Institut Fourier

**Projet de fin d'étude du Magistère**

# Étude d'$A_\infty$-algèbre

Beraud Jordan

Encadré par Herscovich Estanislao

Année 2021

# Table des matières

.

# 1 Introduction

La notion de $A_\infty$-algèbre a été inventé dans les années 1960 par Stasheff pour étudier des groupes intervenant dans les espaces topologiques. Ce concept provient initialement de la généralisation de groupe topologique appelé $H$-espace dont la propriété principale est l'existence d'une application continue $\mu : X \times X \to X$ et d'un élément neutre $e \in X$ tel que $\mu(-, e)$ et $\mu(e, -)$ soit homotope à l'identité. Les exemples les plus simples de $H$-espaces sont les sphères $S^0, S^1, S^3$ et $S^7$. Un théorème célébre dut à Adams montre que les espaces précédents sont les seules sphères qui portent/possèdent une structure de $H$-espace. D'un point de vue de la théorie de l'homotopie, ce qui rend ces espaces importants, ce n'est pas l'existence d'un inverse continu, mais plutôt l'associativité de la multiplication. L'existence de certain espace projectifs repose sur l'associativité d'opérations qui interviennent dans ces $H$-espaces d'où l'importance d'étudier ce mécanisme d'associativité.

En 1953, Milnor a réussi à construire un espace projectif pour un groupe topologique quelconque puis cela a été généralisé pour un $H$-espace associative arbitraire en 1956 par Dold et Lashof. Mais, en 1957 Sugawara a montré qu'on pouvait faire la construction de Milnor pour un $H$-espace dont la multiplication n'est pas exactement associative mais associative à homotopie près. C'est cette idée de ne plus regarder des opérations associatives mais associatives à homotopie près qui est l'essence de la définition d'une structure d'$A_\infty$-algèbre.

Dans ce mémoire, on commencera par deux parties où on fera des rappels sur le produit tensoriel et l'homologie. Dans une troisième partie, on verra ce qu'est exactement une $A_\infty$-algèbre puis on définira des outils qui nous permettrons de prouver le théorème de Kadeishvili et on finira cette partie sur la construction de Merkulov pour une $dg$-algèbre. Dans la quatrième partie, on sort du cadre purement théorique pour donner quelques exemples généraux d'$A_\infty$-algèbres. Dans les deux dernières parties, on utilisera les parties précédentes pour montrer qu'on peut mettre une structure d'$A_\infty$-algèbre sur l'algèbre Ext et on introduira la théorie de Morse dans une optique de l'appliquer sur un exemple en vu de calculer une telle structure sur un exemple concret.

## 2 Rappel sur le produit tensoriel

*Dans cette section, on rappel la notion de produit tensoriel que nous utiliserons constamment par la suite. Pour voir des démonstrations des propositions énoncés, voir [1].*

Soit A un anneau commutatif.

**Définition 2.1.** Un produit tensoriel des $A$-modules $M_1, \cdots, M_n$ est un couple $(T, \tau)$, où $T$ est un $A$-module et $\tau : M_1 \times \cdots \times M_n \to T$ est une application $n$-linéaire satisfaisant le propriété universelle suivante :

pour tout $A$-module $N$ et tout $\varphi \in \mathrm{Mult}_n(M_1, \cdots, M_n; N)$, il existe une unique application linéiare $f : T \to N$ telle que le diagramme

$$\begin{tikzcd} M_1 \times \cdots \times M_n \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\tau"'] & N \\ T \arrow[ur, dashed, "\exists!\ f"'] & \end{tikzcd}$$

commute, c'est-à-dire que $\varphi = f \circ \tau$.

**Définition 2.2.** Deux produit tensoriels $(T_1, \tau_1)$ et $(T_2, \tau_2)$ de $M_1, \cdots, M_n$ sont dit isomorphes s'il existe un isomorphisme de $A$-modules $f : T_1 \to T_2$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} M_1 \times \cdots M_n \arrow[r, "\tau_1"] \arrow[d, "\tau_2"'] & T_1 \arrow[dl, "f"] \\ T_2 & \end{tikzcd}$$

commute.

**Proposition 2.3.** *Soient $(T_1, \tau_1)$ et $(T_2, \tau_2)$ deux produit tensoriels de $M_1, \cdots, M_n$. Alors il existe un unique isomorphisme de produits tensoriels $f : T_1 \to T_2$.*

On notera $M_1 \otimes \cdots \otimes M_n$ ce produit tensoriels.

**Proposition 2.4.** *Soient $M_1, M_1', \cdots, M_n, M_n'$ des A-modules. Pour toute application linéaire $f_i : M_i \to M_i'$, il existe une unique application linéaire*

$$f_1 \otimes \cdots f_n : M_1 \otimes \cdots \otimes M_n \longrightarrow M_1' \otimes \cdots \otimes M_n'$$

*vérifiant $(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n)(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = f_1(x_1) \otimes \cdots \otimes f_n(x_n)$ pour tout $x_i \in M_i$.*

**Remarque.** Dans la suite, nous utiliserons une convention de signe qui imposera des signes lorsque l'on ferra le produit tensoriel d'application.

**Proposition 2.5.** *Soient $M_1, \cdots, M_n, M$ des A-modules, et supposons que $M = \bigoplus_{i \in I} N_i$. Alors, à isomorphisme près, on a :*

$$M_1 \otimes \cdots \otimes M_n \otimes M = \bigoplus_{i \in I} M_1 \otimes \cdots \otimes M_n \otimes N_i.$$

**Proposition 2.6.** *Soient $M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M_i$ et $N = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} N_i$ deux A-modules. Alors, à isomorphisme près, on a :*

$$M \otimes N = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} (M \otimes N)_n$$

*où $(M \otimes N)_n = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M_i \otimes N_{n-i}$.*

**Définition 2.7.** Soit $M$ un $A$-module. Une algèbre tensorielle sur $M$ est un couple $(\mathcal{T}, \theta)$, où $\mathcal{T}$ est une $A$-algèbre associative unitaire et $\theta : M \to \mathcal{T}$ est une application linéaire vérifiant la propriété universelle suivante : pour toute $A$-algèbre associative unitaire $\mathcal{B}$, et pour toute application linéaire $f : M \to \mathcal{B}$, il existe un unique morphisme de $A$-algèbres $\varphi : \mathcal{T} \to \mathcal{B}$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\theta"'] & \mathcal{B} \\ \mathcal{T} \arrow[ur, dashed, "\exists!\ \varphi"'] & \end{tikzcd}$$

commute.

**Définition 2.8.** Deux algèbres tensorielles $(\mathcal{T}_1, \theta_1)$ et $(\mathcal{T}_2, \theta_2)$ sur $M$ sont dite isomorphes s'il existe un isomorphisme d'algèbres $f : \mathcal{T}_1 \to \mathcal{T}_2$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\theta_1"] \arrow[d, "\theta_2"'] & \mathcal{T}_1 \arrow[dl, "f"] \\ \mathcal{T}_2 & \end{tikzcd}$$

commute.

**Proposition 2.9.** *Soient deux algèbres tensorielles $(\mathcal{T}_1, \theta_1)$ et $(\mathcal{T}_2, \theta_2)$ sur $M$. Alors, il existe un unique isomorphisme d'algèbre tensorielles*

$$f : \mathcal{T}_1 \to \mathcal{T}_2.$$

On notera $T(M) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} M^{\otimes n}$, avec $M^{\otimes 0} = A$.

**Proposition 2.10.** *Soit $M$ un $A$-module. On peut munir $T(M)$ d'une structure de $A$-algèbre vérifiant*

$$(x_1 \otimes \cdots x_p) \cdot (x_{p+1} \otimes \cdots \otimes x_{p+n}) = x_1 \otimes \cdots \otimes x_{p+n}$$

*pour tout $x_1, \cdots, x_{p+n} \in M$.*
*De plus, $(T(M), i_M)$ est une algèbre tensorielle sur $M$ où $i_M$ est l'inclusion de $M$ dans $T(M)$.*

# 3 Homologie

*Dans cette section, on définit les bases de l'algèbre homologique dont nous aurons besoin par la suite.*

**Définition 3.1.** Soit $A$ un anneau, $\{M_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ une famille de $A$-module et $\{\partial_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ une famille de homomorphisme $\partial_i : M_i \to M_{i-1}$. Alors

$$M_\bullet : \ldots \longrightarrow M_{i+1} \xrightarrow{\partial_{i+1}} M_i \xrightarrow{\partial_i} M_{i-1} \longrightarrow \ldots$$

est appelé un complexe si $\partial_i \circ \partial_{i+1} = 0$ pour tout $i$. On utilisera la notation $M_\bullet$ pour désigner un complexe et par abus de notation que $\partial^2 = 0$. On notera aussi $H_i(M_\bullet) = ker\ \partial_i / im\ \partial_{i+1}$ qui est en particulier un $A$-module bien définie appelé $i$-ème holomogie de $M_\bullet$. Enfin, on pose $H(M_\bullet) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} H_i(M_\bullet)$.

**Définition 3.2.** Soit $M_\bullet$, $M'_\bullet$ deux complexes. Une application $\psi : M_\bullet \to M'_\bullet$ est la donnée d'homomorphisme $(\psi_i)$ tel que $\psi : M_i \to M'_i$ et le diagramme suivant commute.

$$\begin{tikzcd} \ldots \arrow[r] & M_{i+1} \arrow[r, "\partial_{i+1}"] \arrow[d, "\psi_{i+1}"] & M_i \arrow[r, "\partial_i"] \arrow[d, "\psi_i"] & M_{i-1} \arrow[r] \arrow[d, "\psi_{i-1}"] & \ldots \\ \ldots \arrow[r] & M'_{i+1} \arrow[r, "\partial'_{i+1}"] & M'_i \arrow[r, "\partial'_i"] & M'_{i-1} \arrow[r] & \ldots \end{tikzcd}$$

**Proposition 3.3.** *Soit $M_\bullet$, $M'_\bullet$ deux complexes. Alors une application $\psi : M_\bullet \to M'_\bullet$ induit une application $\psi^i_* : H_i(M_\bullet) \to H_i(M'_\bullet)$ donné par $\psi^i_*(a + im\ \partial_{i+1}) = \psi_i(a) + im\ \partial'_{i+1}$.*

*Démonstration.* En utilisant les relation $\psi_i \circ \partial_{i+1} = \partial'_{i+1} \circ \psi_{i+1}$, on voit que l'application est bien définie. □

**Définition 3.4.** Soit $M_\bullet$, $M'_\bullet$ deux complexes et $\psi : M_\bullet \to M'_\bullet$. $\psi$ est un quasi-isomorphisme si $\psi^i_*$ est un isomorphisme pour tout $i$.

**Définition 3.5.** Soit $M_\bullet$, $M'_\bullet$ deux complexes et $\varphi, \psi : M_\bullet \to M'_\bullet$. Une homotopie entre $\varphi$ et $\psi$ est une famille d'homomorphisme $s_i : M_i \to M'_{i-1}$ tel que $\psi_i - \varphi_i = s_{i-1} \circ \partial_i + \partial_{i+1} \circ s_i$.

Dans ce cas, on dira que $\varphi$ et $\psi$ sont équivalent ( à homotopie près).

**Proposition 3.6.** *Si $\varphi, \psi : M_\bullet \to M'_\bullet$ sont équivalent alors elles induisent les mêmes applications sur l'homologie.*

*Démonstration.* Il suffit de l'écrire et voir qu'en passant aux classes les termes de droites s'annulent. □

**Remarque.** On utilisera le terme co$\cdots$, lorsqu'on retournera le sens des flèches . Par exemple, un cocomplexe noté $M^\bullet$ sera la donnée $\partial_i : M_{i-1} \to M_i$. On notera aussi $H^i(M^\bullet)$ la $i$-ème coholomogie du cocomplexe. Les propositions faites pour les complexes s'adapte aux cocomplexes de façon évidente.

# 4 $A_\infty$ Algèbre

*Dans cette section, on va définir ce qu'est une $A_\infty$ Algèbre puis on va définir la construction bar pour ensuite prouvé le théorème de Kadeishvili. On concluera sur la construction de Merkulov. On s'est appuyé sur [2, 3, 4]*

## 4.1 Définition

**Définition 4.1.** Soit $I$ un ensemble. Un espace vectoriel $I$-gradué est un espace vectoriel $V$ qui peut s'écrire sous la forme

$$V = \bigoplus_{i \in I} V_i$$

où $V_i$ est un espace vectoriel. On appellera un élément $v \in V_i$, un élément homogène de degré $i$ et on notera $|v| = i$.

**Définition 4.2.** Soit $V = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} V_i,\ \ V' = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} V'_i$ des espaces vectoriels $\mathbb{Z}$-gradué et $f : V \to V'$ une application linéaire. On dira que $f$ est gradué de degré $i$ si $|f(v)| = |v| + i$ pour tout $v \in V$ homogène. On notera $|f|$ sont degré.

**Définition 4.3.** Soit $k$ un corps. Une $A_\infty$-algèbre sur $k$ est un espace vectoriel $\mathbb{Z}$-gradué

$$A = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} A_n$$

avec des applications

$$m_n : A^{\otimes n} \to A$$

de degré $2 - n$ vérifiant les relations
- $m_1 m_1 = 0$.
- $m_1 m_2 = m_2(m_1 \otimes 1 + 1 \otimes m_1)$.

• $m_2(1 \otimes m_2 - m_2 \otimes 1) = m_1 m_3 + m_3(m_1 \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes m_1 \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes m_1)$.
• Plus généralement, pour $n \geq 1$ :

$$St_n^m : \sum_{\substack{r+s+t=n \\ r,t \geq 0 \\ s \geq 1}} (-1)^{r+st} m_{r+1+t}(1^{\otimes r} \otimes m_s \otimes 1^{\otimes t}) = 0.$$

**Remarque.** On utilisera la règle de Koszul pour les signes :

$$(f \otimes g)(x \otimes y) = (-1)^{|g||x|} f(x) \otimes g(y)$$

où $f$ et $g$ sont gradué.

**Remarque.** Si on prend $f_1, g_1, f_2, g_2$ des applications graduées et sous réserve que les compositions ont un sens, la règle de Koszul donne

$$(f_1 \otimes g_1) \circ (f_2 \otimes g_2) = (-1)^{|f_2||g_1|}(f_1 \circ f_2) \otimes (g_1 \circ g_2)$$

**Proposition 4.4.** *Soit $M_\bullet$, $M'_\bullet$ deux complexes de k-espace vectoriels. On note $M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M_i$, $M' = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M'_i$, $\partial_M : M \to M$ l'application qui vaut $\partial_i$ sur $M_i$ et $\partial_{M'} : M' \to M'$ l'application qui vaut $\partial'_i$ sur $M'_i$. On a que $M \otimes M'$ est $\mathbb{Z}$-gradué, $\partial_M, \partial_{M'}$ sont de degré -1 et $(M \otimes M')_\bullet$ est un complexe munit de l'application $\delta = \partial_M \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \partial_{M'}$*

*Démonstration.* On a

$$\begin{aligned} \delta^2 &= \partial_M^2 \otimes \mathbb{1} + \partial_M \otimes \partial_{M'} + (-1)^{|\partial_M||\partial M'|} \partial_M \otimes \partial_{M'} + \mathbb{1} \otimes \partial_{M'}^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

car $|\partial_M| = |\partial_{M'}| = -1$ et $\partial_M^2 = \partial_{M'}^2 = 0$.
Les autres points sont direct. □

**Remarque.** D'après la proposition précédente, on peut écrire la règle de Koszul pour $n$ fonctions :

$$(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n)(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = (-1)^{|x_1|(|f_2|+\cdots+|f_n|)+\cdots+|x_{n-1}||f_n|}(f_1(x_1) \otimes \cdots f_n(x_n)).$$

En particulier, $f_1 \otimes \cdots \otimes f_n$ est de degré $|f_1| + \cdots + |f_n|$.

**Proposition 4.5.** *Soit $A$ une $A_\infty$-algèbre. Alors la cohomologie $H(A^\bullet) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} H_i(A^\bullet)$ est une algèbre graduée associative. Si $A_i = 0$ pour $i \neq 0$ alors $A$ est une algèbre associative.*

*Démonstration.* Tout d'abord, on remarque que $m_2$ munit $A$ d'une structure d'algèbre [1] dont le défaut d'associativité est mesuré par $St_3^m$. Comme $m_1$ est 1-gradué et $m_1^2 = 0$ on a le cocomplexe suivant.

$$A^\bullet : \ldots \longrightarrow A_{i-1} \xrightarrow{m_1} A_i \xrightarrow{m_1} A_{i+1} \longrightarrow \ldots$$

On note $\overline{m_2} : H(A^\bullet) \times H(A^\bullet) \to H(A^\bullet)$ l'application tel que

$$\overline{m_2}(a, b) = m_2(a \otimes b)$$

où on a appliqué les classes aux début et à l'arrivée. Montrons que cette application est bien définie [2] et vérifie les propriétés voulues.

