrique de fibrés vectoriels à la notion algébrique de modules projectifs de type fini. Il doit son nom au mathématicien français Jean-Pierre Serre qui énonça une première version en 1955. En 1962, Richard Swan proposa ensuite une variante donnant une approche plus topologique.

Ses applications sont nombreuses, comme par exemple en K-théorie. Il permet d'appliquer l'algèbre à la géométrie et inversement.

Dans ce mémoire, nous étudierons dans un premier temps les algèbres lisses de fonctions. Suite à cela nous nous intéresserons aux fibrés vectoriels sur une variété lisse et à leur modules de sections pour finalement arriver au théorème de Serre-Swan.

2 Étude algébrique

2.1 Premières définitions

Définition 2.1 ($\mathbb{K}$-Algèbre)**.** Une $\mathbb{K}$**-Algèbre** $\mathcal{F}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une application $\mathbb{K}$-bilinéaire $\cdot : \mathcal{F}\times\mathcal{F} \to \mathcal{F}$. Si la loi $\cdot$ est commutative ou admet un élément neutre, l'algèbre est dite respectivement commutative ou unitaire.

Dans toute la suite, toutes les algèbres que nous considèrerons seront commutatives et unitaires.

Définition 2.2 (Morphisme d'algèbres)**.** Etant données deux $\mathbb{K}$-algèbres $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$, un **morphisme d'algèbres** est une application $\mathbb{K}$-linéaire $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ telle que pour tous u, v dans $\mathcal{F}$,

- $\varphi(u \cdot v) = \varphi(u) \cdot \varphi(v)$,
- $\varphi(1_A) = \varphi(1_B)$ (dans le cas d'une algèbre unitaire).

$\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ sont dites **isomorphes** s'il existe un morphisme d'algèbres bijectif de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}'$.

Définition 2.3 (Dual (ou spectre réel))**.** On considère une $\mathbb{R}$-algèbre $\mathcal{F}$ et on définit son ensemble **dual (spectre réel)**,

$$|\mathcal{F}| = \{x : \mathcal{F} \to \mathbb{R},\ \text{morphisme de } \mathbb{R}\text{-algèbres}\}$$

.

Remarque 2.1. Si $x \in |\mathcal{F}|$, alors x est surjectif. En effet pour tout réel λ, $x(\lambda 1_{\mathcal{F}}) = \lambda x(1_{\mathcal{F}}) = \lambda$.

Exemple 2.1. $M(X, \mathbb{R})$ où X est un ensemble, représente l'algèbre des fonctions de X dans $\mathbb{R}$. De plus

$$\begin{array}{rccc} i: & X & \longrightarrow & |M(X,\mathbb{R})| \\ & x & \longmapsto & \mathrm{ev}_x : f \to f(x) \end{array}$$

est une application injective.

Exemple 2.2. Considérons le $\mathbb{R}$-espace vectoriel usuel $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$. On le munit de la multiplication $*$ donnée par $(x_1, y_1) * (x_2, y_2) = (x_1x_2, y_1y_2)$ et on obtient la $\mathbb{R}$-algèbre $\mathcal{F} = (\mathbb{R}^2, +, \cdot, *)$ de neutre $(1, 1)$. Les projections canoniques π_1 et π_2, respectivement sur la première et la deuxième coordonnée, appartiennent à $|\mathcal{F}|$. On affirme que $|\mathcal{F}|$ ne contient pas d'autres morphismes. En effet, soient $\phi : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$, un morphisme de $\mathbb{R}$-algèbres et $(x, y) \in \mathcal{F}$. On a

$$\phi(x, y) = \phi((x, 0) + (0, y)) = \phi(x, 0) + \phi(0, y) = x\phi(1, 0) + y\phi(0, 1).$$

Donc ϕ est entièrement déterminé par les valeurs de $\phi(1, 0)$ et $\phi(0, 1)$.
De plus,

$$\phi(1, 0)\phi(0, 1) = \phi((1, 0) * (0, 1)) = \phi(0, 0) = 0.$$

Ainsi ϕ s'annule en $(1, 0)$ ou en $(0, 1)$. Supposons que $\phi(0, 1) = 0$. On a alors,

$$1 = \phi(1, 1) = \phi(1, 0) + \phi(0, 1) = \phi(1, 0),$$

en d'autre termes, $\phi = \pi_1$. De même si $\phi(1, 0) = 0$ alors $\phi(0, 1) = 1$ et dans ce cas $\phi = \pi_2$.

2.2 Algèbres géométriques

Définition 2.4 (Algèbre géométrique)**.** Une $\mathbb{R}$-algèbre est dite **géométrique** si $\mathcal{I}(\mathcal{F}) = \bigcap_{x\in|\mathcal{F}|} \mathrm{Ker}(x) = 0$.

Proposition 2.1. *Soit X un ensemble quelconque. Si $\mathcal{F} \subseteq M(X,\mathbb{R})$ est une sous-algèbre, alors $\mathcal{F}$ est géométrique.*

Preuve. Soit $x \in X$, on considère

$$\begin{array}{rcccc} \mathrm{ev}_x & : & \mathcal{F} & \to & \mathbb{R} \\ & & f & \mapsto & f(x). \end{array}$$

On peut vérifier sans difficultés que ev_x appartient à $|\mathcal{F}|$. Maintenant si $f \in \mathcal{I}(\mathcal{F})$, alors en particulier, pour tout x dans X, $f \in \mathrm{Ker}(\mathrm{ev}_x)$ ce qui équivaut à $f(x) = 0$. Donc f est la fonction nulle. □

Corollaire 2.1. *Les algèbres $C^\infty(U)$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, et $\mathbb{R}[x_1,\ldots,x_n]$, $n \geq 1$ sont géométriques.*

Preuve. La preuve est une application directe de la proposition précédente. Dans le cas de l'algèbre des polynômes, on considère les polynômes comme des fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. □

Désormais on se place dans le cas où $\mathcal{F}$ est une algèbre géométrique. On aimerait pouvoir identifier les éléments de $\mathcal{F}$ comme des fonctions allant de $|\mathcal{F}|$ dans $\mathbb{R}$. Pour cela considérons le morphisme

$$\begin{array}{rcccc} \tau & : & \mathcal{F} & \longrightarrow & M(|\mathcal{F}|,\mathbb{R}) \\ & & f & \longmapsto & (x \mapsto x(f)), \end{array}$$

où $M(|\mathcal{F}|,\mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions de $|\mathcal{F}|$ dans $\mathbb{R}$.

Lemme 1. *$\mathcal{F}$ est géométrique si et seulement si τ est injectif.*

Preuve. On voit bien que $\ker(\tau) = \mathcal{I}(\mathcal{F})$. En effet

$$\begin{aligned} f \in \ker(\tau) &\iff \tau(f) = 0 \\ &\iff \forall x \in |\mathcal{F}|,\ \ \tau(f)(x) = x(f) = 0 \\ &\iff f \in \bigcap_{x\in|\mathcal{F}|} \ker(x) = \mathcal{I}(\mathcal{F}). \end{aligned}$$

Ainsi, $\ker(\tau) = 0$ si et seulement si $\mathcal{I}(\mathcal{F}) = 0$. □

Ce lemme nous conduit au théorème central de cette partie.

Théorème 2.1. *Toute algèbre géométrique $\mathcal{F}$ est isomorphe à une sous-algèbre de $M(|\mathcal{F}|,\mathbb{R})$.*

Preuve. Par le lemme 1, τ est injectif donc $\mathcal{F}$ est isomorphe à $\mathrm{Im}(\tau)$. □

Désormais tout élément f dans $\mathcal{F}$ peut être considéré comme une fonction allant de $|\mathcal{F}|$ dans $\mathbb{R}$ avec l'identification $f(x) = \tau(f)(x) = x(f)$, pour tout x dans $|\mathcal{F}|$.

Dans toute la suite nous nous placerons dans le cas d'algèbres géométriques.

Étant donnée une algèbre géométrique $\mathcal{F}$, on va tout d'abord commencer par munir $|\mathcal{F}|$ d'une topologie.

Définition 2.5. On munit $|\mathcal{F}|$ de la topologie engendrée par la base d'ouverts de la forme $f^{-1}(V)$, où V est un ouvert de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{F}$. Autrement dit, la topologie de l'espace dual $|\mathcal{F}|$ est la plus petite qui rende les fonctions dans $\mathcal{F}$ continues.

Remarque 2.2. L'ensemble des ouverts de la forme $f^{-1}(V)$, où V est un ouvert de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{F}$ définit bien une base.

Proposition 2.2. *Muni de la topologie introduite précédemment, $|\mathcal{F}|$ est un espace de Hausdorff (ou espace séparé).*

Preuve. Si x et y sont deux éléments distincts dans $|\mathcal{F}|$, alors il existe $f \in \mathcal{F}$ tel que $x(f) \neq y(f)$. Cela équivaut à $f(x) \neq f(y)$ et disons $f(x) < f(y)$. Alors les ensembles $f^{-1}\left(\left]-\infty, \frac{f(x)+f(y)}{2}\right[\right)$ et $f^{-1}\left(\left]\frac{f(x)+f(y)}{2}, +\infty\right[\right)$ sont respectivement des voisinages de x et y qui ne s'intersectent pas. □

Proposition 2.3. *Si $\mathcal{F}$ est une $\mathbb{R}$-algèbre composée de fonctions continues sur espace topologique A, alors l'application*

$$\begin{array}{rccc} \varphi & : & A & \longrightarrow & |\mathcal{F}| \\ & & a & \longmapsto & (f \mapsto f(a)), \end{array}$$

est continue.

