MAT4213 - Géométrie différentielle
Deuxième semestre — 2020-2021

Fiche 6: Géométrie des surfaces de $\mathbb{R}^3$, II

1. Soit $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ une surface de classe C^∞ plongée dans $\mathbb{R}^3$. On considère un repère local adapté $(E_1, E_2, E_3) \in C^\infty(U, \mathbb{R}^3)^3$, où $U \subseteq \Sigma$ est un ouvert. Soit $\alpha : J \to U$ une courbe de classe C^∞, où J est un intervalle ouvert, telle que $E_1(\alpha(t)) = \alpha'(t)$ pour tout $t \in J$. Montrer que α est une géodésique si et seulement si $\omega_{12}(\alpha(t))(\alpha'(t)) = 0$ pour tout $t \in J$.

Solution. On rappelle que, étant donné une surface $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ de classe C^∞ plongée dans $\mathbb{R}^3$, un **repère local adapté** est un triplet $(E_1, E_2, E_3) \in C^\infty(U, \mathbb{R}^3)^3$, où $U \subseteq \Sigma$ est un ouvert de Σ, $\{E_1(p), E_2(p), E_3(p)\}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ et $E_3(p) \in (T_p\Sigma)^\perp$ pour tout $p \in U$. En conséquence, $E_1(p), E_2(p) \in T_p\Sigma$. En outre, on rappelle que, si $(E_1, E_2, E_3) \in C^\infty(U, \mathbb{R}^3)^3$ est un repère local adapté d'une surface $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ de classe C^∞ plongée dans $\mathbb{R}^3$, les formes $\omega_{ij} \in \Omega^1(U)$ sont données par

$$\bar{\nabla}_v E_i(p) = \sum_{j=1}^{3} \omega_{ij}(p)(v) E_j(p), \tag{1}$$

pour tout $p \in U$ et $v \in \mathbb{R}^3$, où $\bar{\nabla}_v$ dénote la dérivée directionnelle dans la direction v. Comme $\alpha'(t) = E_1(\alpha(t))$, on conclut que bien que

$$\alpha''(t) = \bar{\nabla}_{\alpha'(t)} E_1(\alpha(t)) = \omega_{12}\big(\alpha(t)\big)\big(\alpha'(t)\big)E_2\big(\alpha(t)\big) + \omega_{13}\big(\alpha(t)\big)\big(\alpha'(t)\big)E_3\big(\alpha(t)\big).$$

En particulier, $\alpha''(t) \in (T_{\alpha(t)}\Sigma)^\perp$ si et seulement si $\omega_{12}\big(\alpha(t)\big)\big(\alpha'(t)\big) = 0$. On conclut que α est une géodésique si et seulement si $\omega_{12}(\alpha(t))(\alpha'(t)) = 0$ pour tout $t \in J$.

2. On considère le paramétrage local

$$\psi :]\,0, 2\pi\,[\times]-\pi/2, \pi/2\,[\longrightarrow S^2$$

de la sphère unité S^2 donné par

$$\psi(\theta, \varphi) = \big(\cos(\theta)\cos(\varphi), \sin(\theta)\cos(\varphi), \sin(\varphi)\big).$$

(a) Soit (E_1, E_2, E_3) un repère local adapté défini sur $\mathrm{Img}(\psi)$. Calculer les formes duales $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$, ainsi que les formes $\omega_{12}, \omega_{23}, \omega_{31}$.

(b) Calculer l'opérateur de Weingarten à partir du repère local adapté précédent.

(c) Calculer la courbure de Gauss et la courbure moyenne à partir du repère local adapté précédent.

Solution.

(*a*) Dans ce cas, on utilise le repère

$$E_1(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\Big(-y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}\Big),$$
$$E_2(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2)}}\Big(-zx\frac{\partial}{\partial x} - zy\frac{\partial}{\partial y} + (x^2+y^2)\frac{\partial}{\partial z}\Big),$$
$$E_3(x,y,z) = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z},$$

pour tout $(x,y,z) \in \hat{U} = \mathbb{R}^3 \setminus (\{(0,0)\} \times \mathbb{R})$ de l'exercice **17** de la fiche 2. On voit bien que $U = \mathrm{Img}(\psi) \subseteq \hat{U} \cap S^2$. On notera $E_i(\theta,\varphi) = E_i \circ \psi(\theta,\varphi)$, ce qui nous donne