1. L'application évidente $A \times A \to A \otimes A \to A$ donne cette structure.
2. On vérifie la définition sur les différentes composantes de $H(A^\bullet)$ et on la prolonge par bi-linéarité a $H(A^\bullet)$

Soit $a = m_1(z) \in Im(A_{i-1} \to A_i)$, $b = m_1(z') \in Im(A_{j-1} \to A_j)$.
On a d'après $St_1^m$ et $St_2^m$ que

$$m_2(m_1(z) \otimes m_1(z')) = m_1(m_2(z \otimes m_1(z')) \in Im(A_{i+j-1} \to A_{i+j})$$

donc l'application passe bien aux classes et est bi-linéaire car $m_2$ et la projection sont linéaire. Donc $(H(A^\bullet), \overline{m_2})$ est une algèbre $\mathbb{Z}$-graduée. L'associativité découle de $St_3^m$ car en passant aux classes, le terme de droite s'annule. □

**Définition 4.6.** Une algèbre différentielle graduée (ou dg algèbre) est un triplet $(A, \partial, \mu)$ tel que $(A, \mu)$ est une $k$-algèbre associative avec $\partial$ gradué de degré 1 satisfaisant :
- $\partial^2 = 0$,
- $\partial \circ \mu = \mu \circ (\partial \otimes 1) + \mu \circ (1 \otimes \partial)$.

**Remarque.** Le point 1 signifie que $A$ peut être vu comme un cocomplexe.
Le point 2 nous dit que $\mu$ respecte le règle de dérivation de Leibniz.

**Proposition 4.7.** *Soit $A$ une $A_\infty$-algèbre. Si $m_n$ est nul pour $n > 2$, alors $A$ est une dg algèbre associative. Et réciproquement, toute dg algèbre associative possède une structure de $A_\infty$-algèbre trivial. ($m_n = 0$ pour $n > 2$)*

*Démonstration.* Il est clair que $(A, m_1, m_2)$ convient. □

**Exemple.** Le premier exemple de dg algèbre gradué que l'on peut rencontrer est celle des formes multilinéaires alternées noté $\Omega^\bullet(\mathbb{R}^k) = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \Omega^i(\mathbb{R}^k)$ dont le produit $\mu$ est celui usuel sur le produit de forme et $\partial$ correspond à la dérivée usuelle de forme. On voit assez facilement que $H(\Omega^\bullet(\mathbb{R}^k)) = \mathbb{R}$.

**Définition 4.8.** Un morphisme $f : A \to B$ de $A_\infty$-algèbre est une famille $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ d'applications telles que les $f_n \in Hom(A^{\otimes n}, A)$ sont de degrés $1 - n$ et vérifient pour tout $n$ l'identité suivante :

$$St_n(f) : \sum_{\substack{r+s+t=n \\ r,t\geq 0 \\ s\geq 1}} (-1)^{r+st} f_{r+1+t}(1^{\otimes r} \otimes m_s \otimes 1^{\otimes t}) = \sum_{q=1}^{n} \sum_{i_1+\cdots+i_q=n} (-1)^{\epsilon(i)} m'_q(f_{i_1} \otimes \cdots \otimes f_{i_q})$$

où $\epsilon(i) = (i_{q-1} - 1) + 2(i_{q-2} - 1) + \cdots + (q-1)(i_1 - 1)$

**Remarque.** On définit aussi des $A_n$-algèbres et des morphismes d'$A_n$-algèbres en imposant les relations $St_i^m$ et $St_i(f)$ pour $i \leq n$. Si $f_i = 0$ pour $i \neq 1$, $f$ est dit strict et si $f_1$ est un isomorphisme alors $f$ est un strict isomorphisme.

**Définition 4.9.** Soit $A = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} A_i$ une $A_\infty$-algèbre. $A$ est dite unitaire s'il existe $\eta_A : k \to A$ de degré 0 tel que

1. $m_i \circ (\mathbb{1}^{\otimes r} \otimes \eta_A \otimes \mathbb{1}^{\otimes t}) = 0$ pour $i \neq 2$ et tout $r, t \geq 0$ tel que $r + 1 + t = i$
2. $m_2(\eta \otimes 1_A) = m_2(1_A \otimes \eta) = 1_A$

On notera $\eta_A(1_k) = 1_A \in A_0$ appelé unité de $A$ (où élément neutre).

**Remarque.** On voit dans la définition qu'une unité de $A$ est unique.
Un morphisme d'$A_\infty$-algèbre unitaire vérifiera en plus les conditions

$$f_n(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = 0$$

pour $n \geq 2$ si $a_i = 1_A$ et

$$f_1(1_A) = 1_B$$

## 4.2 La construction Bar

*On va construire un objet qui va nous permettre de mieux comprendre la structure de $A_\infty$-algèbre. C'est une technique basique qui est utilisé pour étudier les dg algèbre.*

**Définition 4.10.** Soit $k$ un corps. Une cogèbre graduée sur $k$ est un $k$-espace vectoriel $\mathbb{Z}$-gradué $C$ munit d'une application linéaire $\Delta : C \to C \otimes C$ appelé comultiplication qui vérifie :

$$(\mathbb{1}_C \otimes \Delta) \circ \Delta = (\Delta \otimes \mathbb{1}_C) \circ \Delta$$

**Remarque.** On rajoute souvent dans la définition d'une coalgèbre, une application linéaire $\epsilon : C \to k$ vérifiant

$$(\epsilon \otimes \mathbb{1}_C) \circ \Delta = \mathbb{1}_C = (\mathbb{1}_C \otimes \epsilon) \circ \Delta$$

appelé counité. On précisera dans la suite quand $C$ en admettra une.
On remarque que $T(V)$ possède deux graduations, sauf mention du contraire on considéra la graduation induite par celle de $V$.[3]

**Proposition 4.11.** *Soit $k$ un corps et $V$ un $k$-espace vectoriel . On peut définir une structure de cogèbre sur l'algèbre tensorielle $T(V)$ avec la comultiplication $\Delta$ vérifiant*

$$\Delta(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = 1 \otimes (v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) + \sum_{i=1}^{n-1} (v_1 \otimes \cdots \otimes v_i) \otimes (v_{i+1} \otimes \cdots \otimes v_n) + (v_1, \cdots, v_n) \otimes 1$$

*pour $v_i \in M$ et $\Delta(1) = 1 \otimes 1$.*
*On peut la munir d'une counité définie par $\epsilon : T(V) \to k$ qui vaut l'identité sur $k$ et nul sur les autres composantes de $T(V)$.*

*Démonstration.* On peut définir $\Delta_n : V^{\otimes n} \to T(V) \otimes T(V)$ par la formule de la proposition et prolonger par linéarité pour avoir $\Delta : T(V) \to T(V) \otimes T(V)$ vérifiant la relation. On remarque que $\Delta$ est de degré 0 et on a pour $v_1, \cdots, v_n \in M$ et $n \geq 3$

$$\begin{aligned}
(\mathbb{1}_{T(V)} \otimes \Delta)(\Delta(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n)) = {} & 1 \otimes 1 \otimes (v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) + \sum_{i=1}^{n-1} 1 \otimes (v_1 \otimes \cdots \otimes v_i) \otimes (v_{i+1} \otimes \cdots \otimes v_n) \\
& + \ 1 \otimes (v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) \otimes 1 \ + \ \sum_{i=1}^{n-1} (v_1 \otimes \cdots \otimes v_i) \otimes 1 \otimes (v_{i+1} \otimes \cdots \otimes v_n) \\
& + \ \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} (v_1 \otimes \cdots \otimes v_i) \otimes (v_{i+1} \otimes \cdots \otimes v_j) \otimes (v_j \otimes \cdots \otimes v_n) \\
& + \ \sum_{i=1}^{n-1} (v_1 \otimes \cdots \otimes v_i) \otimes (v_{i+1} \otimes \cdots \otimes v_n) \otimes 1 \ + \ (v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) \otimes 1 \otimes 1.
\end{aligned}$$

3. Si on a $M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M_i$ et $N = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} N_i$ alors $M + N = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} (M+N)_i$ avec $(M+N)_i = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} M_{i-n} + N_n$

$$\begin{aligned}(\Delta \otimes \mathbb{1}_{T(V)})(\Delta(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n)) = 1 \otimes 1 \otimes (v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) + \sum_{i=1}^{n-1} 1 \otimes (v_1 \otimes \cdots \otimes v_i) \otimes (v_{i+1} \otimes \cdots \otimes v_n) \\ + \ 1 \otimes (v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) \otimes 1 \ + \ \sum_{i=1}^{n-1}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_i) \otimes 1 \otimes (v_{i+1} \otimes \cdots \otimes v_n) \\ + \ \sum_{i=2}^{n-1}\sum_{j=1}^{i-1}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_i) \otimes (v_{i+1} \otimes \cdots \otimes v_j) \otimes (v_j \otimes \cdots \otimes v_n) \\ + \ \sum_{i=1}^{n-1}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_i) \otimes (v_{i+1} \otimes \cdots \otimes v_n) \otimes 1 \ + \ (v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) \otimes 1 \otimes 1.\end{aligned}$$

d'où l'égalité. Pour $n < 3$, on vérifie facilement à la main. La vérification que $\epsilon$ est une counité est simple. □

**Remarque.** On commence à manipuler plusieurs produits tensoriels, pour rendre les notations plus clairs, un élément $v_1 \otimes \cdots v_n$ de $V^{\otimes n}$ sera noté $(v_1| \cdots |v_n)$.

On notera l'algèbre tensorielle réduite $\overline{T}(V) = \bigoplus_{n \geq 1} V^{\otimes n}$

**Proposition 4.12.** *Soit $V$ un $k$-espace vectoriel. On peut définir une structure de cogèbre sur l'algèbre tensorielle réduite $\overline{T}(V)$ avec la comultiplication $\Delta$ vérifiant*

$$\Delta(v_1| \cdots |v_n) = \sum_{i=1}^{n-1}(v_1| \cdots |v_i) \otimes (v_{i+1}| \cdots |v_n)$$

*pour $v_i \in V$.*
*En particulier, $\Delta(v) = 0$ et $\Delta(v_1|v_2) = v_1 \otimes v_2$ pour $v, v_1, v_2 \in V$.*

*Démonstration.* La vérification est la même que dans la propriété 3.11. □

**Définition 4.13.** Soit $(C, \Delta)$ une cogèbre sur un corps $k$. Une codérivation sur $C$ est une application linéaire graduée $b : C \to C$ tel que

$$\Delta \circ b = (b \otimes \mathbb{1}_C + \mathbb{1}_C \otimes b) \circ \Delta$$

Une différentielle sur $C$ est une codérivation $b$ de degré 1 tel que $b^2 = 0$.

**Définition 4.14.** Soit $(A, \mu)$ une algèbre $\mathbb{Z}$-gradué sur un corps $k$. Une dérivation sur $A$ est une application linéaire gradué $\partial : A \to A$ tel que

$$\partial \circ \mu = \mu(\partial \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \partial)$$

Une différentielle sur $A$ est une dérivation $b$ de degré 1 tel que $b^2 = 0$.

On notera $j_n : V^{\otimes n} \to T(V)$ et $\pi_n : T(V) \to V^{\otimes n}$ l'injection et la projection canonique.

Pour une multiplication $\mu$ (resp. comultiplication $\Delta$), on note $\mu^{(n)} = \mu(\mathbb{1} \otimes \mu^{n-1})$ (resp. $\Delta^{(n)} = (\mathbb{1}^{\otimes n-2} \otimes \Delta) \circ \Delta^{(n-1)}$).

On note $C[n] = ker\Delta^{(n+1)}$

**Remarque.** On remarque que les $C[n]$ sont des sous-cogèbres de $C$ croissantes pour l'inclusion.
Pour le cas $(\overline{T}(V), \Delta)$, on a

$$\begin{aligned}\Delta^{(n)}(v_1| \cdots |v_p) &= 0 \ si \ p < n \\ &= v_1 \otimes \cdots \otimes v_p \ si \ p = n \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_{n-1} \leq p-1} (v_1| \cdots |v_{i_1}) \otimes (v_{i_1+1}| \cdots |v_{i_2}) \otimes \cdots \otimes (v_{i_{n-1}+1}| \cdots |v_p) \ sinon\end{aligned}$$

On en déduit que $\overline{T}(V)[n] = \bigoplus_{i=1}^{n} V^{\otimes i}$

**Définition 4.15.** Soit $F : C \to C'$ une application linéaire graduée entre deux cogèbres. On dit que $F$ est un morphisme de cogèbre si elle vérifie en plus la relation

$$(F \otimes F) \circ \Delta = \Delta' \circ F$$

**Proposition 4.16.** *L'application*

$$\phi : Coder(\overline{T}(V), \overline{T}(V)) \longrightarrow Hom(\overline{T}(V), V),$$

*qui associe à chaque codérivation $b \in Coder(\overline{T}(V), \overline{T}(V))$, la composition $\phi(b) = \pi_1 \circ b$ est une bijection dont la réciproque est donné par*

$$\psi : Hom(\overline{T}(V), V) \longrightarrow Coder(\overline{T}(V), \overline{T}(V))$$

*qui associe à chaque $b \in Hom(\overline{T}(V), V)$, la codérivation*

$$\psi(b) = \sum_{n\geq 1} \sum_{i=0}^{n-1} (\mathbb{1}_{\overline{T}(V)}^{\otimes i} \otimes b \otimes \mathbb{1}_{\overline{T}(V)}^{\otimes n-i-1}) \circ \Delta^{[n]}$$

*On considérera que $\overline{T}(V)^{\otimes n} \subset \overline{T}(V)$ via l'inclusion qui consiste à concaténer les tenseurs dans la définition de $\psi$.*

*Démonstration.* Montrons que $\psi$ est bien définie. Soit $b \in Hom(\overline{T}(V), V)$, $v_1, \cdots, v_p \in V$.

$$\psi(b)(v_1|\cdots|v_p) = \sum_{n=1}^{p} \sum_{j=0}^{n-1} (\mathbb{1}_{\overline{T}(V)}^{\otimes j} \otimes b \otimes \mathbb{1}_{\overline{T}(V)}^{\otimes n-j-1}) \circ \Delta^{[n]}(v_1|\cdots|v_p)$$
$$= \sum_{n=1}^{p} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_{n-1}\leq p-1} (\mathbb{1}_{\overline{T}(V)}^{\otimes j} \otimes b \otimes \mathbb{1}_{\overline{T}(V)}^{\otimes n-j-1})((v_1|\cdots|v_{i_1}) \otimes \cdots \otimes (v_{i_{n-1}+1}|\cdots|v_p))$$
$$= \sum_{n=1}^{p} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_{n-1}\leq p-1} (-1)^{\epsilon(i_j)}(v_1|\cdots|v_{i_1}) \otimes \cdots \otimes (v_{i_{j-1}+1}|\cdots|v_{i_j}) \otimes b(v_{i_j+1}|\cdots|v_{i_{j+1}}) \otimes \cdots \otimes (v_{i_{n-1}+1}|\cdots|v_p)$$
$$= \sum_{n=1}^{p} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_{n-1}\leq p-1} (-1)^{\epsilon(i_j)}(v_1|\cdots|v_{i_1}|\cdots|v_{i_{j-1}+1}|\cdots|v_{i_j}|b(v_{i_j+1}|\cdots|v_{i_{j+1}}|)|\cdots|v_{i_{n-1}+1}|\cdots|v_p)$$

où $\epsilon(i_j) = |b|(|v_1| + \cdots + |v_{i_j}|)$.
Donc,

$$(\psi(b) \otimes \mathbb{1}_{\overline{T}(V)} + \mathbb{1}_{\overline{T}(V)} \otimes \psi(b)) \circ \Delta(v_1|\cdots|v_p) = (\psi(b) \otimes \mathbb{1}_{\overline{T}(V)} + \mathbb{1}_{\overline{T}(V)} \otimes \psi(b)) \circ \sum_{k=1}^{p-1} (v_1|\cdots|v_k) \otimes (v_{k+1}|\cdots|v_p)$$
$$= \sum_{k=1}^{p-1} \psi(b)(v_1|\cdots|v_k) \otimes (v_{k+1}|\cdots|v_p) + (-1)^{|b|(|v_1|+\cdots+|v_k|)}(v_1|\cdots|v_k) \otimes \psi(b)(v_{k+1}|\cdots|v_p)$$
$$= \sum_{k=1}^{p-1} \sum_{n=1}^{k} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_{n-1}\leq k-1} (-1)^{|b|(|v_1|+\cdots+|v_{i_j}|)}(v_1|\cdots|b(v_{i_j+1}|\cdots|v_{i_{j+1}})|\cdots|v_k) \otimes (v_{k+1}|\cdots|v_p)$$
$$+ \sum_{k=1}^{p-1} \sum_{n=1}^{p-k} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k+1\leq i_1<i_2<\cdots<i_{n-1}\leq p-1} (-1)^{|b|(|v_1|+\cdots+|v_{i_j}|)}(v_1|\cdots|v_k) \otimes (v_{k+1}|\cdots|b(v_{i_j+1}|\cdots|v_{i_{j+1}})|\cdots|v_p)$$

Or,

$$\Delta \circ \psi(b)(v_1|\cdots|v_p) = \sum_{n=1}^{p}\sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\substack{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_{n-1}\leq p-1 \\ 1\leq k\leq i_j}} (-1)^{|b|(|v_1|+\cdots+|v_{i_j}|)}(v_1|\cdots|v_k)\otimes(v_{k+1}|\cdots|b(v_{i_j+1}|\cdots|v_{i_{j+1}})|\cdots|v_p)$$

$$+\sum_{n=1}^{p}\sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\substack{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_{n-1}\leq p-1 \\ i_j+1\leq k\leq p-1}} (-1)^{|b|(|v_1|+\cdots+|v_{i_j}|)}(v_1|\cdots|b(v_{i_j+1}|\cdots|v_{i_{j+1}})|\cdots|v_k)\otimes(v_{k+1}|\cdots v_p)$$