Preuve. Prenons un ouvert de la base topologique de $|\mathcal{F}|$ de la forme $f^{-1}(V)$. On a

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(f^{-1}(V)) &= \{a \in A \ ; \ \varphi(a) \in f^{-1}(V)\} \\ &= \{a \in A \ ; \ \underbrace{\varphi(a)(f)}_{=f(a)} \in V\} \\ &= f^{-1}(V), \text{ ouvert dans } A. \end{aligned}$$

□

Exemple 2.3. Muni de la topologie introduite précédemment, $|\mathbb{R}[x]|$ est homéomorphe à $\mathbb{R}$. Pour montrer cela, considérons l'application

$$\begin{array}{rccc} \theta & : & \mathbb{R} & \rightarrow & |\mathbb{R}[x]| \\ & & \lambda & \mapsto & \mathrm{ev}_\lambda, \end{array}$$

où ev_λ est le morphisme d'évaluation en λ et montrons qu'il s'agit d'un homéomorphisme. Pour prouver l'injectivité, il suffit de considérer deux morphismes d'évaluation égaux ev_{λ_1} et ev_{λ_2} que l'on applique au polynôme $Q = x$ et on obtient l'égalité $\lambda_1 = \lambda_2$. Maintenant, soit $y : \mathbb{R}[x] \mapsto \mathbb{R}$ un morphisme d'algèbres et $P = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ un polynôme dans $\mathbb{R}[x]$. On a $y(P) = y(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k) = \sum_{k=0}^{n} y(a_k x^k) = \sum_{k=0}^{n} a_k y(x)^k$. Ainsi y est entièrement déterminé par sa valeur en x et $y = \mathrm{ev}_{y(x)}$, d'où la surjectivité.

On s'intéresse désormais à la continuité de θ. Rappelons que par le corollaire 2.1, on sait que $\mathbb{R}[x]$ est géométrique donc on peut identifier les polynômes de $\mathbb{R}[x]$ comme des fonctions allant de $|\mathbb{R}[x]|$ dans $\mathbb{R}$, avec $P(y) = y(P)$, pour tout P dans $\mathbb{R}[x]$ et tout y dans $|\mathbb{R}[x]|$. Ainsi, prenons un ouvert V de $\mathbb{R}$ et un polynôme P et montrons que $\theta^{-1}(P^{-1}(V))$ est un ouvert de $\mathbb{R}$. Pour cela considérons l'application continue

$$\begin{array}{rccc} \widetilde{P} : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & \lambda & \mapsto & \mathrm{ev}_\lambda(P). \end{array}$$

On a

$$\begin{aligned} \theta^{-1}(P^{-1}(V)) &= \{\lambda \in \mathbb{R} \ : \ \underbrace{\theta(\lambda)}_{=\mathrm{ev}_\lambda} \in P^{-1}(V)\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{R} \ : \ P(\mathrm{ev}_\lambda) \in V\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{R} \ : \ \underbrace{\mathrm{ev}_\lambda(P)}_{=\widetilde{P}(\lambda)} \in V\} \\ &= \widetilde{P}^{-1}(V), \text{ ouvert dans } \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Maintenant, considérons le polynôme $Q = x$ et posons

$$\begin{array}{rccc} \psi : & |\mathbb{R}[x]| & \to & \mathbb{R} \\ & y & \mapsto & y(Q) = y(x). \end{array}$$

On peut montrer sans difficultés que ψ est la bijection inverse de θ.
Soit $]a;b[$, un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Comme précédemment, on a

$$\begin{aligned} \psi^{-1}(]a;b[) &= \{y \in |\mathbb{R}[x]| \ : \ y(Q) \in]a;b[\} \\ &= \{y \in |\mathbb{R}[x]| \ : \ Q(y) \in]a;b[\} \\ &= Q^{-1}(]a;b[), \text{ ouvert dans } |\mathbb{R}[x]|. \end{aligned}$$

On a donc bien montré que θ est un homéomorphisme, ce qui termine la preuve.

De façon plus générale, on montre que $|\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]| = \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$.

Proposition 2.4. *Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert non vide. L'espace dual $|C^\infty(U)|$, est homéomorphe à U.*

Preuve. Considérons l'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & U & \longrightarrow & |C^\infty(U)| \\ & x & \longmapsto & (f \mapsto f(x)), \end{array}$$

et montrons qu'il s'agit d'un homéomorphisme. Cette application est bien définie et on peut montrer sans difficultés qu'elle est injective. Désormais supposons qu'elle n'est pas surjective, *i.e.* il existe un morphisme $y \in C^\infty(U)$ tel que pour tout point $a \in U$, il existe une fonction $f_a \in C^\infty(U)$ telle que $f_a(a) \neq y(f_a)$.

Considérons une fonction f_0 dans $C^\infty(U)$ telle que ses surfaces de niveaux sont toutes compactes (une telle fonction existe toujours, voir Proposition 2.7 dans [1], page 16). En particulier l'ensemble $L = f_0^{-1}(\{y(f_0)\})$ est compact. Les ensembles U_a pour $a \in U$, tels que

$$U_a = \{x \in U \mid f_a(x) \neq y(f_a)\},$$

constituent un recouvrement d'ouverts non vides de L. Puisque L est compact, on peut en extraire un sous-recouvrement fini $U_{a_1} \dots U_{a_m}$. Maintenant considérons la fonction

$$g = (f_0 - y(f_0))^2 + \textstyle\sum_{i=1}^m (f_{a_i} - y(f_{a_i}))^2.$$

C'est une fonction lisse qui ne s'annule pas sur U. En effet si $x \in L$, alors $\sum_{i=1}^m (f_{a_i}(x) - y(f_{a_i}))^2 \neq 0$ et sinon $(f_0(x) - y(f_0))^2 \neq 0$. Donc $1/g \in C^\infty(U)$. De plus, sachant que y est un morphisme d'algèbres, on a

$$1 = y(1) = y(g \cdot (1/g)) = y(g) \cdot y(1/g).$$

Mais par définition de g,

$$y(g) = (y(f_0) - y(f_0))^2 + \textstyle\sum_{i=1}^m (y(f_{a_i}) - y(f_{a_i}))^2 = 0,$$

ce qui entre en contradiction. En application la proposition 2.3 on obtient la continuité de φ. Il nous faut désormais montrer que φ est une application ouverte. Nous allons utiliser le résultat suivant (pour la preuve voir [1], page 14-15).

Proposition 2.5. *Pour tout ouvert $V \subseteq \mathbb{R}^n$, il existe une fonction $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que*

$$\begin{cases} f(x) > 0 & \text{si } x \in V, \\ f(x) = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Prenons donc un ouvert $V \subset U$ et soit f une telle fonction. Donc $V = f^{-1}(]0; +\infty[)$, mais en considérant la fonction de $|C^\infty(U)|$ dans $\mathbb{R}$, donnée par $f \circ \varphi^{-1}$ alors par définition

$$(f \circ \varphi^{-1})^{-1}(]0; +\infty[) = \{y \in |C^\infty(U)| \ : \ y(f) > 0\}$$

est un ouvert de $|C^\infty(U)|$. On obtient

$$(f \circ \varphi^{-1})^{-1}(]0; +\infty[) = \{\varphi(x) \ : \ \underbrace{(\varphi(x))(f)}_{=f(x)} > 0\} = \{\varphi(x) \ : \ x \in V\} = \varphi(V).$$

On a donc bien montrer que φ est ouverte, ce qui termine la preuve. $\square$

Définition 2.6. Étant donnés deux algèbres géométriques $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ et un morphisme de $\mathbb{R}$-algèbres $\varphi : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$, on appelle l'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi^* & : & |\mathcal{F}_2| & \to & |\mathcal{F}_1| \\ & & x & \mapsto & x \circ \varphi, \end{array}$$

le **morphisme dual** de φ.

Proposition 2.6. *Soit φ un morphisme de $\mathbb{R}$-algèbres. Le morphisme dual φ^* est continu.*

Preuve. Considérons un ouvert $U = f^{-1}(V)$ de la base de $|\mathcal{F}_1|$, avec $f \in \mathcal{F}_1$ et $V \subset \mathbb{R}$ un ouvert. Pour tout point $x \in |\mathcal{F}_2|$, on a

$$f(\varphi^*(x)) = f(x \circ \varphi) = (x \circ \varphi)(f) = x(\varphi(f)) = \varphi(f)(x).$$

En particulier on a $(\varphi^*)^{-1}(U) = (\varphi(f))^{-1}(V)$, qui est un ouvert de $|\mathcal{F}_2|$. □

Corollaire 2.2. *Si φ est un isomorphisme de $\mathbb{R}$-algèbres, alors φ^* est un homéomorphisme.*

2.3 Algèbres complètes

Définition 2.7. Soient $\mathcal{F}$ une $\mathbb{R}$-algèbre géométrique $\mathcal{F}$ et un ensemble quelconque $A \subset |\mathcal{F}|$. On définit la restriction $\mathcal{F}|_A$ de $\mathcal{F}$ dans A comme l'ensemble de toutes les fonctions $f : A \to \mathbb{R}$ vérifiant que pour tout a dans A, il existe un voisinage $U \subset A$ et un élément $\tilde{f} \in \mathcal{F}$ tels que $\tilde{f}\big|_A = f$.

Remarque 2.3. Il s'agit d'une algèbre.

Remarque 2.4. La topologie de $\mathcal{F}|_A$ considérée est celle engendré par la base d'ouverts de la forme $A \cap f^{-1}(V)$, où $f \in \mathcal{F}$ et $V \subset \mathbb{R}$.

Proposition 2.7. *Si $\mathcal{F} = C^\infty(U)$, avec $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert non vide, alors $\mathcal{F}|_V = C^\infty(V)$ pour tout ouvert $V \subset U$.*

Preuve. Par la proposition 2.4, on sait que $|\mathcal{F}| = U$ Par définition, si $f \in \mathcal{F}|_V$, alors en tout point, f coïncide localement avec une fonction infiniment différentiable, donc $f \in C^\infty(V)$. Supposons maintenant $f \in C^\infty(V)$ et $x \in V$. Pour montrer l'inclusion inverse, nous utilisons un résultat supplémentaire (pour la preuve voir [1], page 15-16).

Proposition 2.8. *Soit $V \subset \mathbb{R}$ un ouvert non vide et $f \in C^\infty(V)$. Pour tout $x \in V$, il existe un voisinage $W \subset V$ de x et une fonction $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ tels que $f|_W = g_{|W}$.*

Or si on considère $\tilde{g} = g_{|U}$, on a bien $\tilde{g}|_W = f|_W$. Donc $f \in \mathcal{F}|_V$. □

Étant donné un ensemble quelconque $A \subset |\mathcal{F}|$. On peut désormais définir le morphisme de restriction naturel

$$\begin{array}{rccc} \rho_A & : & \mathcal{F} & \to & \mathcal{F}|_A \\ & & f & \mapsto & f|_A. \end{array}$$

Définition 2.8 (Algèbre complète)**.** Une $\mathbb{R}$-algèbre géométrique est dite **complète** si le morphisme de restriction $\rho_{|\mathcal{F}|} : \mathcal{F} \to \mathcal{F}|_{|\mathcal{F}|}$ est surjectif.