$$\begin{aligned} E_1(\theta,\varphi) &= -\sin(\theta)\frac{\partial}{\partial x} + \cos(\theta)\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\frac{\partial\psi}{\partial\theta}(\theta,\varphi)}{\left\|\frac{\partial\psi}{\partial\theta}(\theta,\varphi)\right\|} = \frac{1}{\cos(\varphi)}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}(\theta,\varphi),\\ E_2(\theta,\varphi) &= \Big(-\cos(\theta)\sin(\varphi)\frac{\partial}{\partial x} - \sin(\theta)\sin(\varphi)\frac{\partial}{\partial y} + \cos(\varphi)\frac{\partial}{\partial z}\Big) = \frac{\partial\psi}{\partial\varphi}(\theta,\varphi),\\ E_3(\theta,\varphi) &= \cos(\theta)\cos(\varphi)\frac{\partial}{\partial x} + \sin(\theta)\cos(\varphi)\frac{\partial}{\partial y} + \sin(\varphi)\frac{\partial}{\partial z} = E_1(\theta,\varphi) \wedge E_2(\theta,\varphi). \end{aligned} \tag{2}$$

En outre, on rappelle la forme $\eta \in \Omega^1(\hat{U})$ définie dans l'exercice **16** de la fiche 2 par

$$\eta = \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2+y^2},$$

et la forme $\zeta \in \Omega^1(\hat{U})$ définie dans l'exercice **17** de la fiche 2 par

$$\zeta = r\frac{d(z/r)}{\rho}.$$

où $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ et $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. On écrira $\psi^*\eta$ et $\psi^*\zeta$ aussi η et ζ, respectivement, ce qui nous donne

$$\eta = -d\theta \text{ et } \zeta = d\varphi.$$

En outre, d'après l'exercice **17** de la fiche 2, on a

$$\omega_{13}(x,y,z) = -\omega_{31}(x,y,z) = \frac{\rho\eta}{r},$$
$$\omega_{21}(x,y,z) = -\omega_{12}(x,y,z) = \frac{z\eta}{r},$$
$$\omega_{23}(x,y,z) = -\omega_{32}(x,y,z) = -\zeta.$$

Si l'on écrit ω_{ij} au lieu de $\psi^*\omega_{ij}$, on trouve que

$$\begin{aligned} \omega_{13}(\theta,\varphi) &= -\omega_{31}(\theta,\varphi) = -\cos(\varphi)d\theta,\\ \omega_{21}(\theta,\varphi) &= -\omega_{12}(\theta,\varphi) = -\sin(\varphi)d\theta,\\ \omega_{23}(\theta,\varphi) &= -\omega_{32}(\theta,\varphi) = -d\varphi. \end{aligned} \tag{3}$$

Par ailleurs, d'après l'exercice **17** de la fiche 2, les formes duales au repère (E_1,E_2,E_3) sont données par

$$\Theta_1(x,y,z) = -\rho\eta,$$
$$\Theta_2(x,y,z) = r\zeta,$$
$$\Theta_3(x,y,z) = dr,$$

pour tout $(x, y, z) \in \hat{U}$. Si l'on écrit Θ_i au lieu de $\psi^*\Theta_i$, on trouve que

$$\begin{aligned} &\Theta_1(\theta,\varphi) = \cos(\varphi)d\theta, \\ &\Theta_2(\theta,\varphi) = d\varphi, \\ &\Theta_3(\theta,\varphi) = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

(b) On rappelle que, par définition, l'opérateur de Weingarten satisfait

$$\mathsf{S}_{p,E_3(p)}(v) = -\bar{\nabla}_v E_3(p) = \omega_{13}(p)(v)E_1(p) + \omega_{23}(p)(v)E_1(p), \tag{5}$$

pour tout $p \in U$ et $v \in \mathbb{R}^3$. En conséquence, la matrice de $\mathsf{S}_{p,E_3(p)}$ dans la base $\{E_1(p), E_2(p)\}$ est

$$\mathsf{S}_{p,E_3(p)} = \begin{pmatrix} \omega_{13}(p)\big(E_1(p)\big) & \omega_{13}(p)\big(E_2(p)\big) \\ \omega_{23}(p)\big(E_1(p)\big) & \omega_{23}(p)\big(E_2(p)\big). \end{pmatrix} \tag{6}$$

Dans ce cas, si l'on utilise les expressiones (2) ainsi que (3), on a alors,

$$\mathsf{S}_{\psi(\theta,\varphi)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

où l'on a omis $E_3(\psi(\theta,\varphi))$ dans l'opérateur de Weingarten et on a utilisé que $d\theta(\partial/\partial\theta) = d\varphi(\partial/\partial\varphi) = 1$ et $d\theta(\partial/\partial\varphi) = d\varphi(\partial/\partial\theta) = 0$, ainsi que $E_1 = (\partial/\partial\theta)/\cos(\varphi)$ et $E_2 = \partial/\partial\varphi$.