Grâce à une manipulations fastidieuses sur les indices, on en déduit l'égalité.
On voit facilement que $\phi\circ\psi(b) = b$ avec la dernière écriture de $\psi(b)$.
Soit $B \in Coder(\overline{T}(V), \overline{T}(V))$,
On remarque par récurrence

$$\sum_{i=0}^{n-1}(\mathbb{1}^{\otimes i}\otimes B\otimes \mathbb{1}^{\otimes n-i-1})\circ\Delta^{[n]} = \Delta^{[n]}\circ B$$

Mais vu que $ker\Delta^{[n]} = \bigoplus_{i\geq 1}^{n-1} V^{\otimes i}$, on en tire $B(\bigoplus_{i\geq 1}^{n} V^{\otimes i}) \subset \bigoplus_{i\geq 1}^{n} V^{\otimes i}$.
On notera $B = \sum_{n\geq 1} b^n$ où $b^n = \pi_n\circ B$ [4].

$$\Delta\circ B(v_1|\cdots|v_p) = \sum_{n=2}^{p}\sum_{i=1}^{n-1}(b^n_{(1)}|\cdots|b^n_{(i)})\otimes(b^n_{(i+1)}|\cdots|b^n_{(n)})$$

$$(B\otimes\mathbb{1}+\mathbb{1}\otimes B)\circ\Delta(v_1|\cdots|v_p) = \sum_{i=1}^{p-1}\sum_{n=1}^{i} b^n(v_1|\cdots|v_i)\otimes(v_{i+1}|\cdots|v_p) + (-1)^{|B|(|v_1|+\cdots+|v_i|)}(v_1|\cdots|v_i)\otimes b^n(v_{i+1}|\cdots|v_p)$$

En identifiant les tenseurs d'ordre 2, on obtient

$$b^2(v_1|\cdots|v_p) = \sum_{i=1}^{p-1}(b^1(v_1|\cdots|v_i)|v_{i+1}|\cdots|v_p) + (-1)^{|B|(|v_1|+\cdots+|v_i|)}(v_1|\cdots|v_i|b^1(v_{i+1}|\cdots|v_p))$$

qui vaut précisément la deuxième coordonné de $\psi(\pi_1\circ B)$. On va à présent déterminer les autres par récurrence.
En identifiant les tenseurs d'ordre $k+1$, on obtient

$$b^{k+1}(v_1|\cdots|v_p) = \frac{1}{k}\sum_{n=1}^{k}\sum_{i=n}^{n+p-k-1}(b^n(v_1|\cdots|v_i)|\cdots|v_p) + \frac{1}{k}\sum_{n=1}^{k}\sum_{i=p-n}^{k+1-n}(-1)^{|B|(|v_1|+\cdots+|v_i|)}(v_1|\cdots|v_i|b^n(v_{i+1}|\cdots|v_p))$$

Lorsqu'on remplace les $b^n$ par leur expression, une analyse fastidieuse montre que les termes de $\psi(\pi\circ B)$ apparaissent $k$ fois et on a l'égalité.
Finalement, $\psi(\pi_1\circ B) = B$ et on a la bijection voulue. □

**Proposition 4.17.** *L'application*

$$\varphi : Hom_{cog}(\overline{T}(V), \overline{T}(V)) \longrightarrow Hom_k(\overline{T}(V), V)$$

*qui associe à chaque $F \in Hom_{cog}(\overline{T}(V), \overline{T}(V))$, la composition $\pi_1\circ F$ est une bijection dont la réciproque est donné par*

$$\Omega : Hom_k(\overline{T}(V), V) \longrightarrow Hom_{cog}(\overline{T}(V), \overline{T}(V))$$

4. On utilisera la notation suivante : $b^n = b^n_{(1)}|\cdots|b^n_{(n)}$ qui est formellement une somme de $n$ tenseurs. On a que $b^n(v_1|\cdots|v_p) = 0$ pour $p > n$.

*qui associe à chaque $f \in Hom_k(\overline{T}(V), V)$, l'application*

$$\sum_{n\geq 1} f^{\otimes n} \circ \Delta^{[n]}$$

*Démonstration.* La preuve est essentiellement la même. La bonne définition de $\Omega$ résultat d'un changement d'indice et pour montrer la bijection, on procède de façon identique en établissant

$$F^{\otimes n} \circ \Delta^{[n]} = \Delta^{[n]} \circ F$$

. □

**Remarque.** On peut généraliser les deux propositions précédente et écrire la propriété universelle de la cogèbre tensorielle. Voir [2], Lemme 1.1.2.2.

**Définition 4.18.** Soit $A$ un espace vectoriel $\mathbb{Z}$-gradué. On définit le shift de $A$ par

$$A[1] = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} A[1]_i$$

où $A[1]_i = A_{i+1}$. On notera $s_A : A \to A[1]$ le morphisme canonique de degré $-1$. Pour une application $m_n : A^{\otimes n} \to A$ de degré $2-n$, on définit $b_n : A[1]^{\otimes n} \to A[1]$ de degré 1 par $b_n = -s_A \circ m_n \circ (s_A^{\otimes n})^{-1}$ .
Pour une application $f_n : A^{\otimes n} \to A'$ de degré $1-n$ où $A'$ est un autres espace vectoriel $\mathbb{Z}$-gradué, on définit $F_n = s_{A'} \circ f_n \circ (s_A^{\otimes n})^{-1}$ qui est de degré 0.

**Remarque.** D'après les proposition précédente, ces applications peuvent être prolongé en une codérivation de degré 1 sur $\overline{T}(A[1])$ dont on notera $B$ leur somme qui reste une codérivation de degré 1 et en un morphisme de cogèbre dont on notera $F$ leur somme. [5]

On a donc muni $\overline{T}(A[1])$ d'une codérivation $B$. De façon identique, on peut munir $\overline{T}(A[1])[n] = \bigoplus_{i=1}^{n} A[1]^{\otimes i}$ d'une codérivation $B_n$. [6] L'intérêt de cette construction vient avec les propositions suivantes.

L'analogue pour les fonctions sera noté $F_n$.

**Proposition 4.19.** *Soit $A$ un espace vectoriel $\mathbb{Z}$-gradué, $\{m_n\}_{1\leq n\leq N}$ une famille d'applications comme définit précédemment. Les propriétés suivantes sont alors équivalentes :*

1. *Les applications $m_n$ munissent $A$ d'une structure d'$A_N$-algèbre.*
2. *La codérivation $B_N$ est une différentiel i.e $B_N \circ B_N = 0$*
3. *Pour $n \geq 1$, les applications $\{b_s\}$ satisfont*

$$\sum_{\substack{r+s+t=n\\ r,t\geq 0\\ s\geq 1}} b_{r+1+t}(\mathbb{1}^{\otimes r} \otimes b_s \otimes \mathbb{1}^{\otimes t}) = 0$$

*Démonstration.* On voit que $B_N \circ B_N$ est encore une codérivation car $B_N$ est de degré impair. Donc $B_N \circ B_N = 0$ est équivalent à $\pi_1 \circ B_N \circ B_N = 0$. Pour avoir 2 équivalent à 3 , il suffit d'écrire $\pi_1 \circ B_N \circ B_N$ et de garder les termes qui mangent un $n$-tenseurs.
L'équivalence de 1 et 2 vient de la relation suivante :

$$b_{r+1+t} \circ (\mathbb{1}^{\otimes r} \otimes b_s \otimes \mathbb{1}^{\otimes t}) = (-1)^{r+st} s_A \circ m_{r+1+t} \circ (\mathbb{1}^{\otimes r} \otimes m_s \otimes \mathbb{1}^{\otimes t}) \circ (s_A^{\otimes r+s+t})^{-1}$$

□

5. On suppose ici que l'on a la donné d'une famille d'applications $\{m_n\}$ et $\{f_n\}$ pour que cela est un sens.
6. On fait la même construction mais on se restreint aux $n$ premières applications $m_i$

**Proposition 4.20.** *Soit $A, A'$ deux $A_N$-algèbre, $\{f_n\}_{1\leq n\leq N}$ une famille d'applications comme définit précédemment. Les propriétés suivantes sont alors équivalentes :*

1. *Les application $f_n$ sont des morphismes d'$A_N$-algèbre.*
2. *La relation de commutation suivante est vérifié : $B'_N \circ F_N = F_N \circ B_N$*

*Démonstration.* La propriété universelle de la cogèbre tensorielle permet de dire que $B'_N \circ F_N - F_N \circ B_N = 0$ est équivalent à $\pi_1 \circ (B'_N \circ F_N - F_N \circ B_N) = 0$ car $B'_N \circ F_N - F_N \circ B_N$ est une $(F_N, F_N)$-codérivation. On conclut en écrivant la relation. □

**Proposition 4.21.** *Soit $A$ une $A_N$-algèbre, $\{m_n\}_{1\leq n\leq N+1}$ une famille d'application comme définit précédemment tel que $(A, (m_n)_{1\leq n\leq N})$ correspondent à la structure de $A_N$-algèbre. Alors on a la factorisation suivante*

$$B_{N+1} \circ B_{N+1} \circ j_{N+1} = \pi_1 \circ B_{N+1} \circ B_{N+1} \circ j_{N+1}$$

*Démonstration.* On notera $B^2_{N+1} = B_{N+1} \circ B_{N+1}$. On sait que $B^2_{N+1}$ est une codérivation et que l'image de $\Delta \circ j_{N+1}$ est incluse dans $\overline{T}(V)[N] \otimes \overline{T}(V)[N]$. On a aussi que $B_{N+1}|_{\overline{T}(V)[N]} = B_N$ et avec la proposition 3.19, on obtient

$$\Delta \circ B^2_{N+1} \circ j_{N+1} = (\mathbb{1} \otimes B^2_{N+1} + B^2_{N+1} \otimes \mathbb{1}) \circ \Delta \circ j_{N+1} = 0$$

Donc $B^2_{N+1} \circ j_{N+1} \subset ker\Delta = A$, d'où la factorisation par $\pi_1$. □

**Proposition 4.22.** *Soit $A, A'$ deux $A_{N+1}$-algèbre, $\{f_n\}_{1\leq n\leq N+1}$ une famille de morphisme comme définit précédemment tel que $f$ soit un morphisme de $A_N$-algèbre. Alors on a la factorisation suivante $(B'_{N+1} \circ F_{N+1} - F_{N+1} \circ B_{N+1}) \circ j_{N+1} = \pi_1 \circ (B'_{N+1} \circ F_{N+1} - F_{N+1} \circ B_{N+1}) \circ j_{N+1}$*

*Démonstration.* La preuve est identique. On a encore que l'image de $\Delta \circ j_{N+1}$ est incluse dans $\overline{T}(V)[N] \otimes \overline{T}(V)[N]$ et un simple calcul montre que

$$\begin{aligned}\Delta' \circ (B'_{N+1} \circ F_{N+1} - F_{N+1} \circ B_{N+1}) \circ j_{N+1} &= F_{N+1} \otimes (B'_{N+1} \circ F_{N+1} - F_{N+1} \circ B_{N+1}) \circ \Delta \circ j_{N+1} \\ &+ (B'_{N+1} \circ F_{N+1} - F_{N+1} \circ B_{N+1}) \otimes F_{N+1} \circ \Delta \circ j_{N+1} \\ &= 0\end{aligned}$$

car $(B'_{N+1} \circ F_{N+1} - F_{N+1} \circ B_{N+1})|_{\overline{T}(V)[N]} = (B'_N \circ F_N - F_N \circ B_N) = 0$ d'après la proposition 3.20. Le même argument fonctionne pour conclure. □

## 4.3 Le théorème de Kadeishvili

L'objectif de cette section est de montrer un théorème fondamentale qui motive l'utilisation des $A_\infty$-algèbre.

**Théorème** (Kadeishvili). *Soit $A$ une $A_\infty$-algèbre. Il existe sur $H(A^\bullet)$ une structure de $A_\infty$-algèbre et un morphisme d'$A_\infty$-algèbre $f : H(A^\bullet) \to A$ tel que $f_1$ soit un quasi-isomorphisme, $\overline{m_1} = 0$ et $\overline{m_2}$ est induite par la multiplication dans $A$.*
*De plus, la structure résultante est unique à isomorphisme près et si $A$ possède une unité, alors la structure et le quasi-isomorphisme peuvent être choisie tel que : $\forall a_i \in H(A^\bullet)$, $f_k(a_1, \cdots, a_{i-1}, 1_{H(A^\bullet)}, a_{i+1}, a_k) = 0$ pour $k \geq 2$ et $f_1 \circ \eta_{H(A^\bullet)} = \eta_A$.*

**Lemme 4.23.** *Soit $N \in \mathbb{N}$, $(A, \{m_i\}_{i\in[|1,N+1|]})$ une $A_{N+1}$-algèbre et $(A', \{m'_i\}_{i\in[|1,N|]})$ une $A_N$-algèbre satisfaisant $m'_1 = 0$. Supposons qu'on a $f : A' \to A$ un morphisme d'$A_N$-algèbre tel que $f_1$ induise une application* *injective en cohomologie. Alors l'application de* $(A')^{\otimes N+1}$ *dans* $A$ *donné par*

$$U_{N+1} = \sum_{\substack{r+s+t=N+1 \\ 1<s<N+1}} (-1)^{r+st} f_{r+1+t} \circ (\mathbb{1}^{\otimes r} \otimes m'_s \otimes \mathbb{1}^{\otimes t})$$
$$- \sum_{q\geq 2} \sum_{i_1+\cdots+i_q=N} (-1)^{\epsilon(i)} m_q \circ (f_{i_1} \otimes \cdots \otimes f_{i_q})$$

*où* $\epsilon(i) = (i_{q-1}-1) + 2(i_{q-2}-1) + \cdots + (q-1)(i_1-1)$*, vérifie* $m_1 \circ U_{N+1}$.

*Démonstration Lemme 3.23.* On va essentiellement appliquer les propositions de la section précédente sur la construction de Bar. On définit $\tilde{U}_{N+1} = s_A \circ U_{N+1} \circ (s_{A'}^{\otimes N+1})^{-1}$. On voit que

$$\tilde{U}_{N+1} = \sum_{\substack{r+s+t=N+1 \\ 1<s<N+1}} F_{N,r+1+t} \circ (\mathbb{1}^{\otimes r} \otimes b'_s \otimes \mathbb{1}^{\otimes t}) - \sum_{q\geq 2} \sum_{i_1+\cdots+i_q=N} b_q \circ (F_{N,i_1} \otimes \cdots \otimes F_{N,i_q})$$

où on a noté $F_{N,i}$ la $i$-ème application sous-jacente à la construction de $F_N$. Il suffit de montrer que $b_1 \circ U_{N+1} = 0$ pour avoir le lemme. Ainsi,

$$\tilde{U}_{N+1} = \pi_1 \circ (F_{N+1} \circ B'_{N+1} - B_{N+1} \circ F_{N+1}) \circ j'_{N+1} - F_{N+1,1} \circ b'_{N+1} + b_1 \circ F_{N+1,N+1}.$$

Donc,

$$\begin{aligned} b_1 \circ \tilde{U}_{N+1} &= b_1 \circ \pi_1 \circ (F_{N+1} \circ B'_{N+1} - B_{N+1} \circ F_{N+1}) \circ j'_{N+1} && (1) \\ &= B_{N+1} \circ (F_{N+1} \circ B'_{N+1} - B_{N+1} \circ F_{N+1}) \circ j'_{N+1} && (2) \\ &= B_{N+1} \circ F_{N+1} \circ B'_{N+1} \circ j'_{N+1} && (3) \end{aligned}$$

où (1) est justifié par $b_1 \circ b_1 = 0$ et $b_1 \circ F_{N+1,1} = 0$ car $m_1 \circ m_1 = 0$ et $m_1 \circ f_1 = 0$, (2) est justifié par la proposition 3.22 et que $B_{N+1}|A[1] = b_1$. Dans la dernière égalité, on a utilisé $B_{N+1} \circ B_{N+1} = 0$ d'après la proposition 3.19. Comme $b'_1 = 0$, l'image de $B'_{N+1} \circ j'_{N+1}$ est incluse dans $B_N(A')$ donc d'après la proposition 3.20, $b_1 \circ \tilde{U}_{N+1}$ coïncide avec

$$F_N \circ B'_N \circ B'_{N+1} \circ j'_{N+1} = F_{N+1} \circ B'_{N+1} \circ B'_{N+1} \circ j'_{N+1}$$

Enfin, grâce à la proposition 3.21, $b_1 \circ \tilde{U}_{N+1}$ coïncide avec

$$F_{N+1,1} \circ (\pi_1 \circ B'_{N+1} \circ B'_{N+1} \circ j'_{N+1})$$

Finalement, soit $\omega \in (A'[1])^{\otimes N+1}$, on pose $a' = (\pi_1 \circ B'_{N+1} \circ B'_{N+1} \circ j'_{N+1})(\omega)$. Comme $b'_1 = 0$, $b'_1(a') = 0$ et on a $F_{N+1,1} = s_A \circ f_1 \circ s_{A'}$ induit une injection en cohomologie par hypothèse. Donc, $F_{N+1,1}(a') = b_1 \circ U_{N+1}(\omega)$ est nulle en passant au classe car $F_{N+1,1}(a')$ est dans l'image de $b_1$, ainsi par injectivité $a'$ est dans l'image de $b'_1$ qui est nulle. Ce qui prouve le résultat. □