Une autre reformulation de cette définition est de dire qu'une algèbre est complète si toute fonction de $|\mathcal{F}|$ dans $\mathbb{R}$ qui coïncide localement avec un élément de $\mathcal{F}$ est un élément de $\mathcal{F}$.

En utilisant cette reformulation, on obtient naturellement le résultat suivant :

Proposition 2.9. *L'algèbre $C^\infty(U)$ pour $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert est complète.*

Preuve. Ce résultat est une conséquence directe de la Proposition 2.7, en considérant le cas $V = U$. $\square$

Exemple 2.4. $\mathbb{R}[x_1 \dots x_n]$ est une algèbre complète. On effectue la preuve seulement dans le cas $n = 1$. Dans la Proposition 2.3, on à déjà montrer que $|\mathbb{R}[x]| = \mathbb{R}$. Il nous faut donc montrer que toute fonction réelle localement polynomiale est un polynôme. En effet, soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application localement polynomiale, *i.e.* vérifiant

$$\forall a \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon > 0, \exists P \in \mathbb{R}[x],\ f = P \text{ sur }]a - \varepsilon, a + \varepsilon[.$$

En particulier, on a $f = P$ sur un voisinage de 0, pour un certain polynôme P. Montrons en fait que $f = P$ sur tout $\mathbb{R}$. Pour cela supposons que ce n'est pas le cas, donc il existe un réel x tel que $f(x) \neq P(x)$. Posons x_0 le réel vérifiant $f(x_0) \neq P(x_0)$ et tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \neq P(x)$ implique que $|x_0| \leqslant |x|$. Notons $r = |x_0|$. Par définition, $f = P$ sur $]-r, r[$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $x_0 > 0$. Par hypothèse, il existe un réel $\alpha > 0$ et un polynôme Q tels que $f = Q$ sur $]r - \alpha, r + \alpha[$. On remarque que sur $]r - \alpha, r[$, $P = Q$, le polynôme $P - Q$ possède une infinité de racines, donc P=Q sur $\mathbb{R}$. Or $P(x_0) \neq f(x_0)$, d'où la contradiction.

Proposition 2.10. *Supposons que $\mathcal{F}$ est une algèbre géométrique et $A \subset |\mathcal{F}|$. Alors l'application*

$$\begin{array}{rccc} \mu & : & A & \longrightarrow & \big|\mathcal{F}|_A\big| \\ & & a & \longmapsto & \big(f \mapsto f(a)\big) \end{array}$$

est un homéomorphisme dans un sous-ensemble de $\big|\mathcal{F}|_A\big|$.

Preuve. Montrons que μ est injectif. Soient a_1 et a_2 deux points distincts dans A. Il existe une fonction $f_0 \in \mathcal{F}$ telle que $f_0(a_1) \neq f_0(a_2)$. Mais $f_0|_A \in \mathcal{F}|_A$ et $f_0|_A(a_1) \neq f_0|_A(a_2)$. La continuité de μ est une application directe de la Proposition 2.3. En effet les fonctions dans $\mathcal{F}$ étant continues, il en est de même pour les fonctions dans $\mathcal{F}|_A$. Pour montrer la continuité réciproque, considérons un élément de la base d'ouverts dans A de la forme $A \cap f^{-1}(V)$, où $f \in \mathcal{F}$ et $V \subset \mathbb{R}$ est un ouvert. On remarque que son image par μ, $A \cap (f|_A)^{-1}(V)$, est ouvert de $\mu(A)$. $\square$

En général μ n'est pas surjective mais dans la suite nous explicitons un cas particulier où elle l'est.

Définition 2.9. Une algèbre $\mathcal{F}$ est dite C^∞-fermée si pour toute collection d'éléments $f_1, ..., f_k \in \mathcal{F}$ et toute fonction $g \in C^\infty(\mathbb{R}^k)$, il existe un élément $f \in \mathcal{F}$ tel que pour tout a dans $|\mathcal{F}|$

$$f(a) = g(f_1(a), ..., f_k(a)).$$

Remarque 2.5. Dans le cas où $\mathcal{F} = C^\infty(U)$, avec U ouvert de $\mathbb{R}^n$, alors $\mathcal{F}$ est C^∞-fermé.

Proposition 2.11. *Si $\mathcal{F}$ est une algèbre C^∞-fermée et $A \subset |\mathcal{F}|$ est un ouvert, alors le morphisme $\mu : A \to \left|\mathcal{F}|_A\right|$ introduit dans la Proposition 2.10 est surjectif. En particulier, A est homéomorphe à $\left|\mathcal{F}|_A\right|$.*

Preuve. Nous prouvons ce résultat dans le cas où $A = h^{-1}(V)$, avec V un ouvert de $\mathbb{R}$ et $h \in \mathcal{F}$, est un élément de la base d'ouverts. D'après la Proposition 2.5, on peut construire une fonction $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que $g \equiv 0$ sur $\mathbb{R} \setminus V$ et $g > 0$ sur V. Puisque $\mathcal{F}$ est C^∞-fermé, il existe une fonction $f \in \mathcal{F}$ telle que $f(a) = g(h(a))$ pour tout point $a \in |\mathcal{F}|$. On a alors $f(a) > 0$ pour tout $a \in A$ et ainsi $f|_A$ est un élément inversible dans $\mathcal{F}|_A$. De plus, supposons que $b' \in |\mathcal{F}|$ est l'image d'un point $b \in \left|\mathcal{F}|_A\right|$ par l'application naturelle $\left|\mathcal{F}|_A\right| \to |\mathcal{F}|$, induite par le morphisme de restriction $\mathcal{F} \to \mathcal{F}|_A$. Si $b' \notin A$, alors

$$0 = f(b') = (f|_A)(b),$$

ce qui contredit le fait que $f|_A$ est inversible. Donc $\mu(A) = \left|\mathcal{F}|_A\right|$. □

On termine cette partie sur un résultat montrant le lien entre les restrictions de deux algèbres isomorphes.

Proposition 2.12. *Soient $\varphi : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$ un isomorphisme de $\mathbb{R}$-algèbres et un ensemble $A_2 \subset |\mathcal{F}_2|$. Si $A_1 = \varphi^*(A_2)$, alors l'application*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_1|_{A_1} & \to & \mathcal{F}_2|_{A_2} \\ f & \mapsto & f(\varphi^*|_{A_2}), \end{array}$$

est un isomorphisme.

2.4 Algèbres lisses

Définition 2.10 (Algèbre lisse)**.** Soit $\mathcal{F}$ une $\mathbb{R}$-algèbre géométrique et complète. On dit que $\mathcal{F}$ est **lisse** s'il existe un entier $n \geq 1$ et un recouvrement au plus dénombrable d'ouverts (U_k) de l'espace dual $|\mathcal{F}|$ tels que toutes les algèbres $\mathcal{F}|_{U_k}$ sont isomorphes à l'algèbre $C^\infty(\mathbb{R}^n)$.
L'entier n est appelé la **dimension** de l'algèbre $\mathcal{F}$.

On peut introduire un concept plus général avec la notion d'algèbres lisses à bords.

Définition 2.11 (Algèbre lisse à bords)**.** Soit $\mathcal{F}$ une $\mathbb{R}$-algèbre géométrique complète. On dit que $\mathcal{F}$ est **lisse à bords** s'il existe un entier $n \geq 1$ et un recouvrement au plus dénombrables d'ouverts (U_k) de l'espace dual $|\mathcal{F}|$ tels que chacune des algèbres $\mathcal{F}|_{U_k}$ est isomorphe à $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ou à l'algèbre $C^\infty(\mathbb{R}^n_H)$, avec

$$\mathbb{R}^n_H = \{(r_1, ..., r_n) \in \mathbb{R}^n \ ; \ r_1 \geqslant 0\},$$

et $C^\infty(\mathbb{R}^n_H)$ est l'ensemble des fonctions dans $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ restreintes (au sens usuel) à l'ensemble $\mathbb{R}^n_H$.

Remarque 2.6. De la même façon que $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $C^\infty(\mathbb{R}^n_H)$ est une algèbre géométrique, complète et elle vérifie que $|C^\infty(\mathbb{R}^n_H)| \cong \mathbb{R}^n_H$.

Proposition 2.13. *Tout algèbre lisse (à bords) est C^∞-fermé.*

Une preuve est donnée dans [1], page 38.

Remarque 2.7. Dans le cas où $\mathcal{F}$ est une algèbre lisse à bords, on a une correspondance entre les ouverts U_i et l'ensemble $\mathbb{R}^n_H$. En effet comme $\mathcal{F}$ est C^∞-fermé, on peut appliquer la Proposition 2.11. En combinant avec le Corollaire 2.2 on obtient

$$U_i \cong |F|_{U_i}| \cong |C^\infty(\mathbb{R}^n_H)| \cong \mathbb{R}^n_H.$$

On peut ainsi introduire la notion de frontière dans $|\mathcal{F}|$. On note que dans le cas d'une algèbre lisse sans bords, on à également $U_i \cong \mathbb{R}^n$.

Définition 2.12. On appelle **frontière de l'espace** $|\mathcal{F}|$, que l'on note $\partial|\mathcal{F}|$, l'ensemble des points dans $|\mathcal{F}|$ qui sont en correspondance avec les éléments dans la frontière de $\mathbb{R}^n_H$ dans les identifications $U_i \cong \mathbb{R}^n_H$.

Remarque 2.8. Les points frontières sont bien définis et ne dépendent pas du recouvrement d'ouverts choisi.