(c) D'après l'identité (6) on voit bien que

$$\omega_{13} \wedge \omega_{23} = K\Theta_1 \wedge \Theta_2 \text{ et } \omega_{13} \wedge \Theta_2 + \Theta_1 \wedge \omega_{23} = 2H\Theta_1 \wedge \Theta_2. \tag{7}$$

Dans notre cas, en employant les identités précédentes avec (3) et (4) on conclut que $K = 1$ et $H = -1$.

3. Soit $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$. On considère le paramétrage local

$$\psi :]\,0, 2\pi\,[\, \times \mathbb{R} \longrightarrow \Sigma$$

du cylindre Σ donné par

$$\psi(\theta, z) = \big(\cos(\theta), \sin(\theta), z\big).$$

(a) Soit (E_1, E_2, E_3) un repère local adapté défini sur $\mathsf{Img}(\psi)$. Calculer les formes duales $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$, ainsi que les formes $\omega_{12}, \omega_{23}, \omega_{31}$.

(b) Calculer l'opérateur de Weingarten à partir du repère local adapté précédent.

(c) Calculer la courbure de Gauss et la courbure moyenne à partir du repère local adapté précédent.

Solution.

(a) Dans ce cas, on utilise le repère

$$\begin{aligned}
E_1(x,y,z) &= \left(-y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}\right),\\
E_2(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial z},\\
E_3(x,y,z) &= \left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right),
\end{aligned}$$

pour tout $(x,y,z) \in \hat{U} = \mathbb{R}^3 \setminus (\{(0,0)\} \times \mathbb{R})$ de l'exercice **16** de la fiche 2. On voit bien que $U = \mathrm{Img}(\psi) \subseteq \hat{U} \cap \Sigma$. On notera $E_i(\theta,\varphi) = E_i \circ \psi(\theta,z)$, ce qui nous donne

$$\begin{aligned}
E_1(\theta,z) &= -\sin(\theta)\frac{\partial}{\partial x} + \cos(\theta)\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial \theta}(\theta,z),\\
E_2(\theta,z) &= \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial \psi}{\partial z}(\theta,z),\\
E_3(\theta,z) &= \cos(\theta)\frac{\partial}{\partial x} + \sin(\theta)\frac{\partial}{\partial y} = E_1(\theta,z) \wedge E_2(\theta,z).
\end{aligned} \tag{8}$$

En outre, on rappelle la forme $\eta \in \Omega^1(\hat{U})$ définie dans l'exercice **16** de la fiche 2 par

$$\eta = \frac{y dx - x dy}{x^2 + y^2}.$$

On écrira η au lieu de $\psi^*\eta$ ce qui nous donne

$$\eta = -d\theta.$$

En outre, d'après l'exercice **16** de la fiche 2, on a

$$\begin{aligned}
&\omega_{13}(x,y,z) = -\omega_{31}(x,y,z) = \eta,\\
&\omega_{21}(x,y,z) = -\omega_{12}(x,y,z) = \omega_{23}(x,y,z) = -\omega_{32}(x,y,z) = 0,
\end{aligned}$$

Si l'on écrit ω_{ij} au lieu de $\psi^*\omega_{ij}$, on trouve que

$$\begin{aligned}
&\omega_{13}(\theta,\varphi) = -\omega_{31}(\theta,\varphi) = -d\theta,\\
&\omega_{21}(\theta,\varphi) = -\omega_{12}(\theta,\varphi) = \omega_{23}(\theta,\varphi) = -\omega_{32}(\theta,\varphi) = 0.
\end{aligned} \tag{9}$$

Par ailleurs, d'après l'exercice **16** de la fiche 2, les formes duales au repère (E_1, E_2, E_3) sont données par

$$\begin{aligned}
\Theta_1(x,y,z) &= -\rho\eta,\\
\Theta_2(x,y,z) &= dz,\\
\Theta_3(x,y,z) &= d\rho,
\end{aligned}$$

pour tout $(x,y,z) \in \hat{U}$, où $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$. Si l'on écrit Θ_i au lieu de $\psi^*\Theta_i$, on trouve que

$$\begin{aligned}
\Theta_1(\theta,\varphi) &= d\theta,\\
\Theta_2(\theta,\varphi) &= dz,\\
\Theta_3(\theta,\varphi) &= 0.
\end{aligned} \tag{10}$$

(*b*) Si l'on utilise les expressiones (8) et (9) avec (6), on a alors,

$$\mathsf{S}_{\psi(\theta,\varphi)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

où l'on a omis $E_3(\psi(\theta,\varphi))$ dans l'opérateur de Weingarten et on a utilisé que et on a utilisé que $d\theta(\partial/\partial\theta) = d\varphi(\partial/\partial\varphi) = 1$ et $d\theta(\partial/\partial\varphi) = d\varphi(\partial/\partial\theta) = 0$, ainsi que $E_1 = \partial/\partial\theta$ et $E_2 = \partial/\partial z$.