*Démonstration Théorème.* On pose $\overline{m_1} = 0$ et $\overline{m_2}$ la multiplication induite par la Proposition 2.6. On définit $f_1 : H(A^\bullet) \to A$ comme étant une section de $ker\ m_1 \to H(A^\bullet)$. On a $m_1 \circ f_1 = f_1 \circ \overline{m}_1 = 0$ donc $St_1(f)$ est vérifié. Si $A$ est unitaire, on pose $1_{H(A^\bullet)}$ la classe de $1_A$ et il est possible de choisir $f_1$ de façon à avoir $f_1 \circ \eta_{H(A^\bullet)} = \eta_A$. On suppose que $f_i$ et $\overline{m_i}$ déjà construite pour $i \leq N$ [7] et on pose

$$U_{N+1} := \sum_{q=2}^{N} \sum_{i_1+\cdots+i_q=N} (-1)^{\epsilon(i)} m_q (f_{i_1} \otimes \cdots f_{i_q}) - \sum_{\substack{r+s+t=N \\ 1<s<N}} (-1)^{r+st} f_{r+1+t} \circ (\mathbb{1}_{H(A)}^{\otimes r} \otimes \overline{m_s} \otimes \mathbb{1}_{H(A)}^{\otimes t})$$

7. vérifiant $St_i(f)$ et $St_i^{\overline{m}}$

Par le lemme précèdent, $m_1 \circ U_{N+1} = 0$ et on définit $\overline{m}_{N+1}$ comme étant moins la projection de $U_{N+1}$ dans $H(A^\bullet)$. On a alors que $U_{N+1} + f_1 \circ \overline{m}_{N+1}$ est dans l'image de $m_1$, d'où l'existence de $f_{N+1}$ [8] tel que

$$U_{N+1} + f_1 \circ \overline{m}_{N+1} = m_1 \circ f_{N+1}$$

qui est précisément $St_{N+1}(f)$. Si $A$ est unitaire, une vérification montre qu'on peut bien définir $f_{N+1}$ comme dans l'énoncé. Il est évident que $f_1$ est un quasi-isomorphisme, il reste a voir que $\overline{m}_{N+1}$ vérifie $St^{\overline{m}}_{N+1}$. En reprenant les notations du lemme, comme $f_1$ est injective, on a $F_{N+1}$ injective [9] et on conclut grâce au diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
B_{N+1}(H(A^\bullet)) \arrow[r, "F_{N+1}"] \arrow[d, "\overline{B}_{N+1}"] & B_{N+1}(A) \arrow[d, "B_{N+1}"] \\
B_{N+1}(H(A^\bullet)) \arrow[r, "F_{N+1}"] \arrow[d, "\overline{B}_{N+1}"] & B_{N+1}(A) \arrow[d, "B_{N+1}"] \\
B_{N+1}(H(A^\bullet)) \arrow[r, "F_{N+1}"] & B_{N+1}(A)
\end{tikzcd}$$

dont la commutativité à dejà été prouvé. En effet, par hypothèse $B_{N+1} \circ B_{N+1} = 0$ et donc $\overline{B}_{N+1} \circ \overline{B}_{N+1} = 0$. On admet l'unicité dans le mesure où on sait en donner un sens. □

**Remarque.** Dans la preuve du théorème, on utilise constamment l'existence de section dans un espace vectoriel pour construire les $f_i$. Une "généralisation" possible est de considérer le cadre minimale où les sections existe i.e donc de supposer que la cohomologie soit un modules projectifs. Une $A_\infty$-algèbre tel que $m_1 = 0$ est appelé minimal. Donc d'après le théorème de Kadeishvili, $H(A^\bullet)$ possède une structure d'$A_\infty$-algèbre minimal aussi appelé modèle minimal de $A$.
Une application d'$A_\infty$-algèbre tel que $f_1$ soit un quasi-isomorphisme sera aussi appelé un quasi-isomorphisme.

On va conclure cette section avec une remarque sur la question d'une unité pour une $A_\infty$-algèbre.

**Définition 4.24.** Une $A_\infty$-algèbre sera dite augmentée s'il existe $f : A \to k$ tel que

$$f(m_2(a_1 \otimes a_2)) = f(a_1)f(a_2)$$

et

$$f(m_n(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n)) = 0, \qquad \text{pour tout } n \neq 2$$

**Remarque.** Comme dans un anneau, une $A_\infty$-algèbre peut être munit d'un élément neutre. Si $B$ est une $A_\infty$-algèbre sans unité alors il existe une unique façon d'étendre le structure de $B$ en une $A_\infty$-algèbre sur $A = k \oplus B$ tel que $A$ possède un élément neutre. $A$ est clairement augmenté. Réciproquement, si $A$ est une $A_\infty$-algèbre augmentée unitaire alors $A = k \oplus B$ avec $B = ker\ f$ qui est une $A_\infty$-algèbre sans unité.

## 4.4 La construction de Merkulov

*On va voir comment à l'aide d'une dg algèbre, on peut construire une $A_\infty$-algèbre en utilisant la méthode de Merkulov. Cette construction nous permettra de donner une "autre" démonstration du théorème de Kadeishvili dans le cas d'une dg algèbre. On s'est grandement inspiré de [5]*

Soit $(A, \partial, \cdot)$ une dg algèbre et $W$ un sous complexe de $A$.

8. On voit facilement que $\overline{m}_{N+1}$ et $f_{N+1}$ ont les bons degrés
9. Il suffit de regarder $\pi_1 \circ F_{N+1}$

**Définition 4.25.** Pour $x, y \in A$ homogène et $\varphi, \phi \in Hom(A)$ gradué, on définit leur supercommutateur par

$$[x, y] = xy - (-1)^{|x||y|} yx$$
$$[\varphi, \phi] = \varphi\phi - (-1)^{|\varphi||\psi|} \phi\varphi$$

Dans tout le long, on va supposer l'existence d'une application $Q : A \to A$ de degré $-1$ tel que l'image de $(\mathbb{1} - [\partial, Q])$ soit dans $W$.

On définit par récurrence des application linéaire gradué. On notera formellement $\lambda_1$ tel que $Q\lambda_1 = -\mathbb{1}$ pour simplifier les expressions, $\lambda_2$ sera donné par la multiplication dans $A$ et pour $n \geq 3$, $\lambda_n$ vérifie la relation

$$\lambda_n = \sum_{\substack{s+t=n \\ s,t\geq 1}} (-1)^{s+1} \lambda_2[Q\lambda_s \otimes Q\lambda_t]$$

**Remarque.** Par récurrence, on voit que $\lambda_n$ est de degré $2 - n$.

**Proposition 4.26.** *On définit $\phi_n : A^{\otimes n} \to A$ par*

$$\phi_n = \sum_{\substack{k+l=n+1 \\ k,l\geq 2}} \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{j(l-1)+(k-1)l} \lambda_k(\mathbb{1}^{\otimes j} \otimes \lambda_l \otimes \mathbb{1}^{\otimes n-j-l})$$

*Alors $\phi_n = 0$ pour $n \geq 3$.*

*Démonstration.* On va montrer la formule suivante

$$\phi_n = \sum_{\substack{k+l=n \\ k\geq 3 \\ l\geq 1}} (-1)^k \lambda_2(Q\phi_k \otimes Q\lambda_l) - \sum_{\substack{k+l=n \\ k\geq 1 \\ l\geq 3}} \lambda_2(Q\lambda_k \otimes Q\phi_l)$$

ce qui nous permettra de conclure par récurrence en calculant $\phi_3$. En substituant $\phi_k$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{k+l=n \\ k\geq 3 \\ l\geq 1}} \sum_{\substack{s+t=k+1 \\ s,t\geq 2}} \sum_{j=0}^{s-1} (-1)^{k+j(t-1)+(s-1)t} \lambda_2(Q\lambda_s(\mathbb{1}^{\otimes j} \otimes \lambda_t \otimes \mathbb{1}^{\otimes k-j-t}) \otimes Q\lambda_l) \\
&- \sum_{\substack{k+l=n \\ k\geq 1 \\ l\geq 3}} \sum_{\substack{s+t=l+1 \\ s,t\geq 2}} \sum_{j=0}^{s-1} (-1)^{j(t-1)+(s-1)t} \lambda_2(Q\lambda_k \otimes Q\lambda_s(\mathbb{1}^{\otimes j} \otimes \lambda_t \otimes \mathbb{1}^{\otimes l-j-t})) \\
&= \sum_{\substack{s+t+l=n+1 \\ t,s\geq 2 \\ l\geq 1}} \sum_{j=0}^{s-1} (-1)^{s+t-1+j(t-1)+(s-1)t} \lambda_2(Q\lambda_s(\mathbb{1}^{\otimes j} \otimes \lambda_t \otimes \mathbb{1}^{s-j-1}) \otimes Q\lambda_l) \\
&+ \sum_{\substack{k+s+t=n+1 \\ s,t\geq 2 \\ k\geq 1}} \sum_{j=0}^{s-1} (-1)^{j(t-1)+(s-1)t+1} \lambda_2(Q\lambda_k \otimes Q\lambda_s(\mathbb{1}^{\otimes j} \otimes \lambda_t \otimes \mathbb{1}^{\otimes s-j-1})) \\
&= \sum_{\substack{s+t+l=n+1 \\ t,s\geq 2 \\ l\geq 1}} \sum_{j=0}^{s-1} (-1)^{s+t-1+j(t-1)+(s-1)t+(l-1)t} \lambda_2(Q\lambda_s \otimes Q\lambda_l) \circ (\mathbb{1}^{\otimes j} \otimes \lambda_t \otimes \mathbb{1}^{n-t-j}) \\
&+ \sum_{\substack{s+t+k=n+1 \\ t,s\geq 2 \\ l\geq 1}} \sum_{j=k}^{k+s-1} (-1)^{(j-k)(t-1)+(s-1)t+1} \lambda_2(Q\lambda_k \otimes Q\lambda_s) \circ (\mathbb{1}^{\otimes j} \otimes \lambda_t \otimes \mathbb{1}^{\otimes n-t-j})
\end{aligned}$$

Et on a pour $\phi_n$ :

$$\phi_n = \sum_{\substack{k+l=n+1\\k,l\geq 2}} \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{j(l-1)+(k-1)l} \lambda_k \circ (\mathbb{1}^{\otimes j} \otimes \lambda_l \otimes \mathbb{1}^{\otimes n-j-l})$$

$$= \sum_{\substack{k+l=n+1\\k,l\geq 2}} \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{\substack{s+t=k\\s,t\geq 1}} (-1)^{j(l-1)+(k-1)l+s+1} \lambda_2(Q\lambda_s \otimes Q\lambda_t) \circ (\mathbb{1}^{\otimes j} \otimes \lambda_l \otimes \mathbb{1}^{\otimes n-j-l})$$

On voit facilement que les deux sommes sont égales.
Finalement,

$$\phi_3 = \lambda_2(\mathbb{1} \otimes \lambda_2) - \lambda_2(\lambda_2 \otimes \mathbb{1}) = 0$$

car $\lambda_2$ est associative. □

**Remarque.** On voit que $\phi_n$ est de degré $1 - n$.

**Proposition 4.27.** *On définit $\theta_n : A^{\otimes n} \to A$ par*

$$\theta_n = \partial\lambda_n + \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{n-1} \lambda_n(\mathbb{1}^{\otimes j} \otimes \partial \otimes \mathbb{1}^{\otimes n-j-1})$$
$$- \sum_{\substack{k+l=n+1\\k,l\geq 2}} \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{j(l-1)+(k-1)l} \lambda_k(\mathbb{1}^{\otimes j} \otimes [\partial, Q]\lambda_l \otimes \mathbb{1}^{\otimes n-j-l})$$

*Alors, $\theta_n = 0$ pour $n \geq 2$*

*Démonstration.* En faisant le même calcul que dans la proposition précédente, on montre :

$$\theta_n = \sum_{\substack{k+l=n\\k\geq 2\\l\geq 1}} (-1)^k \lambda_2(Q\theta_k \otimes Q\lambda_l) - \sum_{\substack{k+l=n\\k\geq 1\\l\geq 2}} \lambda_2(Q\lambda_k \otimes Q\theta_l)$$

Et on a

$$\theta_2 = \partial\lambda_2 - \lambda_2(\partial \otimes \mathbb{1}) + \lambda_2(\mathbb{1} \otimes \partial) = 0$$

par définition d'une dg algèbre. □

**Remarque.** On voit que $\theta_n$ est degré $3 - n$.

**Théorème.** *On définit $m_n : W^{\otimes n} \to W$ par*

$$m_1 = \partial$$
$$m_n = (\mathbb{1} - [\partial, Q])\lambda_n \qquad \textit{pour } n \geq 2$$

*Alors $(W, m_1, m_2, m_3, \cdots)$ est une $A_\infty$-algèbre.*

*Démonstration.* Par hypothèse sur $Q$, les $m_n$ sont bien définies et de degré $2 - n$. $St_1^m$ est vérifie car $W$ est un sous complexe et $St_2^m$ s'écrit

$$\partial(\mathbb{1} - [\partial, Q])\lambda_2 = (\mathbb{1} - [\partial, Q])\lambda_2(\partial \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \partial)$$

Un simple calcul montre

$$\partial(\mathbb{1} - [\partial, Q])\lambda_2 = (\mathbb{1} - [\partial, Q])\partial \tag{4}$$

d'où $St_2^m$ car $\partial$ est une différentielle. Pour $n \geq 3$,

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{r+s+t=n \\ r,t\geq 0 \\ s\geq 1}} (-1)^{r+st}(\mathbb{1}^{\otimes r} \otimes m_s \otimes \mathbb{1}^{\otimes t}) &= \sum_{\substack{k+l=n+1 \\ k,l\geq 1}} \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{j(l-1)+(k-1)l} m_k(\mathbb{1}^{\otimes j} \otimes m_l \otimes \mathbb{1}^{\otimes n-j-l}) \\
&= m_1(m_n) + \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{n-1} m_n(\mathbb{1}^{\otimes j} \otimes m_1 \otimes \mathbb{1}^{\otimes n-j-1}) \\
&+ \sum_{\substack{k+l=n+1 \\ k,l\geq 2}} \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{j(l-1)+(k-1)l} m_k(\mathbb{1}^{\otimes j} \otimes m_l \otimes \mathbb{1}^{\otimes n-j-l}) \\
&= \partial(\mathbb{1} - [\partial, Q])\lambda_n + (\mathbb{1} - [\partial, Q]) \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{n-1} \lambda_n(\mathbb{1}^{\otimes j} \otimes \partial \otimes \mathbb{1}^{\otimes n-j-1}) \\
&+ (\mathbb{1} - [\partial, Q]) \sum_{\substack{k+l=n+1 \\ k,l\geq 2}} \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{j(l-1)+(k-1)l} \lambda_k(\mathbb{1}^{\otimes j} \otimes (\mathbb{1} - [\partial, Q])\lambda_l \otimes \mathbb{1}^{\otimes n-j-l}) \\
&= (\mathbb{1} - [\partial, Q])(\theta_n + \phi_n) \\
&= 0
\end{aligned}$$

d'après les propositions précédentes. On note qu'on a utilisé (4) pour écrire l'avant dernière ligne. □

**Application.** On va appliquer le théorème précédent à la cohomologie de $A$ pour démontrer le théorème de Kadeishvili.

On a $A = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} A_i$ et on pose $Z_i = ker\ \partial_i$, $B_i = im\ \partial_{i-1}$, $H_i$ un supplémentaire de $B_i$ dans $Z_i$ et $C_i$ un supplémentaire de $Z_i$ dans $A_i$. On a donc

$$A_i = Z_i \oplus C_i = B_i \oplus H_i \oplus C_i$$

On peut donc identifier de façon naturelle $H(A^\bullet)$ avec $\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} H_i$. De plus, par théorème d'isomorphisme, $C_i \simeq im\ \partial_i$. Donc, $\partial_i|_{C_i}$ possède un inverse $(\partial_i|_{C_i})^{-1} : B_{i+1} \to C_i$.[10] En fin, on définit $Q$ par

$$Q : A_{i+1} \xrightarrow{\pi} B_{i+1} \xrightarrow{(\partial_i|_{C_i})^{-1}} A_i$$

On étend $Q$ par linéarité à $A$, l'application obtenue est bien de degré $-1$. Il reste à vérifier que l'image de $\mathbb{1} - [\partial, Q]$ est dans $H$. Soit $v_i = (\partial b_i, h_i, c_i)$ [11] $\in A_i$, alors $\partial v_i = (\partial c_i, 0, 0)$ et $Qv_i = (0, 0, b_i)$. Donc

$$\begin{aligned}
(1 - [\partial, Q])v_i &= (\partial b_i, h_i, c_i) - \partial(0, 0, b_i) - Q(\partial c_i, 0, 0) \\
&= (\partial b_i, h_i, c_i) - (\partial b_i, 0, 0) - (0, 0, c_i) \\
&= (0, h_i, 0) \in H_i
\end{aligned}$$

On peut donc munir $H(A^\bullet)$ d'une structure d'$A_\infty$-algèbre. Cette construction est dût à Merkulov.