Exemple 2.5. Dans ce paragraphe nous étudions $\mathcal{F} = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid f(x+1) = f(x),\ \ x \in \mathbb{R}\}$, l'algèbre des fonctions réelles lisses périodiques, de période 1. On remarque que $\mathcal{F} \subset C^\infty(\mathbb{R})$ donc par la Proposition 2.1 $\mathcal{F}$ est géométrique. De plus l'application

$$\begin{array}{cccc} \tilde{\mathrm{ev}} & : & S^1 & \longrightarrow & |\mathcal{F}| \\ & & z = e^{i2\pi x} & \longmapsto & \mathrm{ev}_x \end{array}$$

où $\mathrm{ev}_x(f) = f(x)$, est un homéomorphisme. En effet, par la Proposition 2.6, le morphisme d'inclusion naturel $i : \mathcal{F} \to C^\infty(\mathbb{R})$ induit l'application continue $i^* : |C^\infty(\mathbb{R})| \to |\mathcal{F}|$. De plus considérons l'application continue $ev = \varphi \circ i^*$ où $\varphi : \mathbb{R} \to |C^\infty(\mathbb{R})|$ est l'homéomorphisme de la preuve de la Proposition 2.4. Cette application induit $\tilde{\mathrm{ev}}$ car $\mathrm{ev}_x = \mathrm{ev}_y$ équivaut à dire que $x - y \in \mathbb{Z}$ et $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$. Comme $\tilde{\mathrm{ev}}$ est donc continue bijective, S^1 est compact et $|\mathcal{F}|$ est séparé, $\tilde{\mathrm{ev}}$ est un homéomorphisme. Donc $|\mathcal{F}| \cong S^1$. On peut également prouver sans difficultés que $\mathcal{F}$ est une algèbre complète et montrons qu'elle est également lisse. Pour cela considérons les fonctions g_1, g_2 dans $\mathcal{F}$,

$$g_1(r) = \sin^2(\pi r), \quad g_2(r) = \cos^2(\pi r) \quad \forall r \in \mathbb{R},$$

et le recouvrement d'ouverts du cercle $|\mathcal{F}|$ définit par

$$U_i = \{r \in |\mathcal{F}| \ : \ g_i(r) \neq 0\} \quad i = 1, 2.$$

On peut vérifier sans difficultés que pour $i = 1, 2$, U_i est homéomorphe à $S^1 \setminus \{1\}$ lui-même homéomorphe à $]0, 1[$. Ainsi on en déduit l'isomorphisme

$$\mathcal{F}|_{U_i} \cong C^\infty(]0, 1[) \cong C^\infty(\mathbb{R}).$$

Donc $\mathcal{F}$ est une algèbre lisse de dimension 1.

Exemple 2.6 (Bouteille de Klein)**.** Soit $\mathcal{F} = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^2) \,|\, f(r_1, r_2) = f(r_1 + 1, -r_2) = f(r_1, r_2 + 1), \;\; \forall (r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2\}$. Comme précédemment c'est une algèbre géométrique complète. En considérant les fonctions

$$g_1(r_1, r_2) = \sin^2(\pi r_1), \quad h_1(r_1, r_2) = \sin^2(\pi r_2),$$

$$g_2(r_1, r_2) = \cos^2(\pi r_1), \quad h_2(r_1, r_2) = \cos^2(\pi r_2),$$

pour tout (r_1, r_2) dans $\mathbb{R}^2$, on peut recouvrir $|\mathcal{F}|$ par les ouverts

$$U_{ik} = \{(r_1, r_2) \in |\mathcal{F}| \;:\; g_i((r_1, r_2)) \neq 0 \;,\; h_k((r_1, r_2)) \neq 0\} \quad i, k = 1, 2.$$

Comme précédemment on a l'isomorphisme

$$\mathcal{F}|_{U_{ik}} \cong C^\infty(]0, 1[^2) \cong C^\infty(\mathbb{R}^2).$$

Donc $\mathcal{F}$ est une algèbre lisse de dimension 2. L'espace $|\mathcal{F}|$ est connu sous le nom de bouteille de Klein.

Exemple 2.7 (Ruban de Möbius)**.** Considérons $\mathcal{F} = \{f \in C^\infty(H) \,|\, f(r_1, r_2) = f(r_1 + 1, -r_2), \;\; \forall (r_1, r_2) \in H\}$, où $H = \{(r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2 \;:\; -1 \leq r_2 \leq 1\}$. C'est une algèbre lisse à bords de dimension 2 et ici $|\mathcal{F}|$ s'identifie au ruban de Möbius fermé. De façon analogue, l'algèbre des fonctions sur le ruban de Möbius ouvert se définit par l'ensemble $\{f \in C^\infty(\mathbb{R}^2) \,|\, f(r_1, r_2) = f(r_1 + 1, -r_2), \;\; \forall (r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2\}$.

3 Fibrés vectoriels et modules projectifs

3.1 Variétés et fibrés vectoriels

Définition 3.1 (Variété)**.** Une **variété différentiable (ou lisse)** M de dimension n est un espace topologique séparé et métrisable dont tout point est contenu dans un ouvert difféomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Exemple 3.1. Le cercle S^1 est une variété de dimension 1.

Pour avoir une approche plus géométrique, étant donné une algèbre géométrique, complète et lisse $\mathcal{F}$, on considère désormais $M = |\mathcal{F}|$ comme une variété. Dans la première partie, nous avons démontré que $|\mathcal{F}|$ remplissait les caractéristiques de la Définition 3.1. Ainsi $\mathcal{F}$ est l'algèbre des fonctions lisses sur la variété $M = |\mathcal{F}|$.

Définition 3.2. Soient E et M deux variétés lisses. Un **fibré vectoriel** (lisse) de fibre V est la donnée d'une application lisse $\pi : E \to M$ telle que

1. V est un espace vectoriel ;
2. Pour tout point $x \in M$, $\pi^{-1}(\{x\})$ est un espace vectoriel ;
3. Pour tout point $x \in M$, il existe un voisinage $U \subset M$ de x et un C^∞-difféomorphisme $\phi : \pi^{-1}(U) \to U \times V$ tel que
   - Pour tout $(x, v) \in U \times V$, $(\pi \circ \phi^{-1})(x, v) = x$;
   - Pour tout $y \in U$, $\phi|_{\pi^{-1}(\{y\})} : \pi_y \to V$ est linéaire.

En particulier ϕ induit un isomorphisme entre $\pi^{-1}(\{x\})$ et V, $\forall x \in M$.
On dit que M est la **base**, V la **fibre**, E **l'espace total** et ϕ est le morphisme de trivialisation du fibré.
Pour tout $x \in M$ on notera $\pi_x = \pi^{-1}(\{x\})$ et $\phi_x = \phi|_{\pi_x}$.

Remarque 3.1. On dit que π est un fibré trivialisable si $E \cong M \times V$.

Exemple 3.2. (i) Le fibré tangent sur une variété M est un exemple fondamental de fibré vectoriel : $\pi_T : TM \to M$ (voir [2] page 99). Par exemple le fibré tangent sur le cercle est trivialisable.

(ii) Le fibré du Ruban de Möbius M sur le cercle S^1. Considérons M comme la bande $[0,1] \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$ où on identifie les points $(0,y)$ et $(1,-y)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$, et le cercle S^1 comme le segment $[0,1]$ où on identifie 0 et 1. Alors la projection $\pi : M \to S^1$ est simplement $\pi(x,y) = x$. On peut donc voir ce fibré comme un fibré vectoriel si on regarde chaque fibre comme une droite vectorielle, *i.e.* comme un espace vectoriel de dimension 1. Dans cet exemple, prouvons la trivialité locale. Si $a \in S^1$ est un point dans l'intérieur de $[0,1]$, alors on peut considérer le voisinage $U =]0,1[$. Si $a = 0$, alors on prend $U = \{x \in S^1 \ ; \ x \neq \frac{1}{2}\}$ et on définit le difféomorphisme $\varphi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}$ tel que

$$\varphi(x,y) = \begin{cases} (x,y) & \text{si } x < \frac{1}{2} \\ (x,-y) & \text{si } x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Dans les Exemples 2.5 et 2.7 on a vu que l'algèbre $A \subset C^\infty(\mathbb{R}^2)$ des fonctions sur le Ruban de Möbius et que l'algèbre $B \subset C^\infty(\mathbb{R})$ des fonctions sur le cercle sont respectivement les ensembles $\{f \in C^\infty(\mathbb{R}^2) \,|\, f(r_1,r_2) = f(r_1+1,-r_2),\ \forall (r_1,r_2) \in \mathbb{R}^2\}$ et $\{f \in C^\infty(\mathbb{R}) \,|\, f(x+1) = f(x),\ \ x \in \mathbb{R}\}$ Donc une autre manière de définir ce fibré est de le représenter par l'inclusion $A \to B$ qui à une fonction $f \in A$ associe la fonction $g : g(x,y) = f(x)$.

Définition 3.3 (Morphisme de fibrés vectoriels)**.** Un **morphisme** entre deux fibrés vectoriels (E_π, π), (E_η, η) sur M est une application lisse $\alpha : E_\pi \to E_\eta$ qui envoie fibre sur fibre et dont la restriction sur chaque fibre $\alpha_z : \pi_z \to \eta_z$, $z \in M$, est une application linéaire.

On note $\mathrm{Mor}(\pi, \eta)$, l'ensemble des morphismes de fibrés vectoriels de (E_π, π) dans (E_η, η).

Un **isomorphisme de fibrés** est un morphisme de fibrés qui est un difféomorphisme

Le résultat qui suit nous permet d'adopter un point de vue pratique sur les morphismes entre fibrés triviaux.

Lemme 2. *Soient $\pi : M \times V \to M$ et $\pi : M \times W \to M$ deux fibres vectoriels triviaux. À toute application $\varphi : M \times V \to M \times W$ linéaire sur chaque fibre, on lui associe l'application $\tilde{\varphi} : M \to Hom(V,W)$ telle que pour tout point x dans M, $\tilde{\varphi}(x)$ est un opérateur qui à $v \in V$ associe la composante en W de l'élément $\varphi(x,v) \in M \times W$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) L'application φ est lisse (i.e. φ est un morphisme de fibrés vectoriels).

(b) L'application $\tilde{\varphi}$ est lisse.

Définition 3.4 (Sous-fibré vectoriel)**.** On dit qu'un fibré vectoriel $\eta : E_\eta \to M$ est un **sous-fibré** d'un fibré vectoriel $\pi : E_\pi \to M$ si

(i) L'espace total E_η est une sous-variété de E_π ;

(ii) La projection η est la restriction de π dans E_π ;

(iii) Pour tout point $x \in M$, la fibre η_x est un sous-espace vectoriel de la fibre π_x ;

Proposition 3.1. *Pour un morphisme de fibré vectoriel $\varphi : \pi \to \eta$ sur une variété M, les conditions suivantes sont équivalentes.*

1. *dim Ker(φ_x) ne dépend pas de x ;*
2. *dim Im(φ_x) ne dépend pas de x ;*
3. *Ker(φ) est un sous-fibré de π ;*
4. *Im(φ) est un sous-fibré de η.*

Voir une preuve dans [1] (section 11.20).