(*c*) En employant les identités (7) avec (9) et (10) on conclut que $K = 0$ et $H = -1/2$.

4. Soit $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ une surface de classe C^∞ plongée dans $\mathbb{R}^3$ et soit (E_1, E_2, E_3) un repère local adapté défini sur un ouvert $U \subseteq \Sigma$.

(*a*) Si $\omega_{12}, \omega_{23}, \omega_{31}$ sont les formes associées au repère (E_1, E_2, E_3), montrer que

$$K(p) = E_2\Big[\iota_{E_1}(\omega_{12})\Big](p) - E_1\Big[\iota_{E_2}(\omega_{12})\Big](p) - \Big(\iota_{E_1}(\omega_{12})(p)\Big)^2 - \Big(\iota_{E_2}(\omega_{12})(p)\Big)^2,$$

pour tout $p \in U$, où

$$\iota_{E_i}(\omega_{12})(p) = \omega_{12}(p)\big(E_i(p)\big),$$

pour $i \in \{1, 2\}$.

(*b*) Recalculer la courbure de la sphère unité au moyen de l'expression précédente.

Solution.

(*a*) On remarque d'abord que les équations de structure du repère (E_1, E_2, E_3) avec (7) nous disent que

$$d\omega_{12} = \omega_{13} \wedge \omega_{32} = -K\Theta_1 \wedge \Theta_2. \tag{11}$$

En outre, étand donné une formé différentielle $\omega \in \Omega^1(\Sigma)$, on a toujours

$$\omega = \sum_{i=1}^{2} \iota_{E_i}(\omega)\Theta_i. \tag{12}$$

Si l'on applique l'identité précédente à $\omega = \omega_{12}$, on trouve alors

$$\begin{aligned}
d\omega_{12} &= \sum_{i=1}^{2}\Big(d\big(\iota_{E_i}(\omega_{12})\big) \wedge \Theta_i + \iota_{E_i}(\omega_{12}) d\Theta_i\Big) \\
&= \sum_{i,j=1}^{2} \iota_{E_j}\Big(d\big(\iota_{E_i}(\omega_{12})\big)\Big)\Theta_j \wedge \Theta_i + \sum_{i,j=1}^{2} \iota_{E_i}(\omega_{12})\omega_{ij} \wedge \Theta_j \\
&= \sum_{i,j=1}^{2} E_j\Big[\iota_{E_i}(\omega_{12})\Big]\Theta_j \wedge \Theta_i + \sum_{i,j,k=1}^{2} \iota_{E_i}(\omega_{12})\iota_{E_k}(\omega_{ij})\Theta_k \wedge \Theta_j \\
&= \Big(E_1\Big[\iota_{E_2}(\omega_{12})\Big] - E_2\Big[\iota_{E_1}(\omega_{12})\Big] + \big(\iota_{E_1}(\omega_{12})\big)^2 + \big(\iota_{E_2}(\omega_{12})\big)^2\Big)\Theta_1 \wedge \Theta_2,
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé les équations de structure dans la deuxième égalité, et (12) dans la deuxième et troisième égalité. Finalement, (11) nous donne l'identité demandée.

(b) D'après les calculs dans l'exo **2**, on a $\omega_{12} = \sin(\varphi)d\theta$, $E_1 = (\partial/\partial\theta)/\cos(\varphi)$ et $E_2 = \partial/\partial\varphi$. En conséquence,

$$\iota_{E_1}(\omega_{12}) = \tan(\varphi) \text{ et } \iota_{E_2}(\omega_{12}) = 0,$$

et

$$E_2\big[\iota_{E_1}(\omega_{12})\big] - E_1\big[\iota_{E_2}(\omega_{12})\big] - \big(\iota_{E_1}(\omega_{12})\big)^2 - \big(\iota_{E_2}(\omega_{12})\big)^2 = \cos^{-2}(\varphi) - \tan^2(\varphi) = 1,$$

comme on voulait démontrer.