# 5 Divers calcul d'$A_\infty$-algèbre

*Dans cette section, on va s'intéresser au calcul de structure d'$A_\infty$-algèbre. Tout ce qui est raconté ici est grandement inspiré de [4]*

10. La définition de l'application est évidente mais pour être rigoureux, il faudrait composer par l'isormorphisme d'avant.
11. on utilise la notation en coordonnée.

## 5.1 Les algèbres $B(p)$, $D(\lambda)$ et $C(\alpha, \beta)$

On dira qu'une algèbre de la forme $A = k \oplus A_1 \oplus A_2$ est cubique connectée. Si elle est munit d'une structure d'$A_\infty$-algèbre, on supposera qu'elle respecte l'unité. Si $A_0 = k$, on dira que $A$ est connecté.

**Proposition 5.1.** *Soit $A$ une cubique connectée $A_\infty$-algèbre, alors*

1. *Si $n \neq 2$, alors $m_n(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = 0$ si $\exists a_i \notin A_1$*
2. *Si $n \neq 2$, alors l'image de $m_n$ est dans $A_2$*
3. *$(A, m_2)$ est une algèbre associative. L'ensemble des applications $k$-linéaire $m_2 : (A_1)^{\otimes 2} \to A_2$ est en bijection avec l'ensemble des multiplication associative $m_2$ sur $A$. (de degré 0)*

*Démonstration.* 1). Si $a_i \in k$, $m_n(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = 0$ car $A$ est unitaire. Si $a_i \in A_2$, pour des raisons de degrés $m_n(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = 0$ .
2). $m_n$ est non nulle seulement sur $(A_1)^{\otimes n}$ qui est donc a valeur dans $A_2$ pour des raisons de degrés.
3). Soit $m_2 : (A_1)^{\otimes 2} \to A_2$ $k$-linéaire, on étend $m_2$ en un application $A^{\otimes 2} \to A$ par

$$m_2(1, a) = m_2(a, 1) = a \qquad \text{pour } a \in A \tag{5}$$

$$m_2(a, b) = 0 \qquad \text{si } a \text{ ou } b \in A_2 \tag{6}$$

On vérifie facilement que $m_2$ est une multiplication associative. La réciproque est claire. Avec les deux équations écrite, on voit que $(A, m_2)$ est associative. $\square$

**Proposition 5.2.** *Soit $(A, m_2)$ une cubique connectée algèbre $\mathbb{Z}$-gradué. Pour tout $n \neq 2$, soit $m_n : (A_1)^{\otimes n} \to A_2$ une application $k$-linéaire. On définit $m_n = 0$ sur $A^{\otimes n} \backslash (A_1)^{\otimes n}$. Alors, $(A, m_1, m_2, \cdots)$ est une $A_\infty$-algèbre.*

*Démonstration.* Les identités $St_1^m$ et $St_2^m$ sont clairs. Comme $(A, m_2)$ est associative d'après la proposition précédente $St_3^m$ est équivalent à

$$m_1 m_3 + m_3(m_1 \otimes \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes m_1 \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \otimes m_1) = 0$$

Ce qui est vrai car $m_3$ et $m_1$ sont à valeur dans $A_2$ d'après la proposition 4.1. Pour $n > 3$, l'identité à vérifier est

$$\sum_{\substack{r+s+t=n \\ r,t \geq 0 \\ s \geq 1}} (-1)^{r+st} m_{r+1+t}(1^{\otimes r} \otimes m_s \otimes 1^{\otimes t}) = 0.$$

Si $s, u \neq 2$, le même argument est valable pour justifier $m_u(\mathbb{1}^{\otimes r} \otimes m_s \otimes \mathbb{1}^{\otimes t}) = 0$. L'identité devient

$$\sum_{r=0}^{n-2} (-1)^r m_{n-1}(\mathbb{1}^{\otimes r} \otimes m_2 \otimes \mathbb{1}^{\otimes n-r-2}) - m_2(\mathbb{1} \otimes m_{n-1}) + (-1)^{n-1} m_2(m_{n-1} \otimes \mathbb{1}) = 0$$

On remarque que des termes à priori non nuls apparaissent uniquement si on évalue l'identité en des permutations de $(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-1} \otimes 1)$ avec $a_i \in A_1$. On peut vérifier chaque cas à la main, on fait ici le cas $(a_1 \otimes \cdots \otimes 1)$. On obtient

$$\begin{aligned}
m_2(m_{n-1} \otimes \mathbb{1})(a_1 \otimes \cdots \cdots 1) &= (-1)^{n-1} m_{n-1}(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-1}) \\
m_2(\mathbb{1} \otimes m_{n-1})(a_1 \otimes \cdots \otimes 1) &= 0 \\
(-1)^r m_{n-1}(\mathbb{1}^{\otimes r} \otimes m_2 \otimes \mathbb{1}^{\otimes n-r-2})(a_1 \otimes \cdots \otimes 1) &= 0 \qquad \text{si } r \neq n-2 \\
&= (-1)^{n-2} m_{n-1}(a_1 \otimes \cdots a_{n-1}) \qquad \text{sinon}
\end{aligned}$$

d'où le résultat. $\square$

**Remarque.** La proposition précédente permet de construire des $A_\infty$-algèbre avec des multiplications $m_n$ a priori non nul. Dans la proposition suivante, on va étudier la cas où quasiment toutes les multiplications sont nulles.

**Proposition 5.3.** *Soit $(A, m_2, m_p)$ une $A_\infty$-algèbre avec $p > 2$ ($p = 1$ correspond à une dg algèbre). Alors les identités de Stacheff sont automatiquement vérifié sauf pour $St_3^m$, $St_{p+1}^m$, $St_{2p-1}^m$.*

*Démonstration.* Il suffit de garder les identités où $p$ et 2 apparaissent. Le résultat est direct. □

**Remarque.** Dans la proposition précédente, on peut préciser les 3 identités de stacheff simplifié :

$$\begin{aligned}
St_3^m &: m_2(m_2 \otimes \mathbb{1}) - m_2(\mathbb{1} \otimes m_2) = 0, \\
St_{p+1}^m &: \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^i m_p(\mathbb{1}^{\otimes i} \otimes m_2 \otimes \mathbb{1}^{\otimes p-1-i}) - m_2(\mathbb{1} \otimes m_p) + (-1)^p m_2(m_p \otimes \mathbb{1}) = 0, \\
St_{2p-1}^m &: \sum_{r=0}^{p-1} (-1)^{r(p+1)} m_p(\mathbb{1}^{\otimes r} \otimes m_p \otimes \mathbb{1}^{\otimes p-1-r}) = 0
\end{aligned}$$

**Exemple.** Soit $B$ l'algèbre gradué associative suivante $k[x_1, x_2]/(x_1^2)$ avec $x_1, x_2$ algébriquement indépendant, $|x_1| = 1$ et $|x_2| = 2$.[12] Soit $p \geq 3$, on définit $m_p$ en utilisant une base de $B$ comme suit. Pour $s \geq 0$, on pose

$$x_s = \begin{cases} x_2^{s/2} & \text{si } s \text{ est pair} \\ x_1 x_2^{(s-1)/2} & \text{si } s \text{ est impair} \end{cases}$$

On voit facilement que $\{x_s\}_{s\in\mathbb{N}}$ est une base de $B$. Pour $i_1, \cdots, i_p \in \mathbb{N}$, on définit

$$m_p(x_{i_1} \otimes \cdots \otimes x_{i_p}) = \begin{cases} x_j & \text{si tout } i_j \text{ est impair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $j = i_1 + \cdots + i_p - p + 2$.
Comme $B$ est associative $St_3^m$ est vérifié, il reste à vérifier $St_{p+1}^m$ et $St_{2p-1}^m$. $St_{2p-1}^m$ est automatiquement vérifié car l'image de $m_p$ dans la formule précédente donne un élément de la forme $x_s$ avec $s$ pair ( car $j$ pair) et $m_p = 0$ si un des éléments en entrée est de la forme $x_s$ avec $s$ pair par définition, ensuite il suffit d'utiliser la formule de la remarque. Il faut vérifier $St_{p+1}^m$, soit $a = (x_{i_1}, \cdots, x_{i_{p+1}})$. Si $i_s$ est pair pour un $s \in ]|1, p+1|[$, alors

$$\begin{aligned}
&- m_2(\mathbb{1} \otimes m_p)(a) = 0 \\
&(-1)^p m_2(m_p \otimes \mathbb{1})(a) = 0 \\
&(-1)^i m_p(\mathbb{1}^{\otimes i} \otimes m_2 \otimes \mathbb{1}^{\otimes p-1-i})(a) = 0
\end{aligned}$$

pour $i \neq s-2, s-1$. On voit que les deux termes restant (pour $i = s-2$ et $i = s-1$) s'annulent entre eux en écrivant $x_{i_s} x_{i_{s+1}} = x_{i_s + i_{s+1}}$ et en distinguant pair et impair. Si $i_s$ est impair pour tout $1 < s < p+1$ et $i_1$ pair, alors les termes non nuls sont

$$m_p(m_2 \otimes \mathbb{1}^{\otimes p-1}) \text{ et } - m_2(\mathbb{1} \otimes m_p) \tag{7}$$

qui s'annulent entre eux. Si $i_s$ est impair pour tout $1 \leq s < p+1$, alors les termes non nuls sont

$$(-1)^{p-1} m_p(\mathbb{1}^{\otimes p-1} \otimes m_2) \text{ et } (-1)^p m_2(m_p \otimes \mathbb{1}) \tag{8}$$

12. La graduation est donné par $B_0 = k$, $B_i = Vect(x_1 x_2^{i-1})$

qui s'annulent entre eux. Enfin, si tout les $i_s$ sont impairs, les termes non nuls sont

$$-m_p(\mathbb{1} \otimes m_p) \text{ et } (-1)^p m_2(m_p \otimes \mathbb{1}) \tag{9}$$

qui s'annulent entre eux.

On notera par la suite $B(p)$, la $A_\infty$-algèbre obtenue par la proposition précédente.

**Définition 5.4.** Soit $A$ une algèbre bigraduée i.e une algèbre gradué par $\mathbb{Z}^2$. On a $A = \bigoplus_{n,p\in\mathbb{Z}} A_{n,p} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \tilde{A}_n$ où $\tilde{A}_n \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} A_{n,p}$. La graduation selon $n$ est appelé graduation cohomologique et la graduation selon $p$ est appelé graduation de Adams. Le degré d'un élément $x \in A_{n,p}$ sera le couple $|x| = (n,p)$. Une application graduée $f$ entre $A$ et une autre algèbre bigraduée préserve le degré d'Adams si $|f(x)| = (n + |f|, p)$ pour $x \in A_{n,p}$.[13]

**Exemple.** Dans l'exemple précédent, à l'aide de la base $\{x_s\}$, on peut définir une bigraduation dont la multiplication préserve le degré d'Adams en donnant le degré de $x_1$ et $x_2$ et de prolonger les degré par multiplication. On voit aussi que si on prend $|x_1| = (1,1)$ et $|x_2| = (1,p)$, $m_p$ préserve aussi le degré d'Adams.

**Proposition 5.5.** *Soit $B$ la dg algèbre de l'exemple précédent et $p \geq 3$. On suppose que $x_1$ et $x_2$ ont respectivement un degré d'Adams de 1 et $p$. Soit $A$ une $A_\infty$-algèbre avec $(A, m_2) = B$ tel que $m_n$ préserve le degré d'Adams. Alors après un changement de bases $A$ est soit $B(p)$ ou soit $B$ avec $m_n = 0$ pour $n \neq 2$.*

*Démonstration.* Par définition, $|x_{2k+1}| = (2k+1, kp+1)$ et $|x_{2k}| = (2k, kp)$ pour $k \geq 0$.
Soit $x_{2k_1+1}, \cdots, x_{2k_{p'}+1}, x_{2k_{p'+1}}, \cdots, x_{2k_n}$ $n$ éléments de la base dont on a explicité les indice pairs et impairs. On a pour n'importe quelle permutation de $a = (x_{k_1}, \cdots, x_{k_n})$ :

$$|m_n(a)| = (2(k_1 + \cdots + k_n) + k_p + 2 - n, p(k_1 + \cdots + k_n) + k_p)$$

Si $n \neq 2, p$, on voit que $m_n = 0$ par définition de la graduations et $m_p(a) = 0$ si $p \neq p'$.
On a aussi que

$$|m_p(x_1, \cdots, x_1)| = (2, p)$$

Donc $m_p(x_1, \cdots, x_1) = cx_2$ pour un certain $c \in k$. Si $c = 0$, on peut montrer que $m_p = 0$ en utilisant $St^m_{p+1}$ sinon en effectuant le changement de base $x'_2 = c^{-1}x_2$ on peut supposer $c = 1$ et en appliquant encore $St^m_{p+1}$ on trouve la formule de l'exemple. On remarque que la graduation nous dit déjà que $m_p(x_{2k_1+1}, \cdots, x_{2k_p+1})$ est proportionnel à $x_j$ avec $j$ définit dans l'exemple. □

**Remarque.** La proposition précédente nous dit que $B(p)$ est la seul structure d'$A_\infty$-algèbre sur $B$ qui respecte le degré d'Adams. (A multiplication près) On voit que le degré d'Adams permet de limiter les structures possibles et de simplifier les $m_n$.

**Proposition 5.6.** *Soit $B(p)$ l'$A_\infty$-algèbre définit précédemment. Alors $B(p)$ et $B(q)$ ne sont pas quasi isomorphe pour $p \neq q$.*

*Démonstration.* Soit $f$ un quasi isomorphisme entre $B(q)$ et $B(p)$. Comme $m_1 = 0$, $f_1$ est un isomorphisme. En utilisant la graduation, $f_1(x_1) = ax_1$ et $f_1(x_2) = bx_2$ pour $a, b \in k$ et $f_i(x_1, \cdots, x_1) = a_i x_1$. On suppose $q > p$, $St^m_p(f)$ devient

$$\sum_{i=1}^{p-1} \pm m_2(f_i \otimes f_{p-i})(x_1, \cdots, x_1) + m_p(f_1 \otimes \cdots \otimes f_1)(x_1, \cdots, x_1) = 0$$

où on a noté $\pm$ le signe car il n'a pas d'importance ici. En évaluant, on trouve $a^p x_2 = 0$ car $m_2(x_1, x_1) = 0$. D'ou $a = 0$, ce qui contredit le fait que $f_1$ soit un isomorphisme.

13. Ici, il y a deux degré qui interviennent dans l'écriture de celui de $f$.

Si $q < p$, $St_p^m(f)$ devient

$$\sum_{r=0}^{q-2} \pm f_{q-1}(\mathbb{1}^{\otimes r} \otimes m_2 \otimes \mathbb{1}^{\otimes q-2-r})(x_1, \cdots, x_1) + f_1 m_q(x_1, \cdots, x_1) = 0$$

et on trouve $b = 0$ en remplaçant, d'où l'absurdité. $\square$

**Remarque.** On a considéré l'algèbre comme étant commutative mais on aurait put considérer une algèbre polynomiale non commutative. De plus, on peut montrer que $B(p)$ ne peut être quasi-isomorphe à une DGA algèbre [14] en considérant le dual de Koszul de $B(p)$ qui n'est pas une algèbre de Hopf tant dit que le dual de Koszul d'une DGA algèbre est une algèbre de Hopf.

**Proposition 5.7.** *Soit $(A, m_1, m_2, \cdots)$ une $A_\infty$-algèbre et $w, z$ des entiers.*

1. *Soit $\overline{m}_n = (-1)^{w+zn} m_n$. Alors $\overline{A} = (A, \overline{m}_n, \cdots)$ est un $A_\infty$-algèbre. (d'unité $(-1)^w$ quitte a augmenter $A$)*
2. *Soit $f_1(a) = (-1)^{w+(z+w)|a|} a$ pour $a \in A$ homogène et $f_i = 0$ pour $i \geq 2$. Alors $f : A \to \overline{A}$ est un strict isomorphisme.*

*Démonstration.* Les vérifications sont directes. $\square$

On continue sur des exemples d'$A_\infty$-algèbre.

**Exemple.** Soit $D$ l'algèbre associative gradué suivante

$$D_0 \oplus D_1$$

où $D_0 = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ et $D_1 = \begin{pmatrix} 0 & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ On notera $p = e_{12}$ et $e = e_{11} - e_{22}$. On a $e_{11} + e_{22} = I_2$, $ep = p = -pe$ et $e^2 = I_2$. On munit $D_0$ de la base $\{I_2, e\}$ et $D_1$ de $\{p\}$. On voit que $D$ n'est pas connecté et on définit une structure d'$A_\infty$-algèbre en posant $m_n = 0$ pour $n \neq 2, 3$, $m_2$ la multiplication matricielle et $m_3$ comme suit

$$m_3(p, e, p) = \lambda p \quad \text{et} \quad m_3(autre) = 0$$

pour $\lambda \in k$. On notera $D(\lambda) = (D, m_2, m_3)$

**Proposition 5.8.** *Soit $D(\lambda)$ comme précédemment.*

1. *$D(\lambda)$ est une $A_\infty$-algèbre*
2. *Si $\lambda \neq 0$, $D(\lambda)$ est strictement isomorphe à $D(1)$.*
3. *Il n'y a pas de strict isomorphisme entre $D(0)$ et $D(1)$.*

*Démonstration.* On montre que $D(1)$ est une $A_\infty$-algèbre. La preuve est la même pour $D(\lambda)$.
On a uniquement besoin de vérifier $St_4^m$ et $St_5^m$ d'après la proposition 4.3.
Pour $St_5^m$, on remarque que $m_3(\mathbb{1} \otimes m_3 \otimes \mathbb{1}) = 0$ par définition de $m_3$. Soit $x = (x_1, \cdots, x_5) \in D^{\otimes 5}$ avec $x_i \in \{I_2, e, p\}$, pour que $m_3(m_3 \otimes \mathbb{1}^{\otimes 2})$ ou $m_3(\mathbb{1}^{\otimes 2} \otimes m_3)$ soit non nul, $x$ doit être égal à $(p, e, p, e, p)$. Dans ce cas,

$$m_3(\mathbb{1}^{\otimes 2} \otimes m_3)(x) = -(p, e, p) \text{ et } m_3(m_3 \otimes \mathbb{1}^{\otimes 2})(x) = (p, e, p)$$

d'où $St_5^m$.
Pour $St_4^m$, on vérifie à la main tous les cas possible pour $x$ qui sont $(e, p, p, p)$, $(p, p, p, p)$, $(p, p, p, e)$, $(p, e, p, p)$, $(p, p, e, p)$, $(e, e, p, p)$, $(p, p, e, e)$, $(e, p, p, e)$, $(p, e, e, p)$, $(e, p, e, p)$, $(p, e, p, e)$ et s'il y a 3 $e$ dans $x$.