Définition 3.5 (Somme directe de fibrés vectoriels)**.** Un fibré vectoriel π est la **somme directe de deux sous-fibrés** η et ζ (noté $\pi = \eta \oplus \zeta$) si pour tout point $x \in M$ on a $\pi_x = \eta_x \oplus \zeta_x$.

Proposition 3.2. *Tout sous-fibré d'un fibré vectoriel à un complément direct.*

Une preuve reposant sur l'existence du produit scalaire dans tout fibré vectoriel est donnée dans [1] (section 11.24).

3.2 Module des sections sur un fibré vectoriel

Définition 3.6. Une **section (globale)** d'un fibré vectoriel $\pi : E \to M$ est une fonction lisse $s : M \to E$ telle que $\pi \circ s = id_M$.
On note $\Gamma(\pi)$ l'ensemble des sections sur un fibré vectoriel π.

Proposition 3.3. $\Gamma(\pi)$ *est un $C^\infty(M)$-module.*

Preuve. Il suffit de considérer pour toutes sections s, s_1, s_2 et toute fonction $f \in C^\infty(M)$,
· l'addition interne : $(s_1 + s_2)(z) = s_1(z) + s_2(z)$, $\forall z \in M$,
· la multiplication externe : $(fs)(z) = f(z)s(z)$, $\forall z \in M$.
Or, on rappelle que pour tout $z \in M$, π_z est un espace vectoriel. En particulier, $(s_1 + s_2)(z) \in \pi_z$ et $(fs)(z) \in \pi_z$. Donc $s_1 + s_2$, fs sont bien des sections. □

On énonce maintenant ces deux résultats dont les preuve sont données dans [1] section 11.

Proposition 3.4. *Supposons que les sections $s_1, ..., s_l \in \Gamma(\pi)$ ont la propriété que pour tout point z dans M, les vecteurs $s_1(z), ..., s_l(z)$ engendrent la fibre π_z. Alors ces sections engendrent le module $\Gamma(\pi)$.*

Proposition 3.5. *En reprenant les notations de la Définition 3.2, on considère $x \in M$ et U l'ouvert associé dans la trivialisation. Alors $\pi_{|u} : \pi^{-1}(U) \to U$ définit un fibré vectoriel sur U et $\Gamma(\pi_{|u})$ est un module libre sur $C^\infty(U)$.*

En particulier, cette proposition nous dit que si π est un fibré vectoriel trivial alors $\Gamma(\pi)$ est un module libre et on à même une équivalence :

Proposition 3.6. *Un fibré vectoriel π est trivial si et seulement si le module $\Gamma(\pi)$ est libre.*

Preuve. Considérons un difféomorphisme de trivialisation $\varphi : E_\pi \to M \times V$ et une base de $(v_1 \cdots v_n)$ de l'espace vectoriel V. Si on pose $e_i(x) = \varphi^{-1}(x, v_i)$, alors l'ensemble $(e_1 \cdots e_n)$ constitue une base du module $\Gamma(\pi)$. Inversement, supposons que $\Gamma(\pi)$ est libre de base $(e_1 \cdots e_n)$. Alors on peut définir un difféomorphisme $\varphi : E_\pi \to M \times \mathbb{R}^n$ en posant $\varphi\big(\sum_{i=1}^m \lambda_i e_i(x)\big) = (x, \lambda_1 \cdots \lambda_n)$. □

Remarque 3.2. Pour tout $C^\infty(M)$-module libre de type fini P, il existe un fibré vectoriel dont le module des sections est isomorphe à P. En effet, un $C^\infty(M)$-module libre de rang m est isomorphe à $\Gamma(\pi)$, où π est le fibré produit $M \times \mathbb{R}^m \to M$.

Maintenant on va s'intéresser à la structure de $\Gamma(\pi)$. Pour cela on rappelle ce résultat d'algèbre, dont la preuve est immédiate.

Proposition 3.7. *Soit A un anneau commutatif et I un idéal de A. Si M un A-module, alors*

$$I.M = \{\textstyle\sum_{i \in X} a_i m_i |\ X \text{ fini},\ a_i \in I,\ m_i \in M\}$$

est un sous-module de M.

Définition 3.7. Soit M une variété C^∞ et soit $z \in M$. On définit **l'idéal maximal** μ_z de l'algèbre $C^\infty(M)$ par

$$\mu_z = \{f \in C^\infty(M) \,|\, f(z) = 0\}$$

De plus on notera $\mu_z\Gamma(\pi) = \mu_z.\Gamma(\pi)$ le sous-module de $\Gamma(\pi)$ défini avec la proposition précédente.

Proposition 3.8. *Soient π un fibré sur une variété M et $z \in M$.*

1. *Pour tout point $y \in \pi_z$, il existe une section $s \in \Gamma(\pi)$ telle que $s(z) = y$.*
2. *Si $s \in \Gamma(\pi)$ et $s(z) = 0$, alors $s = \sum_{i=0}^n f_i s_i \in \mu_z\Gamma(\pi)$, avec $f_i \in \mu_z$ et $s_i \in \Gamma(\pi)$.*

Preuve. 1. Pour un fibré trivial, on vérifie sans difficultés que l'assertion est vraie. Dans le cas général, par trivialité locale il existe un voisinage U de z et une section locale $s_U : U \to E$ qui satisfait $s_U(z) = y$. On pose $\tilde{s} = g s_U$, où g est une fonction lisse dont le support est inclus dans U et telle que $g(z) = 1$. On remarque que $\tilde{s} : M \to E$ est une section globale bien définie et on a bien $\tilde{s}(z) = y$.
2. On commence par montrer l'assertion dans le cas où le fibré est trivial. Par la Proposition 3.5, il existe des sections $e_1, .., e_m \in \Gamma(\pi)$ qui forment une base

du $C^\infty(M)$-module $\Gamma(\pi)$. Ainsi, toute section s peut s'écrire sous la forme $s = \sum_{i=1}^m f_i e_i$. L'égalité $s(z) = 0$ implique que $f_i(z) = 0$ pour tout $i = 1, .., m$, d'où $f_i \in \mu_z$.
Dans le cas d'un fibré arbitraire, il existe un voisinage U de z, des sections $e_i \in S(\pi_{|u})$ et des fonctions $f_i \in C^\infty(U)$ tels que $s_U = \sum_{i=1}^m f_i e_i$. Comme précédemment, on choisit une fonction $f \in C^\infty(M)$ telle que supp $f \subset U$ et $f(z) = 1$. Pour tout i, on étend $ff_i \in C^\infty(U)$ (respectivement $fe_i \in S(\pi_{|u})$) en des fonctions (resp. des sections) lisses sur M, qui valent 0 en dehors de U. On note encore ces extensions ff_i et fe_i et on obtient

$$f^2 s = \sum_{i=1}^m (ff_i)(fe_i),$$

et donc

$$s = (1 - f^2)s + \sum_{i=1}^m (ff_i)(fe_i).$$

Enfin on remarque que pour tout i, ff_i et $1 - f^2$ appartiennent à μ_z. □

Corollaire 3.1. *On en déduit l'isomorphisme* $\Gamma(\pi)/\mu_z\Gamma(\pi) \cong \pi_z$.

Lemme 3. *Si* $\varphi : \zeta \to \pi$ *est un morphisme de fibré vectoriel et* φ_z *est un isomorphisme de d'espaces vectoriels* ($\zeta_z \cong \pi_z$) *pour tout point* $z \in M$, *alors* φ *est un isomorphisme de fibrés vectoriels.*

De ce lemme découle le résultat suivant :

Corollaire 3.2. *Si* $F \in Hom_{C^\infty(M)}(\Gamma(\zeta), \Gamma(\pi))$ *et pour tout point* $x \in M$, *l'application*

$$F_x : \Gamma(\zeta)/\mu_x\Gamma(\zeta) \to \Gamma(\pi)/\mu_x\Gamma(\pi)$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels, alors F *est un isomorphisme de modules.*

Proposition 3.9. *Si* $\pi = \eta \oplus \zeta$, *alors* $\Gamma(\pi) = \Gamma(\eta) \oplus \Gamma(\zeta)$ *(somme direct de sous-modules).*

3.3 Modules projectifs

Définition 3.8. Un module P sur un anneau commutatif A est dit **projectif** si pour tout morphisme de A-modules surjectif $\varphi : Q \to R$ et tout morphisme de A-modules $\psi : P \to R$, avec Q et R deux A-modules quelconques, il existe un morphisme $\chi : P \to Q$ tel que $\varphi \circ \chi = \psi$.

Proposition 3.10. *Si* L *est un module libre sur un anneau commutatif* A, *alors il est projectif.*

Preuve. Soient $\varphi : Q \to R$ et $\psi : L \to R$ deux morphismes de A-modules, avec φ surjectif. On note $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leq i\leq n}$, une base de L. Par surjectivité de φ, il existe une application $f : R \to Q$ telle que $\varphi \circ f = id_R$. On pose $\chi : P \to Q$, l'unique morphisme de A-modules tel que $\chi(e_i) = (f \circ \psi)(e_i)$ pour tout $1 \leq i \leq n$. On a bien $\varphi \circ \chi = \psi$ comme on voulait démontrer. □

Proposition 3.11. *On considère un A-module P. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

(a) P est projectif ;

(b) Pour tout morphisme de A-module surjectif $\varphi : Q \to P$, avec Q un A-module quelconque, il existe un morphisme $\chi : P \to Q$ tel que $\varphi \circ \chi = id_P$;

(c) Il existe un A-module libre L, tel que $L \cong P \oplus P'$.