14. C'est une dg algèbre augmentée

Le strict est définit par $f_1(1) = 1$, $f(e) = e$ et $f(p) = \lambda p$.
La dernier provient du fait qu'un strict isomorphisme vérifie

$$f_1 m_n = m'_n(f_1 \otimes \cdots \otimes f_1)$$

pour $n \geq 1$ et que $m_3 = 0$ tant dit que $m'_3 \neq 0$. On obtient une contradiction sur le fait que $f_1$ soit un isomorphisme. □

On va tout de même montrer qu'il existe un quasi isomorphisme entre $D(0)$ et $D(1)$.

**Lemme 5.9.** *Soit $B$ une $A_\infty$-algèbre avec $m_n = 0$ pour $n \neq 2, 3$ et $A$ une algèbre associative. Soit $f$ une famille d'application gradué*

$$f_n : B^{\otimes n} \to A$$

*de degré $1-n$. L'identité $St_n(f)$ devient*

$$\sum_{r=0}^{n-2}(-1)^r f_{n-1}(\mathbb{1}^{\otimes r} \otimes m_2 \otimes \mathbb{1}^{n-r-2}) - (-1)^n \sum_{s=0}^{n-3} f_{n-2}(\mathbb{1}^{\otimes s} \otimes m_3 \otimes \mathbb{1}^{\otimes n-s-3}) = \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i-1} m_2(f_i \otimes f_{n-i})$$

*Démonstration.* La vérification est immédiate. □

**Proposition 5.10.** *On suppose que $car(k) \neq 2$ et on définit $f : D(1) \to D(0)$ par*

$$f_1 = \mathbb{1}$$

*et*

$$f_n(p, \cdots, p) = -(-1)^{n(n+1)/2}\frac{1}{2^{n-1}}p \quad et \quad f_n(autre) = 0$$

*Alors $f$ est un quasi isormorphisme d'$A_\infty$-algèbre.*

*Démonstration.* $f_n$ est bien de degré $1-n$. On vérifie d'abord $St_n(f)$ lorsqu'on l'applique à un élément $x$ contenant $I_2$. Il y a 3 cas a considérer,

1. $x = (I_2, a_2, \cdots, a_n)$, on vérifie que les 2 termes du Lemme 4.9 valent $f_{n-1}(a_2, \cdots, a_n)$.
2. $x = (a_1, \cdots, I_2)$, on vérifie que les 2 termes du Lemme 4.9 valent $(-1)^{n-2} f_{n-1}(a_1, \cdots, a_{n-1})$.
3. $x = (a_1, \cdots, a_n)$ avec $a_i = I_2$ pour un $1 < i < n$, on vérifie que les 2 termes du Lemme 4.9 sont nuls.

Maintenant on suppose que $a_i = e$ ou $p$.
$m_1 = 0$ donc $St_1(f)$ est direct. Comme $f_1$ est l'identité, $St_2(f)$ est vérifié. $St_3(f)$ est équivalente à

$$f_2(m_2 \otimes \mathbb{1} - \mathbb{1} \otimes m_2) + f_1 m_3 = m_2(f_1 \otimes f_2 - f_2 \otimes f_1).$$

Si $x = (e, a, b)$, alors le terme de droite est $ef_2(a, b)$ et celui de gauche est $f_2(ea, b)$. Les deux sont nuls sauf si $a = b = p$, et dans ce cas, ils sont égaux. Si $x = (p, p, b)$, le terme de droite est $-pf_2(p, b) - f_2(p, p)b$ et celui de gauche est $-f_2(p, pb)$, qui sont égaux. Si $x = (p, e, b)$, on vérifie qu'on a bien l'égalité. Maintenant, il faut vérifier $St_n(f)$ pour $n > 3$. Le terme de gauche peut se simplifier en $m_2(f_1 \otimes f_{n-1}) + (-1)^{n-2} m_2(f_{n-1} \otimes f_1)$ .

1. Si $x = (a_1, \cdots, a_n)$ et au moins deux $a_i$ sont égaux à e, les deux cotés sont nuls
2. Si $x = (e, p, \cdots, p)$, le terme de droite est $f_{n-1}(p, \cdots, p)$ et de même pour celui de gauche.
3. Si $x = (p, \cdots, p, e)$, le terme de droite vaut

$$(-1)^{n-2} m_2(f_{n-1}(p, \cdots, p) \otimes f_1(e)) = (-1)^{n-1} f_{n-1}(p, \cdots, p)$$

Et celui de gauche

$$(-1)^{n-2} f_{n-1}(p, \cdots, p, pe) = (-1)^{n-1} f_{n-1}(p, \cdots, p)$$

4. Si $x = (p, \cdots, e, \cdots, p)$ où $e$ est la $i$-ème position, le terme de droite est nul et celui de gauche est

$$\begin{aligned}(-1)^{i-2} f_{n-1}(p, \cdots, {}^p e, p, \cdots, p) + (-1)^{i-1} f_{n-1}(p, \cdots, p, ep, \cdots, p) - (-1)^{n+i-2} f_{n-2}(p, \cdots, p) \\ = (-1)^{i-1}(2f_{n-1}(p, \cdots, p) + (-1)^n f_{n-2}(p, \cdots, p)) = 0\end{aligned}$$

Enfin, comme $f_1$ est l'identité et $m_1 = 0$, $f$ est un quasi isomorphisme. On a pas fait le cas $x = (p, \cdots, p)$ car il est direct. □

On va donné un dernier exemple d'$A_\infty$-algèbre qui est différente des deux exemples précédent

**Exemple.** Soit $\alpha \neq 0, \beta \in k$. On commence par définir une algèbre graduée associative $C(\alpha)$ par

$$C = C_0 \oplus C_1 \oplus C_2 \oplus C_3 = k1 \oplus (ka \oplus kb) \oplus (kc \oplus kd) \oplus ke$$

La multiplication $m_2$ est donné par les régles suivantes :

1. 1 est l'identité
2. $ac = e$, $ad = 0$, $bc = 0$, $bd = \alpha e$
3. $ca = \alpha e$, $da = 0$, $cb = 0$, $db = e$
4. les autres produits sont nuls

On peut vérifier que la loi est bien associative. On pose $m_n = 0$ pour $n \neq 2, 3$ et $m_3$ est définie comme suit

$$m_3(a, b, b) = c, \ m_3(b, b, a) = \alpha c, \ m_3(b, a, b) = \beta c$$

$$m_3(a, a, b) = d, \ m_3(b, a, a) = \alpha d, \ m_3(a, b, a) = \beta d$$

$$m_3(autres) = 0$$

D'après la proposition 4.3 il suffit de vérifier $St_4^m$ et $St_5^m$. Mais $St_5^m$ est évident car chaque terme qui apparaissent sont nuls. Pour $St_4^m$, on vérifie à la main les cas $x = (a, a, b, b), (a, b, b, a), (a, b, a, b), (b, b, a, a), (b, a, b, a), (b, a, a, b)$. On note $C(\alpha, \beta)$ l'$A_\infty$-algèbre obtenu.

**Remarque.** On peut modifier la construction de $C(\alpha, \beta)$ en changeant la condition $ca = \alpha e$ en $ca = \gamma e$ avec $\gamma \neq \alpha$. Lors de la vérification de $St_n^m$, la condition $\beta = 0$, $\gamma = -\alpha$ et $m_3(b, b, a) = -\alpha c$ apparaît et en faisant ces changements, on obtient une autre $A_\infty$-algèbre. On voit que ça demande pas mal de travail pour construire des exemples d'$A_\infty$-algèbre et encore plus de morphisme d'$A_\infty$-algèbre.

# 6 L'Algèbre Ext et théorie de Morse

*Dans cette section, on va introduire l'algèbre Ext et la munir d'une structure d'$A_\infty$-algèbre. En suite, on utilisera la théorie de Morse pour en calculer quelques unes.*

## 6.1 Algèbre Ext

Soit $M, N$ des $A$-modules avec $A$ un anneau.

**Définition 6.1.** Une résolution projective/libre $F_\bullet$ de $A$ est une suite exact longue de la forme

$$F_\bullet : \ \cdots \longrightarrow F_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

où les $F_n$ sont des $A$ modules projectif/libre .

**Remarque.** De tel résolution existe tout le temps, il suffit de voir que $M$ s'écrit comme un quotient d'un module libre disons $F_0/F_1'$. En itérant à $F_1'$, on a $F_1' = F_2/F_2'$, ainsi de suite on a une résolution $F_\bullet$ de $M$ qui est libre/projectif.

Dans toute la suite, on se donne une résolution libre de $M$, $F_\bullet$ dont on notera $d_i : F_i \to F_{i-1}$ sa différentielle.

**Définition 6.2.** On définit $Hom_A(F_\bullet, N)$ la complexe suivant :

$$Hom_A(F_\bullet, N) : \qquad Hom_A(F_0, N) \xrightarrow{f \to d_1 \circ f} Hom_A(F_1, N) \longrightarrow \cdots$$

**Définition 6.3.** On définit $Ext^p_A(M, N) =: H^p(Hom_A(F_\bullet, N))$.

**Remarque.** A priori $Ext$ dépend de la résolution $F_\bullet$ mais on peut montrer qu'en fait, elle est indépendante de celle choisie. Voir Lemme 2.43 de [6] pour une preuve. Lorsque $M = N$, on peut la munir d'une structure d'anneau qui sera préciser dans la proposition suivante mais sans démonstration.

**Définition 6.4.** On définit la dg algèbre $Hom_A(F_\bullet, F_\bullet)$ par

$$Hom^p_A(F_\bullet, F_\bullet) = \{(f_n)_{n \in \mathbb{Z}},\ f_n : F_n \to F_{n-p} \ \text{ A-linéaire}\}$$

. La différentielle est donné par $d(f_n) = (g_n)$ où $(f_n) \in Hom^p_A(F_\bullet, F_\bullet)$ et $g_n : F_n \to F_{n-p-1}$ est donné par

$$d_{n-p} \circ f_n - (-1)^p f_{n-1} \circ d_n$$

Le produit est $(g_n) \cdot (f_n) = (h_n) \in Hom^{p+q}_A(F_\bullet, F_\bullet)$ avec

$$h_n = g_{n-p} \circ f_n$$

**Remarque.** On vérifie facilement les points de la définition d'une dg algèbre, la preuve est laissé au lecteur. On notera $F_n = 0$ si $n < 0$.

**Proposition 6.5.** *On a $H^\bullet(Hom_A(F_\bullet, F_\bullet)) \simeq Ext^\bullet_A(M, M)$ en tant que A-algèbre.*

**Remarque.** Pour une preuve, voir [6]

D'après la proposition 5.5 et le théorème de Kadeishvili, on peut munir $Ext^\bullet_A(M, M)$ d'une structure d'$A_\infty$-algèbre si on suppose $A$ un $k$ espace vectoriel.

**Proposition 6.6.** *Supposons $A = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} A_n$ avec $A_0 = k$ une algèbre connectée. Alors $Ext^\bullet_A(k, k)$ est une $A_\infty$-algèbre.*

*Démonstration.* La preuve découle de la remarque précédente en munissant $k$ d'une structure de $A$-module via la projection sur $A_0$. □

**Remarque.** Pour pouvoir continuer sur le calcul de $Ext^\bullet_A(k, k)$ dans le cadre de la proposition 5.6, il nous faut un moyen de calculer une résolution libre de $k$.

## 6.2 La résolution Bar et théorie de Morse

*Dans cette section, on suppose qu'on est dans le cadre d'une $k$-algèbre augmenté $(A, \epsilon)$ et on va donner un premier exemple de résolution de $k$.*

**Définition 6.7.** On pose $I = ker(\epsilon)$ et $\overline{B}(k, A)_n = I^{\otimes n} \otimes_k A$. On munit cet espace de l'action suivante

$$(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes a) \cdot b = a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes ab$$

On définit une application $A$-linéaire $d_n : \overline{B}(k, A)_n \to \overline{B}(k, A)_{n-1}$ par

$$d_n(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes 1) = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i a_1 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n \otimes 1 + (-1)^n a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-1} \otimes a_n$$

**Proposition 6.8.** *La suite*

$$\overline{B}(k,A)\ :\qquad ...\longrightarrow \overline{B}(k,A)_n \xrightarrow{\quad d_n \quad} \overline{B}(k,A)_{n-1} \longrightarrow ... \xrightarrow{d_1} A \xrightarrow{\epsilon} k \longrightarrow 0$$

*est exact. En particulier $\overline{B}(k,A)$ est une résolution libre de $A$.*

*Démonstration.* On définit $s_n : \overline{B}(k,A)_n \to \overline{B}(k,A)_{n+1}$ par :

$$\begin{aligned} s_n(a_1 \otimes \cdots a_n \otimes a) &= a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes a \otimes 1 \quad si\ a_n \in I \\ &= 0 \quad sinon \end{aligned}$$

et $s\_1 : k \to A$ par :

$$s_{-1}(\lambda) = \lambda.1_A$$

On voit facilement que $d_n$ vérifie la relation

$$d_{n+1} \circ s_n - s_{n-1} \circ d_n = (-1)^{n+1} \mathbb{1}_{Bar(k,A)_n}$$

De plus,

$$\begin{aligned} d_n \circ d_{n+1}(a_1|\cdots|a_{n+1}|1) &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j \le i-2} (-1)^{i+j} a_1|\cdots|a_j a_{j+1}|\cdots|a_i a_{i+1}|\cdots|a_{n+1}|1 && (10) \\ &+ \sum_{i=1}^{n} (-1)^{2i-1} a_1|\cdots|a_{i-1}a_i a_{i+1}|\cdots|a_{n+1}|1 && (11) \\ &+ \sum_{i=1}^{n} (-1)^{2i} a_1|\cdots|a_i a_{i+1} a_{i+2}|\cdots|a_{n+1}|1 && (12) \\ &+ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+2}^{n} (-1)^{i+j-1} a_1|\cdots|a_i a_{i+1}|\cdots|a_j a_{j+1}|\cdots|a_{n+1}|1 && (13) \\ &+ (-1)^n \sum_{i=1}^{n} (-1)^i a_1|\cdots|a_i a_{i+1}|\cdots|a_{n+1} && (14) \\ &+ (-1)^{n+1} \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i a_1|\cdots|a_j a_{j+1}|\cdots|a_{n+1} && (15) \\ &+ (-1)^{2n+1} a_1|\cdots|a_n a_{n+1} && (16) \end{aligned}$$

On facilement que (10) et (13), (11) et (12), (14) et (15), (16) s'annulent entre eux donc $d_n \circ d_{n+1} = 0$ et avec la relation précédente, on en déduit la proposition. □

**Remarque.** Dans la suite on utilisera la description $\overline{B}(k,A)_n = \overline{A}^{\otimes n} \otimes A$ où $\overline{A} = A/k.1_A$ en identifiant $I$ avec $\overline{A}$.

On va définir la théorie de Morse pour l'appliquer à la résolution Bar de $k$ pour obtenir la résolution d'Anick.

**Définition 6.9.** Soit $R$ un anneau. On complexe basée de $R$-modules est un complexe $K$ de $R$-module qui possède une décomposition $K_n = \bigoplus_{\alpha \in I_n} K_\alpha$ où $I_n$ est un ensemble d'indice. La notation $\alpha^{(n)}$ signifie que $\alpha^{(n)} \in I_n$
Pour $f : K \to K$ une application gradué, on notera $f_{\beta,\alpha}$ la composante de $f$ allant de $K_\alpha$ vers $K_\beta$.
Pour un complexe basé $K$, on construit un digraphe $G_K$ où l'ensemble des sommets est $V = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} I_n$ et l'ensemble des arêtes est tel que $\alpha \to \beta$ si $d_{\beta,\alpha} \neq 0$ où $d$ est la différentielle du complexe $K$.
Un partial matching sur un digraphe $D = (V,E)$ est un sous ensemble $A$ d'arête de $E$ tel que chaque sommet de $V$ est a au plus une extrémité d'une arête de $E$. Dans ce cas on notera $D^A$ le graphe obtenue en inversant

les arêtes de $A$.

Enfin, un morse matching $M$ sur le digraphe $G_K$ est un partial matching sur $G_K$ tel que pour $\alpha \to \beta \in M$ on a $d_{\beta,\alpha}$ est un isomorphisme et il y a un ordre partiel bien fondé [15] sur chaque $I_n$ tel que $\gamma < \alpha$ si il existe un chemin $\alpha^{(n)} \to \beta^{(n)} \to \gamma^{(n)} \in G_K^M$. On notera $M^0$ les sommets qui ne sont pas sur des arêtes de $M$, on définit $M^-$ et $M^+$ par

$$M^- = \{\alpha \ \mid \ \beta \to \alpha \in M \ \beta \in V\}$$

$$M^+ = \{\alpha \ \mid \ \beta \to \gamma \in M \ \gamma \in V\}$$

On notera aussi $M_n^0 = M^0 \cap I_n$

**Remarque.** Comme la différentielle est de degré $-1$, les seuls arêtes possible de $G_K^M$ partant d'un élément de $I_n$ tombent dans $I_{n-1}$ ou $I_{n+1}$.

**Proposition 6.10.** *Soit $K$ un complexe basé tel que $G_K$ est finie et $M$ un partial matching sur $G_K$ tel que $d_{\beta,\alpha}$ est un isomorphisme quand $\alpha \to \beta \in M$. Alors $M$ est un morse matching si et seulement si $G_K^M$ ne possèdent pas de cycles.*

*Démonstration.* Supponson que $G_K^M$ ne possèdent pas de cycles. Pour un sommet $u^{(n)}$, on note

$$l(u) = max(s \mid u^{(n)} = u_0^{(n)} u_1 u_2^{(n)} \cdots u_s^{(n)} \text{ un chemin} \in G_K^M)$$

comme il n'y a pas de cycles, $l(u)$ est bien définie. On pose $u^{(n)} < v^{(n)}$ si $l(u) < l(v)$. C'est facile de voir que c'est un ordre partiel bien fondé et que les conditions du morse matching sont vérifié. (Pour la dernière, il suffit de composer les chemins). Pour l'autre sens, on suppose qu'il y a un cycle $u_1 \cdots u_n$ avec $u_1 = u_n$. D'après la remarque, pour tout $i$, on a soit $u_i u_{i+1}$ est l'inverse d'une arête de $M$ ou bien c'est $u_{i+1}u_{i+2}$ et en utilisant la dernière condition sur la morse matching, on obtient $u_n < u_1$ ce qui est absurde. ( on a $u_3 < u_1$ et ainsi de suite) □

**Définition 6.11.** Soit $M$ un morse matching sur un complexe basé $K$. On définit un application gradué $\phi : K \to K$ de degré 1 par induction. Si $\alpha$ est minimal pour l'ordre $<$ et $x \in K_\alpha$, on pose

$$\phi(x) = \begin{cases} d_{\alpha,\beta}^{-1}(x) & \text{si } \beta \to \alpha \in M \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Si $\alpha$ n'est pas minimal et $x \in K_\alpha$, on pose

$$\phi(x) = \begin{cases} d_{\alpha,\beta}^{-1}(x) - \sum\limits_{\substack{\beta \to \gamma \\ \gamma \neq \alpha}} \phi d_{\gamma,\beta} d_{\alpha,\beta}^{-1}(x) & \text{si } \beta \to \alpha \in M \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La dernière somme est bien définie car il y a que des termes avec $\gamma < \alpha$.

**Proposition 6.12.** *L'application $\phi$ vérifie les relations suivantes :*

1. *$\phi^2 = 0$ et $\phi d \phi = \phi$*
2. *Pour $x_\alpha \in K_\alpha$,*

$$d\phi(x_\alpha) = \begin{cases} x_\alpha + \sum\limits_{\beta < \alpha} y_\beta & \textit{si } \alpha \in M^- \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}$$

*où $y_\beta \in K_\beta$*

15. Cela veut dire qu'il n'y a pas de chaîne descendante infini

3. *Pour* $x_\alpha \in K_\alpha$,

$$\phi d(x_\alpha) = \begin{cases} x_\alpha & si\ \alpha \in M^+ \\ \sum\limits_{\beta<\alpha} y_\beta & sinon \end{cases}$$

*où* $y_\beta \in K_\beta$

*Démonstration.* $\phi^2 = 0$ provient uniquement du fait que $M$ est un partial matching. Pour la 2ème relation, on va la prouver par induction. Supposons $\alpha$ minimal, si $\alpha \notin M^-$, alors pour $x \in K_\alpha$

$$\phi d\phi(x) = 0 = \phi(x)$$

Si $a \in M^-$ avec $\beta \to \alpha \in M$, alors

$$\phi d\phi(x) = \phi d d^{-1}_{\alpha,\beta}(x) = \phi(x)$$

Maintenant, supposons $\alpha$ qui n'est plus minimal. Si $\alpha \notin M^-$, alors on a toujours $x \in K_\alpha$

$$\phi d\phi(x) = 0 = \phi(x)$$

donc on suppose $\alpha \in M^-$ avec $\beta \to \alpha \in M$ et on alors

$$\begin{aligned}
\phi d\phi(x) &= \phi d(d^{-1}_{\alpha,\beta}(x) - \sum_{\substack{\beta\to\gamma \\ \gamma\neq\alpha}} \phi d_{\gamma,\beta} d^{-1}_{\alpha,\beta}(x)) \\
&= \phi d d^{-1}_{\alpha,\beta}(x) - \sum_{\substack{\beta\to\gamma \\ \gamma\neq\alpha}} \phi d\phi d_{\gamma,\beta} d^{-1}_{\alpha,\beta}(x) \\
&= \phi d_{\alpha,\beta} d^{-1}_{\alpha,\beta}(x) + \sum_{\substack{\beta\to\gamma \\ \gamma\neq\alpha}} \phi d_{\gamma,\beta} d^{-1}_{\alpha,\beta}(x) - \sum_{\substack{\beta\to\gamma \\ \gamma\neq\alpha}} \phi d_{\gamma,\beta} d^{-1}_{\alpha,\beta}(x) \\
&= \phi(x)
\end{aligned}$$

Pour 2. on va faire par induction aussi. Supposons $\alpha$ minimal, si $\alpha \notin M^-$, on voit que $d\phi(x_\alpha) = 0$, supposons que $\alpha \in M^-$ avec $\beta \to \alpha \in M$. On a alors

$$d\phi(x_\alpha) = x_\alpha$$

Dans le cas $\alpha$ non minimal, si $\alpha \notin M^-$, $d\phi(x_\alpha) = 0$ donc supposons $\alpha \in M^-$ avec $\beta \to \alpha \in M$ et on a

$$\begin{aligned}
d\phi(x_\alpha) &= d(d^{-1}_{\alpha,\beta}(x_\alpha) - \sum_{\substack{\beta\to\gamma \\ \gamma\neq\alpha}} \phi d_{\gamma,\beta} d^{-1}_{\alpha,\beta}(x_\alpha)) \\
&= x_\alpha + \sum_{\substack{\beta\to\gamma \\ \gamma\neq\alpha}} d_{\gamma,\beta} d^{-1}_{\alpha,\beta}(x_\alpha) - d\phi \sum_{\substack{\beta\to\gamma \\ \gamma\neq\alpha}} d_{\gamma,\beta} d^{-1}_{\alpha,\beta}(x_\alpha)
\end{aligned}$$

Pour 3. on raisonne encore de la même manière. Supposons $\alpha$ minimal, si $\alpha \in M^+$ avec $\alpha \to \beta \in M$ alors

$$\phi d(x_\alpha) = \phi d_{\beta,\alpha}(x_\alpha) + \sum_{\substack{\alpha\to\gamma \\ \alpha\neq\beta}} \phi d_{\gamma,\alpha}(x_\alpha) = \phi d_{\beta,\alpha}(x_\alpha) = x_\alpha$$

car $\alpha$ minimal. Si $\alpha \notin M^+$, on a

$$\phi d(x_\alpha) = \phi( \sum_{\alpha\to\beta} d_{\beta,\alpha}(x_\alpha) = 0$$

car $\alpha$ minimal. Maintenant, supposons $\alpha$ non minimal. Si $\alpha \in M^+$ avec $\alpha \to \beta \in M$,

$$\begin{aligned}\phi d(x_\alpha) &= \phi d_{\beta,\alpha}(x_\alpha) + \sum_{\substack{\alpha\to\gamma\\ \alpha\neq\beta}} \phi d_{\gamma,\alpha}(x_\alpha)\\ &= d_{\beta,\alpha}^{-1} d_{\beta,\alpha}(x_\alpha) - \sum_{\substack{\alpha\to\gamma\\ \alpha\neq\beta}} \phi d_{\gamma,\alpha}(x_\alpha) + \sum_{\substack{\alpha\to\gamma\\ \alpha\neq\beta}} \phi d_{\gamma,\alpha}(x_\alpha) = x_\alpha\end{aligned}$$

Si $\alpha \notin M^+$,

$$\phi d(x_\alpha) = \phi \sum_{\alpha\to\beta} d_{\beta,\alpha}(x_\alpha) = \sum_{\substack{\alpha\to\beta\\ \gamma\to\beta\in M}} d_{\beta,\gamma}^{-1} d_{\beta,\alpha}(x_\alpha) - \phi \sum_{\substack{\alpha\to\beta\\ \gamma\to\beta\in M}} \sum_{\substack{\gamma\to\delta\\ \delta\neq\beta}} d_{\delta,\gamma} d_{\beta,\gamma}^{-1} d_{\beta,\alpha}(x_\alpha)$$

□

**Proposition 6.13.** *Soit $M$ un morse matching sur un complexe basé $K$. Alors les complexes $K$ et $\pi(K)$ sont homotopes où $\pi = \mathrm{id} - (\phi d + d\phi)$. De plus, pour tout $n$ on a un isomorphisme*

$$\pi(K_n) \simeq \bigoplus_{\alpha\in M_n^0} K_\alpha$$

*Démonstration.* On voit facilement que $\pi d = d\pi$ donc $\pi$ est une application de complexe et $\pi(K)$ est un complexe munit de la même différentiel. De plus, $\pi$ est clairement homotopique à l'identité et induit donc un quasi isomorphisme entre les deux complexes. Les deux complexes sont donc équivalents.
Pour la 2ème partie, on va commencer par montrer que

$$\pi(K) = \pi(\bigoplus_{\gamma\in M^0} K_\gamma)$$

On va faire par induction sur $<$ en montrant que $\pi(K_\alpha) \subset \pi(\bigoplus_{\gamma\in M^0} K_\gamma)$. Si $\alpha$ est minimal et $\alpha \in M^0$, il n'y a rien a faire donc on suppose $\alpha \notin M^0$ et dans ce cas $\pi(x) = 0$ pour $x \in K_\alpha$ d'après la proposition précédente. Si $\alpha$ n'est pas minimal et $\alpha \notin M^0$ et $x \in K_\alpha$, d'après la proposition précédente on peut trouver un ensemble $J$ avec $\gamma < \alpha$ pour $\gamma \in J$ et

$$\pi(x) = \pi(\sum_{j\in J} y_\gamma) = \sum_{\substack{\gamma\in J\\ \gamma\in M^0}} \pi(y_\gamma) + \sum_{\substack{\gamma\in J\\ \gamma\notin M^0}} \pi(y_\gamma)$$

Pour conclure, il suffit de montrer que

$$\pi : \bigoplus_{\alpha\in M_n^0} K_\alpha \to K_n$$

est injective. Pour $x \in K_\alpha$, on a que

$$\pi(x) = x + \sum_{\gamma\in J} y_\gamma$$

où $y_\gamma \in K_\gamma$ et $\gamma < \alpha$ pour $\gamma \in J$ ce qui prouve l'injectivité. □

**Proposition 6.14.** *Dans le cadre de la proposition précédente, on définit $C_n = \bigoplus_{\alpha\in M_n^0} K_\alpha$ et $\tilde{d} = \rho(d - d\phi d)$ où $\rho : \bigoplus_\alpha K_\alpha \to \bigoplus_{\alpha\in M^0} K_\alpha$ est la projection. Alors $(C, \tilde{d})$ est un complexe équivalent à $(K, d)$*

*Démonstration.* D'après la proposition 5.12 et en particulier la preuve de 3., on a $\rho\pi$ est l'identité sur $C$ car les termes qui interviennent dans la somme de 3. ne sont pas dans $M^0$. Soit $y \in \pi(K)$, d'après la proposition précédente $y = \pi(x)$ avec $x \in \bigoplus_{\alpha\in M^0} K_\alpha$ et $\pi\rho(y) = \pi\rho\pi(x) = \pi(x) = y$, donc $\rho$ et $\pi$ sont des inverses entre $\pi(K)$ et $C$. On peut donc définir une différentiel sur $C$ par $\tilde{d} = \rho d\pi$ et si on remplace $\pi$ par son expression, on a bien la même expression que dans la proposition. Les complexes $C$ et $\pi(K)$ sont équivalents de façon évidente et on conclut avec la proposition précédente. $\square$

La dernière proposition nous permet de réduire un complexe sans perdre d'information ce qui permet grandement de faciliter des calculs. On va appliquer cette méthode à la résolution Bar mais il faut savoir quand générale le fait qu'un complexe soit basé n'est pas tout le temps le cas.

**Proposition 6.15.** *Soit $G_K$ le digraphe du complexe basé $K$ et soit $\sim$ une relation d'équivalence sur $V$ tel qu'il y a un ordre bien fondé $\prec$ sur les classes d'équivalence satisfaisant $[\alpha] \prec [\beta]$ quand $\beta \to \alpha$. On suppose que l'on a un morse matcihng $M_{[\alpha]}$ sur $G_K|_{[\alpha]}$ pour tout $[\alpha] \in V/\sim$ alors $\bigcup_{[\alpha]} M_{[\alpha]}$ est un morse matching sur $G_K$.*

*Démonstration.* Pour chaque classe $[\alpha]$, on a un ordre $<_\alpha$ par hypothèse. On définit un ordre partiel sur $V$ par $\alpha < \beta$ si $[\alpha] \prec [\beta]$ ou $[\alpha] = [\beta]$ et $\alpha <_\alpha \beta$. Supposons qu'on a une $(a_i)$ décroissante, comme $\prec$ est bien fondé, on a $([a_i])$ est stationnaire de rang $N$ et on conclut en utilisant que $<_{\alpha_N}$ est bien fondé pour montrer que $<$ est bien fondé. Les autres propriétés sont directs à vérifier. $\square$

## 6.3 Résolution d'Anick

*Cette section est un peu technique, on suppose connu les bases de Gröbner. Pour un référence voir [7], on va tout de même rappeler le théorème principal.*

Soit $k$ un corps, $X$ un ensemble fini qui génère le monoïde libre $S$ et $k(S)$ l'algèbre polynomiale non commutative engendré par $S$. $k(S)$ possède une structure d'algèbre gradué dont $k(S)_n$ est engendré par les mots de longueurs $n$ dans $S$. Soit $I$ un idéal bilatère de $k(S)$ et on considère $A = k(S)/I$, comme $X$ est fini on peut le munir d'un ordre qu'on étend à $S$ (c'est l'orde lexicographique). On pose $W$ comme étant une liste minimal de générateur de $in(I)$ l'idéal initial de $I$. On notera $\overline{A}$ le conoyau de l'application évidente $k \to A$ et $\epsilon : A \to k$ l'augmentation de $A$.

On peut écrire $I$ comme engendré des éléments de la forme

$$u(\omega_\sigma - f_\sigma)v, \quad \sigma \in \Sigma, \ \omega_\sigma \in S, \ f_\sigma \in k(S), \ u, v \in S$$

et $L$ sera le $k$-espace vectoriel engendré par les mots ne contenant aucun mot $\omega_\sigma, \ \sigma \in \Sigma$. Quitte a changer les générateurs, on peut supposer que $\omega_\sigma < f_\sigma$ et on dira que le $PBW$ théorème est valide si $k(S) = L \oplus I$.

**Théorème.** *Le $PBW$ théorème est valide si et seulement si toutes les ambiguïtés sont résolvables*

**Remarque.** Nous sommes dans le cas $X$ fini et on peut montrer que le $PBW$ théorème est bien valide. De façon générale le théorème précédant s'énonce avec $X$ quelconque sous réserve d'avoir un ordre qui vérifie certaines conditions dont par exemple la multiplicativité et la condition de chaîne descendante. Pour la suite, il n'est pas nécessaire de savoir ce que sont les "ambiguïtés", pour plus de détail voir [7]. Dans la suite, on décrit $L$ a l'aide de l'idéal initial qui correspond à l'idéal bilatère engendré par les $\omega_\sigma, \ \sigma \in \Sigma$.

**Définition 6.16.** On définit un graphe $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ avec $\mathcal{V} \subset S$ par

$$\mathcal{V} = \{1\} \cup X \cup \{u \in S \mid u \text{ est un facteur propre à droite d'un v} \in W\}$$

et

$$\mathcal{E} = \{1 \to x \mid x \in X\} \cup \{u \to v \mid uv \in (W), \ w \notin (W) \text{ pour tout facteur propre } w \text{ à gauche de } \ uv\}$$

où $(W)$ est l'idéal bilatère engendré par $W$.
On définit $W^{(i)}$ l'ensemble des $i$-chaine pour $i \geq -1$ qui consiste en les suites $(v_1, \cdots, v_{i+1}) \in S^{i+1}$ tel que $v_0 \cdots v_{i+1}$ est un chemin dans $G$ avec $v_0 = 1$.