Preuve. $(a) \Rightarrow (b)$. Dans la Définition 3.8 d'un module projectif, il suffit de prendre $R = P$ et $\psi = id_P$.
$(b) \Rightarrow (c)$. Soit un L un A-module libre de base $(e_p)_{p\in P}$, équipotente à P. On considère le morphisme surjectif $\varphi : L \to P$ tel que $\varphi(e_p) = p$, pour tout $p \in P$. Par (b), il existe un morphisme $\chi : P \to L$ tel que $\varphi \circ \chi = id_P$. Donc on a $P \cong Im\chi$ et $L = Im\chi \oplus Ker\varphi$. En effet, tout élément $a \in L$ peut s'écrire sous la forme $\underbrace{\chi(\varphi(a))}_{\in Im\chi} + \underbrace{(a - \chi(\varphi(a)))}_{\in Ker\varphi}$. De plus, si $a \in Im\chi \cap Ker\varphi$, alors $a = \chi(p)$, $p \in P$, et $0 = \varphi(a) = \varphi(\chi(p)) = p$. Donc $a = 0$.
$(c) \Rightarrow (a)$. Supposons $L \cong P \oplus P'$, avec L libre et soient $\varphi : Q \to R$ et $\psi : P \to R$ deux morphismes de A-module, avec φ surjectif. On considère le morphisme de projection $\pi : P \oplus P' \to P$ et le morphisme d'inclusion $i : P \to P \oplus P'$. On a $\pi \circ i = id_P$. Par la Proposition 3.10, il existe un $\widetilde{\chi} : L \to Q$ tel que $\varphi \circ \widetilde{\chi} = \psi \circ \pi$ ce qui donne $\varphi \circ \widetilde{\chi} \circ i = \psi \circ \pi \circ i = \psi$. On pose $\chi = \widetilde{\chi} \circ i : P \to Q$ et on a bien $\varphi \circ \chi = \psi$. □

Proposition 3.12. *Si P et Q sont deux modules projectifs de type fini sur un anneau commutatif A, alors $Hom_A(P, Q)$ est un A-module projectif de type fini.*

Avant de passer à la preuve on démontre d'abord le lemme suivant :

Lemme 4. *Soient M, M', N, N' des A-modules. On a les isomorphismes de A-modules*

(i) $Hom_A(A, N) \cong N$;

(ii) $Hom_A(M \oplus M', N) \cong Hom_A(M, N) \oplus Hom_A(M', N)$;

(iii) $Hom_A(M, N \oplus N') \cong Hom_A(M, N) \oplus Hom_A(M, N')$.

Preuve. On note i_M, $i_{M'}$ et i_N, $i_{N'}$ les morphismes d'inclusions respectivement de M et M' dans $M \oplus M'$, et de N et N' dans $N \oplus N'$. De même, on note π_M, $\pi_{M'}$, π_N et $\pi_{N'}$, les morphismes de projections respectivement dans M, M', N et N'. Les isomorphismes sont donnés par les morphismes :
(i)

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_A(A, M) & \to & M \\ f & \mapsto & f(1_A) \\ (a \mapsto a.m) & \leftarrow & m \end{array}$$

(ii)

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_A(M \oplus M', N) & \to & \mathrm{Hom}_A(M, N) \oplus \mathrm{Hom}_A(M', N) \\ f & \mapsto & (f \circ i_M) + (f \circ i_{M'}) \\ g \circ \pi_M + g' \circ \pi_{M'} & \leftarrow & g + g'. \end{array}$$

(iii).

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_A(M, N \oplus N') & \to & \mathrm{Hom}_A(M,N) \oplus \mathrm{Hom}_A(M,N') \\ f & \mapsto & (\pi_N \circ f) + (\pi_{N'} \circ f) \\ i_N \circ g + i_{N'} \circ g' & \leftarrow\!\shortmid & g + g'. \end{array}$$

□

On peut maintenant passer à la preuve de la Proposition 3.12.

Preuve. Comme P et Q sont des modules projectifs de type fini, par la Proposition 3.11, $A^n \cong P \oplus P'$ et $A^m \cong Q \oplus Q'$, avec P' Q', des A-modules et n, m des entiers positifs. Par le lemme précédent, on a $\mathrm{Hom}_A(A^n, A^m) \cong \mathrm{Hom}_A(A, A^m)^n \cong (A^m)^n \cong A^{nm}$, ce qui nous dit que $\mathrm{Hom}_A(A^n, A^m)$ est module libre de type fini. Or

$$\begin{aligned} A^{nm} \cong \mathrm{Hom}_A(A^n, A^m) &\cong \mathrm{Hom}_A(P \oplus P', Q \oplus Q') \\ &\cong \mathrm{Hom}_A(P, Q \oplus Q') \oplus \mathrm{Hom}_A(P', Q \oplus Q') \\ &\cong \mathrm{Hom}_A(P, Q) \oplus M, \end{aligned}$$

avec $M = \mathrm{Hom}_A(P, Q') \oplus \mathrm{Hom}_A(P', Q) \oplus \mathrm{Hom}_A(P', Q')$. Donc également par la Proposition 3.11, $\mathrm{Hom}_A(P, Q)$ est un module projectif. □

3.4 Variétés grassmanniennes et fibré tautologique

Dans le paragraphe qui suit on s'intéresse à deux notions fondamentales, celle des variétés grassmanniennes et du fibré tautologique. L'objectif étant de démontrer que pour un fibré vectoriel π sur une variété M, le $C^\infty(M)$-module $\Gamma(\pi)$ est de type fini.

Définition 3.9 (Variétés grassmanniennes)**.** On appelle **variété grassmannienne** $G_{n,k}$ la variété composée de l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension k de $\mathbb{R}^n$.

Remarque 3.3. Pour construire un atlas sur $G_{n,k}$, choisissons un système de coordonnées cartésiennes $(x_1, ..., x_n)$ dans $\mathbb{R}^n$ et pour U considérons l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension k donnés, dans ces coordonnées, par les équations

$$x_{m+i} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j \quad i = 1, ..., n - m.$$

On considère également l'application $p : U \to \mathbb{R}^{m(n-m)}$ qui à un sous-espace vectoriel l'ensemble des coefficients a_{ij}. Ainsi on obtient une variété de dimension $m(n-m)$.

Exemple 3.3. Dans le cas $k = 1$, $G_{1,n}$ est l'espace projectif réel de dimension $n - 1$, *i.e.* l'ensemble des droites vectorielles de $\mathbb{R}^n$.

Définition 3.10. Supposons que $G_{n,k}$ est une grassmannienne de dimension k dans un espace de dimension n. On pose la sous-variété de $G_{n,k} \times \mathbb{R}^n$

$$E_{n,k} = \{(W, v) \in G_{n,k} \times \mathbb{R}^n \ : \ v \in W\}.$$

L'application

$$\begin{array}{cccc} \Theta_{n,k} & E_{n,k} & \to & G_{n,k} \\ & (W, v) & \mapsto & W \end{array}$$

définit un fibré appelé **fibré tautologique**.

Théorème 3.1. *Tout fibré vectoriel avec base connexe peut être induit du fibré tautologique sur une variété de Grassman appropriée.*

Voir [1] pour la preuve.

Corollaire 3.3. *Le $C^\infty(M)$-module $\Gamma(\pi)$ est de type fini.*

La preuve repose essentiellement sur le Théorème 3.1. L'idée est de montrer que $\Gamma(\pi)$ possède un système de générateurs d'au plus N éléments, où $N = N(n, k)$ est un entier qui ne dépend que des dimensions de la base et de la fibre (respectivement n et k) du fibré. La preuve est détaillée dans [1].

3.5 Théorèmes de Serre-Swan

Définition 3.11 (Catégories)**.** Une **catégorie** $\mathcal{C}$ est la donnée d'une collection d'objets $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. Pour deux objets A, $B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, on a un ensemble $\mathrm{Mor}(A, B)$, appelé l'ensemble des morphismes de A dans B et pour trois objets A, B, $C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, on a une loi de composition

$$\mathrm{Mor}(B, C) \times \mathrm{Mor}(A, B) \to \mathrm{Mor}(A, C)$$

satisfaisant les axiomes suivants :

- ◇ Deux ensembles $\mathrm{Mor}(A, B)$ et $\mathrm{Mor}(A', B')$ sont disjoints sauf si $A = A'$ et $B = B'$, et dans ce cas ils sont égaux ;
- ◇ Pour tout objet A de $\mathcal{C}$, il existe un morphisme $\mathrm{id}_A \in \mathrm{Mor}(A, A)$ qui agit comme l'identité à droite et à gauche pour les éléments respectivement de $\mathrm{Mor}(A, B)$ et $\mathrm{Mor}(B, A)$, pour tout objet $B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$;
- ◇ La loi de composition est associative (quand elle est définie), *i.e.* étant donnés $f \in \mathrm{Mor}(A, B)$, $g \in \mathrm{Mor}(B, C)$ et $h \in \mathrm{Mor}(C, D)$ alors

  $$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f),$$

  pour tout objets A, B, C, D de $\mathcal{C}$.

Exemple 3.4. L'ensemble VB_M des fibrés vectoriels sur une variété M (objets) est une catégorie dont les morphismes sont les éléments de $\mathrm{Mor}(\pi, \eta)$, pour π et η des fibrés vectoriels. De même, l'ensemble $\mathrm{Mod}_{pf} C^\infty(M)$ des $C^\infty(M)$-modules projectifs de type fini (objets) est une catégorie dont les morphismes sont les éléments de $\mathrm{Hom}_{C^\infty(M)}(P, Q)$, pour P et Q des $C^\infty(M)$-modules projectif de type fini.

Définition 3.12 (Foncteur)**.** Un **foncteur** $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ d'une catégorie $\mathcal{C}$ dans une catégorie $\mathcal{D}$ est la donnée d'une fonction qui à tout objet A de $\mathcal{C}$ associe un objet $F(A)$ de $\mathcal{D}$ et à tout morphisme $f : A \to B$ associe un morphisme $F(f) : F(A) \to F(B)$ telle que :

- ◇ Pour tout objet A de $\mathcal{C}$, $F(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{F(A)}$;
- ◇ Si $f : A \to B$ et $g : B \to C$ sont deux morphismes de $\mathcal{C}$, alors

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f).$$

Proposition 3.13. *Si π et η sont des fibrés vectoriels sur une variétés M, alors l'application*

$$\begin{array}{rccc} \Gamma & : & Mor(\pi,\eta) & \to & Hom_{C^\infty(M)}(\Gamma(\pi),\Gamma(\eta)) \\ & & \alpha & \mapsto & \Gamma(\alpha), \end{array}$$

où $\Gamma(\alpha)(s) = \alpha \circ s$, est un foncteur de $Mor(\pi,\eta)$ dans $Hom_{C^\infty(M)}(\Gamma(\pi),\Gamma(\eta))$.

Preuve. En effet, on a bien $\Gamma(\mathrm{id}_\pi) = \mathrm{id}_{\Gamma(\pi)}$ pour tout π, et $\Gamma(\alpha \circ \beta) = \Gamma(\alpha) \circ \Gamma(\beta)$. □

Définition 3.13 (Transformation naturelle)**.** Étant donnée deux foncteurs $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, une **transformation naturelle** $\tau : F \to G$ est une fonction qui à tout object dans $A \in \mathcal{C}$ associe un morphisme τ_A de $\mathcal{D}$ de telle manière que pour tout objets A, B dans $\mathcal{C}$, et tout morphisme $f : A \to B$ dans $\mathcal{C}$ le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{F(f)} & F(B) \\ \tau_A \downarrow & & \downarrow \tau_B \\ G(A) & \xrightarrow{G(f)} & G(B) \end{array}$$

est commutatif. Si pour tout objet A dans $\mathcal{C}$, τ_A est un isomorphisme, alors on dit que τ est **isomorphisme naturel**.

Définition 3.14 (Équivalence de catégories)**.** Une **équivalence de catégories** est la donnée d'une paire de foncteurs,

$$\begin{gathered} F : \mathcal{C} \to \mathcal{D} \\ G : \mathcal{D} \to \mathcal{C} \end{gathered}$$

telle que l'on ait les isomorphismes naturels,

$$\begin{gathered} G \circ F \cong \mathrm{id}_{\mathcal{C}}, \\ F \circ G \cong \mathrm{id}_{\mathcal{D}}. \end{gathered}$$

Théorème 3.2. *Soient π, η deux fibrés vectoriels sur une variété lisse M. Le foncteur Γ détermine une bijection entre $Mor(\pi,\eta)$ et $Hom_{C^\infty(M)}(\Gamma(\pi),\Gamma(\eta))$.*

Preuve. On veut prouver que pour tout $C^\infty(M)$-morphisme de modules $F : \Gamma(\pi) \to \Gamma(\eta)$, il existe un unique morphisme de fibré vectoriel $\varphi : \pi \to \eta$ tel que $\Gamma(\varphi) = F$.

Commençons par montrer l'unicité. Supposons que φ, $\psi \in \mathrm{Mor}(\pi, \eta)$ sont deux morphismes tels que $\Gamma(\varphi) = \Gamma(\psi)$. Donc pour toute section $s \in \Gamma(\pi)$, $\varphi \circ s = \psi \circ s$. Or selon la Proposition 3.8, tout point dans E_π peut s'écrire sous la forme $s(x)$ avec $x \in M$, ce qui implique que $\varphi = \psi$.

Considérons désormais $F : \Gamma(\pi) \to \Gamma(\eta)$ et montrons maintenant l'existence. Toujours d'après la Proposition 3.8, si $y \in E_\pi$, alors y appartient à une certaine fibre π_x et il existe une section $s \in \Gamma(\pi)$ telle que $s(x) = y$. Ainsi on pose l'application φ de E_π dans E_η qui à y associe $\varphi(y) = F(s)(x)$. Il nous faut vérifier (a) que φ est bien définit, (b) que φ est un morphisme de fibrés et (c) qu'on a bien l'égalité $\Gamma(\varphi) = F$.

(a) Si s_1 et s_2 sont deux sections qui vérifient $s_1(x) = s_2(x)$, alors la Proposition 3.8 nous donne que $s_1 - s_2 \in \mu_x \Gamma(\pi)$. Par conséquent, $F(s_1 - s_2) \in \mu_x \Gamma(\eta)$ et $F(s_1) = F(s_2)$.

(b) Nous prouvons ici uniquement que φ est lisse. Pour cela il suffit de prouver que pour un ouvert $U \subset M$, $\varphi_U = \varphi_{|\pi^{-1}(U)}$ est lisse. On remarque que $\varphi_U(t(x)) = F_U(t)(x)$, où $t \in \Gamma(\pi_{|U})$ et $F_U : \pi_{|U} \to \eta_{|U}$ est la localisation du morphisme F sur l'ouvert U. En choisissant une base des $C^\infty(U)$-modules libres $\Gamma(\pi_{|U})$ et $\Gamma(\eta_{|U})$, on peut écrire le morphisme F_U comme une matrice à coefficients dans $C^\infty(U)$. Or cette même matrice donne une représentation du morphisme φ_U (Lemme 2). Ainsi φ_U est lisse.

(c) Pour toute section $s \in \Gamma(\pi)$ et tout point $x \in M$ on a

$$(\Gamma(\varphi)(s))(x) = (\varphi \circ s)(x) = \varphi(s(x)) = F(s)(x),$$

donc $\Gamma(\varphi)(s) = F(s)$. $\square$

Théorème 3.3. *Soit M une variété connexe. Un $C^\infty(M)$-module P est isomorphe à un module de sections $\Gamma(\pi)$ d'un fibré vectoriel lisse π sur M si et seulement si P est projectif de type fini.*

Preuve. (i) On se rappelle que $\Gamma(\pi)$ est un module de type fini (Corollaire 3.3) et montrons qu'il est également projectif. Étant de type fini, il existe un ensemble fini de sections $s_1, \cdots, s_N$ qui génère le module $\Gamma(\pi)$. Soit Q un $C^\infty(M)$-module libre de rang N avec générateurs $e_1, \cdots, e_N$ et $F : Q \to \Gamma(\pi)$ le morphisme tel que $F(e_i) = s_i$ pour $i = 1, \cdots, N$. Par construction, F est surjectif. On remarque que $Q = \Gamma(\eta)$ pour un certain fibré vectoriel trivial η. Donc par le Théorème 3.2, il existe un morphisme de fibré $\varphi \in \mathrm{Mor}(\eta, \pi)$ tel que $F = \Gamma(\varphi)$.

De plus la Proposition 3.8 implique que pour tout point $z \in M$, l'application φ_z est surjective. Ainsi, on peut appliquer la Proposition 3.1, qui nous donne que $\ker \varphi$ est un sous-fibré de η. Donc par la Proposition 3.2, il existe un sous-fibré ζ de η tel que $\eta = \ker \varphi \oplus \zeta$. Or la Proposition 3.9 implique que $\Gamma(\eta) = \Gamma(\ker \varphi) \oplus \Gamma(\zeta)$, donc par la Proposition 3.11, $\Gamma(\zeta)$ est un module projectif.

Il nous faut maintenant vérifier que l'application restreinte à l'espace total du sous-fibré ζ donne un isomorphisme entre ζ et π. En effet, $\varphi_z : \zeta_z \to \pi_z$ est isomorphisme linéaire pour tout point $z \in M$, et on peut utiliser le Lemme 3. L'isomorphisme de fibrés $\zeta \cong \pi$ implique l'isomorphisme de modules $\Gamma(\zeta) \cong \Gamma(\pi)$. Donc $\Gamma(\pi)$ est bien un module projectif.

(ii) Prouvons maintenant que tout module projectif de type fini est isomorphe au module de sections d'un fibré vectoriel lisse. Supposons que P est un $C^\infty(M)$-module projectif de type fini. Alors par la Proposition 3.11 et la remarque 3.2, on peut écrire $\Gamma(\eta) = P' \otimes Q$, où η désigne un fibré vectoriel trivial sur une variété M et P' et Q sont des sous-modules de $\Gamma(\eta)$ avec $P' \cong P$. Dans la suite pour alléger les notations, on se permettra d'écrire P au lieu de P'.

Soit $z \in M$, on pose $P_z = \{p(z) \mid p \in P\}$. C'est un $\mathbb{R}$-sous-espace vectoriel de η_z. Le sous-espace Q_z est défini de manière similaire. On affirme que $\eta_z = P_z \otimes Q_z$. En effet, prenons $y \in \eta_z$. On choisit une section $s \in \Gamma(\eta)$ telle que $s(z) = y$ que l'on écrit $s = p + q$, avec $p \in P$ et $q \in Q$. Alors $y = p(z) + q(z) \in P_z + Q_z$. Supposons désormais que $y \in P_z \cap Q_z$, *i.e.* $y = p(z) = q(z)$, où $p \in P$ et $q \in Q$. Alors $(p - q)(z) = 0$, ainsi par la proposition 3.8 on a

$$p - q = \sum_i f_i s_i = \sum_i f_i p_i + \sum_i f_i q_i$$

pour des certains $f_i \in \mu_z$, $p_i \in P$, $q_i \in Q$. Puisque $P \cap Q = 0$, la dernière équation implique que $p = \sum_i f_i p_i$. En particulier on a $y = p(z) = 0$ et donc on peut conclure que $\eta_z = P_z \otimes Q_z$.

On veut maintenant vérifier que l'union des tous les sous-espace P_z constitue un sous-fibré dans η et que P coïncide avec le module de ses sections lisses. Montrons tout d'abord que dim P_z ne dépend pas de z. Si dim $P_z = r$ pour un certain point $z \in M$, alors on on considère $p_1, ..., p_r \in P$ l'ensemble des sections dont l'évaluation en z engendrent P_z. La continuité des sections implique l'indépendance linéaire des vecteurs $p_1(y), ..., p_r(y)$ pour tout point y dans un voisinage U du point z. Donc dim$P_y \geqslant$ dim P_z

Un argument similaire pour le sous-module Q montre que dim $Q_y \geqslant$ dim Q_z dans un voisinage de z. Puisque la somme dim P_y + dim Q_y est constante, on a que dim P_y est une fonction localement constante. Or M étant connexe, la fonction est globalement constante.

On souhaite désormais prouver que le sous-espace P_z vu en tant que point de $G_{V,r}$, où V est une fibre de η, dépend de manière lisse de z (ici, étant donné que l'on est dans le cadre de considération locale, on peut supposer que η est un fibré vectoriel trivial). En effet, soit $p_1(a), ..., p_r(a)$ une base de l'espace P_a pour un certain point $a \in M$. Alors les vecteurs $p_1(z), ..., p_r(z)$ forment une base de l'espace vectoriel P_z pour tout point z dans un voisinage de a. On remarque que la famille P_z possède localement une base qui dépend de manière lisse de z, et donc représente une famille lisse de points dans la Grassmanienne $G_{V,r}$.

On note π le fibré ayant pour fibres P_z. Par construction, $P \subset \Gamma(\pi)$. Prouvons l'inclusion inverse. Si $s \in \Gamma(\pi) \subset \Gamma(\eta)$, alors on a des éléments $p \in P$ et $q \in Q$ tels que $s = p + q$. Puisque $P_z \cap Q_z = 0$, l'équation $p(z) + q(z) = s(z)$ implique que $q(z) = 0$ pour tout point z dans M. Donc $q = 0$ et $s = p \in P$. En conclusion, on a bien montré que $P = \Gamma(\pi)$, ce qui complète la preuve.