En utilisant un théorème fondamentale sur les bases de Gröbner, on peut écrire

$$\overline{B}(k,A)_n = \bigoplus_{\substack{(w_1,\cdots,w_n)\in S_+^n \\ w_i\notin in(I)}} \overline{w_1}\otimes\cdots\otimes\overline{w_n}\cdot A$$

où l'action a droite à déjà était donné dans la partie sur la resolution Bar et $S_+$ désigne les mots différents du neutre. $G_{\overline{B}(k,A)}$ désignera le graphe introduit dans la partie précédente, on pose pour $\omega\in S$, $V_{\omega,i}$ les sommets $(w_1,\cdots,w_n)\in G_{\overline{B}(k,A)}$ tel que $\omega=\omega_1\cdots\omega_n$ et $i$ est le plus grand entier $i\geq -1$ tel que $(\omega_1,\cdots,\omega_{i+1})$ est une $i$-chaine, on pose aussi $V_\omega=\bigcup_i V_{\omega,i}$.

Finalement, on définit un partial matching $M_\omega$ sur $(G_{\overline{B}(k,A)})_\omega=(G_{\overline{B}(k,A)})_{V_\omega}$ qui prennent les arêtes qui vérifient

$$(\omega_1,\cdots,\omega'_{i+2},\omega''_{i+2},\cdots,\omega_n)\to(w_1,\cdots,w_n)$$

quand $(w_1,\cdots,w_n)\in V_{\omega,i}$ tel que $\omega'_{i+2}.\omega''_{i+2}=w_{i+2}$ et $(\omega_1,\cdots,\omega_{i+1},\omega'_{i+2})$ est une $(i+1)$-chaine.

**Proposition 6.17.** *L'ensemble $M=\bigcup_\omega M_\omega$ est un morse matching sur $G_{\overline{B}(k,A)}$ avec $M_n^0=W^{(n-1)}$*

*Démonstration.* On va montrer que $M_\omega$ est un partial matching sur $(G_{\overline{B}(k,A)})_\omega$.

La situation

$$(\omega_1,\cdots,\omega'_{i+2},\omega''_{i+2},\cdots,\omega_n)\to(w_1,\cdots,w_n)\in M_\omega$$

et

$$(\omega_1,\cdots,\omega'_{i+2},\omega''_{i+2},\omega'''_{i+2},\cdots,\omega_n)\to(\omega_1,\cdots,\omega'_{i+2},\omega''_{i+2},\cdots,\omega_n)\in M_\omega$$

n'apparaît pas car sinon $\omega_{i+2}=\omega'_{i+2}\omega''_{i+2}\omega'''_{i+2}\in in(I)$. Les deux autres cas se traitent en utilisant que par définition on a une $i$-chaine avec $i$ maximal, les détails sont laissés au lecteur. On remarque que $V_\omega$ est fini donc il suffit de montrer qu'il n'y a pas de cycle dans $(G^M_{\overline{B}(k,A)})_\omega$.

Soit $v=(\omega_1,\cdots,\omega_n)\in V_{\omega,i-1}$ et $v^{(n)}\to v_1^{(n+1]}\to v_2^{(n)}\in(G^M_{\overline{B}(k,A)})_\omega$. On a donc

$$v_1^{(n+1)}=(\omega_1,\cdots,\omega'_{i+1},\omega''_{i+1},\cdots,\omega_n)$$

avec $\omega'_{i+1}\omega''_{i+1}=\omega_{i+1}$ et $(\omega_1,\cdots,\omega_i,\omega'_{i+1})$ une $i$-chaine. De plus, $v_2^{(n)}$ doit être égal à

$$(\omega_1,\cdots,\omega'_{i+1},\omega''_{i+1}\omega_{i+2},\cdots,\omega_n)$$

ou bien,

$$(\omega_1,\cdots,\omega'_{i+1},\cdots,\omega_j\omega_{j+1},\omega_n)$$

avec $j\geq i+2$ par la condition de chaine. Dans les deux cas $v_2^{(n)}\in V_{\omega,i}$ donc il ne peut pas y avoir de cycles.

En analysant la différentiel, on voit facilement que la condition d'isomorphisme est vérifier et que pour $u\to v$ avec $u\in V_{\omega_1}$ et $v\in V_{\omega_2}$, on a $\omega_2<\omega_1$ . On peut donc appliquer le proposition 5.16 pour conclure.

Il nous reste à determiner $M^0$. Supposons que $(\omega_1,\cdots,\omega_n)\in M^0$, alors on sait que $(\omega_1,\cdots,\omega_{i+1})$ est une $i$-chaine.

Supposons $i<n-1$ et $(\omega_1,\cdots,\omega_n)\in V_{\omega,i}$ avec $\omega_{i+1}\omega_{i+2}\in in(I)$. On peut donc factoriser $\omega_{i+2}=\omega'_{i+2}\omega''_{i+2}$ avec $\omega'_{i+2}$ minimal tel que $\omega_{i+1}\omega'_{i+2}\in in(I)$. Comme $(\omega_1,\cdots,\omega_{i+2})$ n'est pas une $(i+1)$-chaine on a

$$\omega_1,\cdots,\omega'_{i+2},\omega''_{i+2},\cdots,\omega_n)\to(\omega_1,\cdots,\omega_n)\in M$$

donc $(\omega_1,\cdots,\omega_n)\notin M^0$.

Si $\omega_{i+1}\omega_{i+2}\notin in(I)$, on a directement $(\omega_1,\cdots,\omega_n)\to(\omega_1,\cdots,\omega_i\omega_{i+1},\cdots,\omega_n)\in M$ donc $(\omega_1,\cdots,\omega_n)\notin M^0$.

On voit facilement que $(\omega_1,\cdots,\omega_{n+1})\in V_{\omega,n}$ est dans $M^0$, on conclut que $M^0_{n+1}$ est l'ensemble des $n$-chaine. $\square$

**Proposition 6.18.** *Soit $F_n = W^{(n-1)} \otimes A$, $\; i : W^{(n-1)} \otimes A \to \overline{B}(k, A)_n$ l'inclusion et $p : \overline{B}(k, A)_n \to W^{(n-1)}$ vérifiant $p(\omega_1, \cdots, \omega_n, 1) = (\omega_1, \cdots, \omega_n) \otimes 1$ si $(\omega_1, \cdots, \omega_n)$ est une $n$-chaine, 0 sinon. On pose*

$$d_n = p(d - d\phi_M d)i$$

*et on a que $F$ est une résolution libre de $k$*

*Démonstration.* Il suffit d'appliquer les propositions 5.18 et 5.15. □

**Remarque.** Dans ce qui précède, on a appliqué la théorie de morse à la résolution Bar de $k$ qui est a priori grosse, ce qui nous a permit de la réduire pour obtenir une résolution appelé résolution d'Anick.

# 7 Calcul d'une résolution d'Anick

*Dans cette section, on se propose d'appliquer la théorie de morse à une algèbre associé à un carquoi. Nous sommes pas exactement dans les mêmes conditions que ce qui précède mais les constructions et les techniques développées se généralise bien à notre exemple où on ne travail plus avec un corps $k$ mais avec un anneau $\mathcal{K}$ commutatif.*

## 7.1 Algèbre associé à un carquoi

**Définition 7.1.** Un carquoi est la donné d'un 4-uplet $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ où $Q_0$ désigne un ensemble de sommet, $Q_1$ désigne un ensemble de flèches sur $Q_0$, $s, t : Q_1 \to Q_0$ désigne la source et le but des flèches. On définit un chemin comme étant un mot $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ sur l'ensemble $Q_1$ vérifiant $t(\alpha_i) = s(\alpha_{i+1})$ et on considère les éléments de $Q_0$ comme les chemins de longueur zéro. On notera $C$ l'ensemble des chemins de longueurs non nul.

**Définition 7.2.** L'algèbre associé à un carquoi $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ et un corps $K$ est l'ensemble $KQ$ désignant l'espace vectoriel engendré par tous les chemins du carquoi. On munit cette ensemble du produit suivant :
Pour $e, f \in Q_0$,

$$e.f = \begin{cases} 0 & \text{si } e \neq f \\ e & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour $e \in Q_0, \alpha_1 \cdots \alpha_n \in C$,

$$e.\alpha_1 \cdots \alpha_n = \begin{cases} 0 & \text{si } e \neq s(\alpha_1) \\ \alpha_1 \cdots \alpha_n & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\alpha_1 \cdots \alpha_n.e = \begin{cases} 0 & \text{si } e \neq t(\alpha_n) \\ \alpha_1 \cdots \alpha_n & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour $\alpha_1 \cdots \alpha_n, \beta_1 \cdots \beta_m \in C$,

$$\alpha_1 \cdots \alpha_n.\beta_1 \cdots \beta_m = \begin{cases} 0 & \text{si } t(\alpha_n) \neq s(\beta_1) \\ \alpha_1 \cdots \alpha_n \beta_1 \cdots \beta_m & \text{sinon} \end{cases}$$

On vérifie bien que $(KQ, +, .)$ est une algèbre.

**Exemple.** Dans la suite, on va travailler avec le carquoi suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & & 3 \arrow[dr, "d"] & & & \\
1 \arrow[r, "a"] & 2 \arrow[ur, "b"] \arrow[dr, "c"'] & & 5 \arrow[r, "f"] & 6 \arrow[r, "g"] & 7 \\
 & & 4 \arrow[ur, "e"'] & & &
\end{tikzcd}$$

où $Q_0 = \{1, \cdots, 7\}, Q_1 = \{a, \cdots, g\}$ et $s, t$ sont les applications évidentes source et target des flèches.

**Remarque.** On peut se demander si l'algèbre associée à un carquoi $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ et un corps $K$ est connexe. Si on pose $\mathcal{K} = K^{|Q_0|}$ et $KQ_+$ l'algèbre associé aux chemins de longueurs non nul, on remarque que $KQ = \mathcal{K} \oplus KQ_+$ avec un isomorphisme d'algèbre évident. Mais en général $\mathcal{K}$ n'est pas un corps, donc $KQ$ est connexe en ce sens où le corps est remplacer par un anneau commutatif.

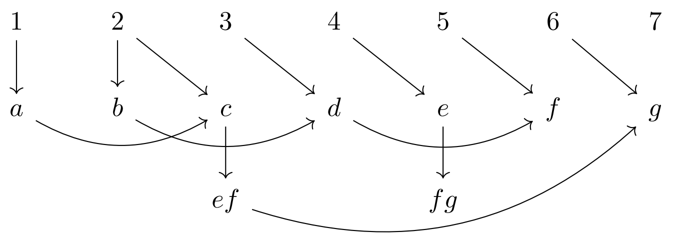
Soit $KQ$ l'algèbre de l'exemple précédent, $I = (ac, df, efg, bd - ce, cef)$ un idéal de $KQ$, on pose $A = KQ/I$. Tout ce qui suit aura pour objectif d'appliquer la théorie de morse à la résolution $Bar$ de $A$ en tant que $\mathcal{K}-$module pour calculer sa résolution d'Anick.

**Proposition 7.3.** *On munit sur $Q_1$ d'un ordre*[16] *tel que $bd > ce$. Alors $A$ admet une base de Gröbner donner par $\mathcal{B} = (1, \cdots, 7, a, \cdots, g, ab, ce, ef, fg)$*

*Démonstration.* Il suffit de voir que $I$ vérifie la condition sur la résolvabilité des ambiguïtés donc $A/I$ correspond a l'idéal engendré par les mots standards qui à pour base précisément $\mathcal{B}$. $\square$

Ensuite, on a besoin de calculer les $i-$chaînes d'Anick. Un moyen pratique est d'utiliser le graphe d'Ufnarovski. On rappel que l'on a déjà donné la définition de $i-$chaines dans la section précédente.

La graphe d'Ufnarovski associé à $A$ est :




On en déduit l'ensemble des $i-$chaines correspondant :
$W^{(0)} = \{(a), (b), \cdots, (g)\}$, $W^{(1)} = \{(a, c), (b, d), (c, ef), (d, f), (e, fg)\}$, $W^{(2)} = \{(a, c, ef), (b, d, f), (c, ef, g)\}$, $W^{(3)} = \{(a, c, ef, g)\}$.

On a besoin aussi de déterminer les $V_{\omega,i}$ de la proposition 5.17 pour calculer le partial matching associé. Les calculs sont résumé dans les tableaux suivants où la colonne de gauche représente le départ du mot.

| $i$-chaine max | -1 | 0 |
|---|---|---|
| 1 | $(ab), (ab, d), (ab, d, f), (ab, d, fg), (ab, d, f, g)$ | $(a), (a, b), (a, b, d), (a, b, d, f), (a, b, d, fg), (a, b, d, f, g)$ |
| 2 | $(ce), (ce, f), (ce, f, g), (ce, fg)$ | $(b), (c), (c, e), (c, e, f), (c, e, fg), (c, e, f, g)$ |
| 3 | | $(d)$ |
| 4 | $(ef), (ef, g)$ | $(e), (e, f), (e, f, g)$ |
| 5 | $(fg)$ | $(f), (f, g)$ |
| 6 | | $(g)$ |

| $i$-chaine max | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | $(a, c), (a, c, e), (a, c, e, f), (a, c, e, fg), (a, c, e, f, g)$ | $(a, c, ef)$ | $(a, c, ef, g)$ |
| 2 | $(b, d), (b, d, fg), (c, ef)$ | $(b, d, f), (b, d, f, g), (c, ef, g)$ | |
| 3 | $(d, f), (d, f, g)$ | | |
| 4 | $(e, fg)$ | | |
| 5 | | | |
| 6 | | | |

16. On a pris pour les calculs l'ordre suivant : $a<c<b<d<e<f<g$

On peut maintenant décrire le morse matching de la proposition 5.16. Il correspond aux flèches du tableau suivant.

| $0-$flèches | $1-$flèche | $2-$flèche |
|---|---|---|
| $(a,b) \to (ab)$ | | $(b,d,f,g) \to (d,b,fg)$ |
| $(a,b,d) \to (ab,d)$ | | |
| $(a,b,d,f) \to (ab,d,f)$ | | |
| $(c,e) \to (ce)$ | | |
| $(c,e,f) \to (ce,f)$ | | |
| $(c,e,fg) \to (ce,fg)$ | | |
| $(c,e,f,g) \to (ce,f,g)$ | | |
| $(e,f) \to (ef)$ | | |
| $(e,f,g) \to (ef,g)$ | | |
| $(f,g) \to (fg)$ | | |
| $(a,b,d,fg) \to (ab,d,fg)$ | | |
| $(a,b,d,f,g) \to (ab,d,f,g)$ | | |

On a toutes les informations pour calculer l'application $\phi$ qui intervient dans l'expression de la proposition 5.18.

| Valeur de $\phi$ | | |
|---|---|---|
| $\phi(ab) = -(a,b)$ | $\phi(ab,d) = -(a,b,d)$ | $\phi(ab,d,f) = -(a,b,d,f)$ |
| $\phi(ce) = -(c,e)$ | $\phi(ce,f) - (c,e,f)$ | $\phi(ce,f,g) = -(c,e,f,g)$ |
| $\phi(ef) = -(e,f)$ | $\phi(ce,fg) = -(c,e,fg)$ | $\phi(ab,d,fg) = -(a,b,d,fg)$ |
| $\phi(fg) = -(f,g)$ | $\phi(ef,g) = -(e,f,g)$ | $\phi(b,d,fg) = -(b,d,fg) + (c,e,f,g)$ |
| $\phi(ab,d,f,g) = -(a,b,d,f,g)$ | 0 sinon | |

Avec l'expression de la proposition 5.18, on peut maintenant calculer facilement l'expression des différentielles du complexe d'Anick $(F_n, d_n)$. On remarque aussi que $F_n$ est nul pour $n \geq 5$ tandis que $\overline{B}(\mathcal{K}, A)_5$ n'est pas nul. On aurait aimé calculer le morphisme $\pi$ qui permet de passer de la résolution $Bar$ à celle d'Anick et utiliser la construction de Merkulov pour munir $Ext^{\bullet}_{A}(\mathcal{K},\mathcal{K})$ d'une structure d'$A_\infty-$algèbre mais par manque de temps on a décidé d'arrêter l'exemple à la résolution d'Anick

# Références


[1] Grégory Berhuy. *Modules : théorie, pratique... Et un peu d'arithmétique !* 2012.

[2] Nathan Menzies. *An introduction to $A_\infty$-algebras*. 2007. Thesis (B.Sc.)–University of South Wales.

[3] Kenji Lefèvre-Hasegawa. *Sur Les $A_\infty$-catégories*. 2003. Thesis (Ph.D.)–Université Paris Diderot.

[4] D. M. Lu, J. H. Palmieri, Q. S. Wu, and J. J. Zhang. $A_\infty$-algebras for ring theorists. In *Proceedings of the International Conference on Algebra*, volume 11, pages 91–128, 2004.

[5] S. A. Merkulov. Strong homotopy algebras of a Kähler manifold. *Internat. Math. Res. Notices*, (3) :153–164, 1999.

[6] N. Bourbaki. *Éléments de mathématique. Algèbre. Chapitre 10. Algèbre homologique*. Springer-Verlag, Berlin, 2007. Reprint of the 1980 original [Masson, Paris ; MR0610795].