□

Ainsi en combinant les Théorèmes 3.2 et 3.3, on arrive au Théorème de Serre-Swan :

Théorème 3.4 (Serre-Swan). *On a une équivalence de catégories entre la catégorie VB_M des fibrés vectoriels sur une variété M et la catégorie $Mod_{pf}C^\infty(M)$ des $C^\infty(M)$-modules projectifs de type fini.*

3.6 Produit tensoriel de fibrés vectoriels

Étant donnés un anneau commutatif A et deux A-modules M, N, dans cette section on s'intéresse au **produit tensoriel** de M et N, noté $M \otimes N$. Une définition formelle est donnée dans [4] mais nous, nous contenterons de considérer $M \otimes N$ comme étant l'unique module, à isomorphisme près tel que $\mathrm{Bil}((M,N),P) \cong \mathrm{Hom}_A(M \otimes N, P)$ pour tout A-module P (ici $\mathrm{Bil}((M,N),P)$ désigne l'ensemble des application bilinéaires (au sens des modules) de (M,N) dans P). Dans [2] (5.3), une approche plus géométrique de la notion de produit tensoriel est proposée.

Proposition 3.14. *Soient M, N et P, trois A-modules. On a*

$$Hom_A(M, Hom_A(N,P)) \underset{(*)}{\cong} Bil((M,N),P) \cong Hom_A(M \otimes N, P)$$

Preuve. L'isomorphisme $(*)$ est donnée par le morphisme

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_A(N,P)) & \to & \mathrm{Bil}((M,N),P) \\ f & \mapsto & ((m,n) \mapsto f(m)(n)) \\ (m \mapsto (n \mapsto b(m,n))) & \leftarrow\!\shortmid & b. \end{array}$$

□

Dans [1], on trouve également une preuve du résultat suivant.

Proposition 3.15. *Le produit tensoriel de deux modules projectifs sur un anneau commutatif est un est module projectif.*

Définition 3.15. Soient η et ς deux fibrés vectoriels sur une variété M. On définit le fibré vectoriel $\pi = \eta \otimes \varsigma$, de sorte que pour tout $z \in M$, $\pi^{-1}(\{z\}) = \pi_z = \eta_z \otimes \varsigma_z$. L'espace total est alors définit par $E_\pi = \bigcup_{z \in M} \pi_z$.

Remarque 3.4. La structure de variété lisse de E_π, permettant de réaliser l'axiome de trivialisation local, est détaillée dans [1]. Ainsi, $\pi = \eta \otimes \varsigma : E_\pi \to M$ définit bien un fibré vectoriel sur M d'espace total E_π.

Lemme 5. *Soient V et W deux espaces vectoriels sur un certain corps $\mathbb{K}$. Supposons que $v_i \in V$ et $w_i \in W$, $1 \leqslant i \leqslant m$, sont des vecteurs non nuls tels que dans $V \otimes W$*

$$\sum_{i=1}^{m} v_i \otimes w_i = 0.$$

Alors il existe un entier k, $1 \leqslant k < m$, et des scalaires $a_{i,j} \in \mathbb{K}$ avec $1 \leqslant i \leqslant k$ et $k < j \leqslant m$, tels que, quitte à réindicer on ait

$$v_j = \sum_{i=1}^{k} a_{i,j} v_i, \quad j = k+1, \cdots, m;$$

$$w_i = -\sum_{j=k+1}^{m} a_{i,j} w_j, \quad i = 1, \cdots, k.$$

Preuve. On remarque tout d'abord que les vecteurs $v_1, ...v_m$ ne forment pas une famille linéairement indépendante. En effet dans le cas contraire, alors l'égalité $\sum_{i=1}^m v_i \otimes w_i = 0$ entraîne que les w_i sont tous nuls, ce qui est faux par hypothèse. Ainsi on extrait de $v_1, ...v_m$ une famille maximale de vecteurs linéairement indépendants. Quitte à réindicer, on considère $v_1, ...v_k$ une telle famille, avec $1 \leqslant k < m$. Pour tout $j = k+1, \cdots, m$, on écrit ainsi $v_j = \sum_{i=1}^k a_{i,j} v_i$, avec $a_{i,j} \in \mathbb{K}$. Alors on a

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^{m} v_i \otimes w_i \\ &= \sum_{i=1}^{k} v_i \otimes w_i + \sum_{j=k+1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{k} a_{i,j} v_i \right) \otimes w_j \\ &= \sum_{i=1}^{k} v_i \otimes \left(w_i + \sum_{j=k+1}^{m} a_{i,j} w_j \right). \end{aligned}$$

En conclusion, on a bien $w_i = -\sum_{j=k+1}^m a_{i,j} w_j$, pour $1 \leqslant i \leqslant k$. □

Théorème 3.5. *Le foncteur Γ préserve les produits tensoriels et les homomorphismes, i.e.*

$$\Gamma(\pi \otimes \eta) \cong \Gamma(\pi) \otimes \Gamma(\eta)$$
$$\Gamma(Mor(\pi, \eta)) \cong Hom_{C^\infty(M)}(\Gamma(\pi), \Gamma(\eta)),$$

pour tous fibrés vectoriels π et η sur une variété M.

Preuve. On se propose de construire une application de $\Gamma(\pi) \otimes \Gamma(\eta)$ dans $\Gamma(\pi \otimes \eta)$ et de vérifier que c'est un isomorphisme. Soit $s \in \Gamma(\pi)$ et $t \in \Gamma(\eta)$. On définit la section $s \otimes t$ par $(s \otimes t)(x) = s(x) \otimes t(x)$, pour tout x dans M. Par construction de $\pi \otimes \eta$, on constate que $s \otimes t$ une section lisse de $\pi \otimes \eta$. De plus, l'application $s \otimes t \mapsto (s, t)$ induit un $C^\infty(M)$-morphisme $\iota : \Gamma(\pi) \otimes \Gamma(\eta) \to \Gamma(\pi \otimes \eta)$

Montrons que pour tout $x \in M$,

$$\iota_x : \left[\sum s_i \otimes t_i \right] = \sum s_i(x) \otimes t_i(x),$$

où les crochets représente la classe d'équivalence dans l'espace quotient.

(i) Surjectivité de ι_x. Un élément arbitraire de l'espace $\pi_x \otimes \eta_x$ est de la forme $\sum y_i \otimes z_i$ avec $y_i \in \pi_x$, $z_i \in \eta_x$. Par la Proposition 3.8, il existe des sections $s_i \in \Gamma(\pi)$, $t_i \in \Gamma(\eta)$ qui prennent respectivement les valeurs y_i et z_i au point x. Alors on a bien $\iota_x \left[\sum s_i \otimes t_i \right] = \sum y_i \otimes z_i$

(ii) Injectivité de ι_x. On doit montrer que si $s_i \in \Gamma(\pi)$, $t_i \in \Gamma(\eta)$ et $\sum s_i(x) \otimes t_i(x) = 0$ dans l'espace $\pi_x \otimes \eta_x$, alors il existe des sections $p_i \in \Gamma(\pi)$, $q_i \in \Gamma(\eta)$ est des fonctions $f_i \in \mu_x$ telles que $\sum s_i \otimes t_i = \sum f_i p_i \otimes q_i$ (égalité dans $\Gamma(\pi) \otimes \Gamma(\eta)$).

En appliquant le Lemme 5, on obtient

$$\begin{aligned} s_j &= \sum_{i=1}^{k} a_{i,j} s_i + s'_j, \quad j = k+1, \cdots, m; \;\; s'_j \in \mu_x \Gamma(\pi) \\ t_i &= - \sum_{j=k+1}^{m} a_{i,j} t_j + t'_i, \quad i = 1, \cdots, k; \;\; t'_i \in \mu_x \Gamma(\eta). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} s_i \otimes t_i &= \sum_{i=1}^{k} s_i \otimes \Big(- \sum_{j=k+1}^{m} a_{i,j} t_j + t'_i \Big) + \sum_{j=k+1}^{m} \Big(\sum_{i=1}^{k} a_{i,j} s_i + s'_j \Big) \otimes t_j \\ &= \sum_{i=1}^{k} s_i \otimes t'_i + \sum_{j=k+1}^{m} s'_j \otimes t_j \in \mu_x (\Gamma(\pi) \otimes \Gamma(\eta)), \end{aligned}$$

comme on voulait montrer.

Le deuxième résultat du théorème est une conséquence du lemme suivant

Lemme 6. *Soient M, N deux A-modules projectif de type fini, alors*

$$M^* \otimes N \cong Hom_A(M, N)$$

où $M^* = Hom_A(M, A)$.

Preuve. L'isomorphisme est donné par l'application $\sigma : M^* \otimes N \to \mathrm{Hom}_A(M, N)$ définit par $\sigma(p^* \times q)(p) = p^*(p)q$. □

En appliquant ainsi ce lemme, on a

$$\mathrm{Mor}(\pi, \eta) \cong \pi^* \otimes \eta \text{ et } \mathrm{Hom}_{C^\infty(M)}(\Gamma(\pi), \Gamma(\eta)) \cong \Gamma(\pi^*) \otimes \Gamma(\eta).$$

Donc en utilisant le premier point du théorème et le l'identification $\pi^{**} = \pi$, on conclut

$$\Gamma(Mor(\pi, \eta)) \cong \Gamma(\pi^* \otimes \eta) \cong \Gamma(\pi^*) \otimes \Gamma(\eta) \cong Hom_{C^\infty(M)}(\Gamma(\pi), \Gamma(\eta)).$$

□

Références

[1] Jet Nestruev, *Smooth manifolds and observables*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 220, Springer-Verlag, New York, 2003. Joint work of A. M. Astashov, A. B. Bocharov, S. V. Duzhin, A. B. Sossinsky, A. M. Vinogradov and M. M. Vinogradov ; Translated from the 2000 Russian edition by Sossinsky, I. S. Krasil′schik and Duzhin. MR1930277

[2] Jacques Lafontaine, *An introduction to differential manifolds*, 2nd ed., Springer, Cham, 2015. MR3379533

[3] Steve Awodey, *Category theory*, 2nd ed., Oxford Logic Guides, vol. 52, Oxford University Press, Oxford, 2010. MR2668552

[4] Serge Lang, *Algebra*, 3rd ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 211, Springer-Verlag, New York, 2002. MR1878556

[5] Saunders MacLane, *Categories for the working mathematician*, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1971. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 5. MR0354798