MAT4213 - Géométrie différentielle
Deuxième semestre — 2020-2021

Fiche 6: Géométrie des surfaces de $\mathbb{R}^3$, II

1. Soit $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ une surface de classe C^∞ plongée dans $\mathbb{R}^3$. On considère un repère local adapté $(E_1, E_2, E_3) \in C^\infty(U, \mathbb{R}^3)^3$, où $U \subseteq \Sigma$ est un ouvert. Soit $\alpha : J \to U$ une courbe de classe C^∞, où J est un intervalle ouvert, telle que $E_1(\alpha(t)) = \alpha'(t)$ pour tout $t \in J$. Montrer que α est une géodésique si et seulement si $\omega_{12}(\alpha(t))(\alpha'(t)) = 0$ pour tout $t \in J$.

2. On considère le paramétrage local

$$\psi :]0, 2\pi[\times]-\pi/2, \pi/2[\longrightarrow S^2$$

de la sphère unité S^2 donné par

$$\psi(\theta, \varphi) = \big(\cos(\theta)\cos(\varphi), \sin(\theta)\cos(\varphi), \sin(\varphi)\big).$$

(a) Soit (E_1, E_2, E_3) un repère local adapté défini sur $\mathrm{Img}(\psi)$. Calculer les formes duales $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$, ainsi que les formes $\omega_{12}, \omega_{23}, \omega_{31}$.

(b) Calculer l'opérateur de Weingarten à partir du repère local adapté précédent.

(c) Calculer la courbure de Gauss et la courbure moyenne à partir du repère local adapté précédent.

3. Soit $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$. On considère le paramétrage local

$$\psi :]0, 2\pi[\times \mathbb{R} \longrightarrow \Sigma$$

du cylindre Σ donné par

$$\psi(\theta, z) = \big(\cos(\theta), \sin(\theta), z\big).$$

(a) Soit (E_1, E_2, E_3) un repère local adapté défini sur $\mathrm{Img}(\psi)$. Calculer les formes duales $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$, ainsi que les formes $\omega_{12}, \omega_{23}, \omega_{31}$.

(b) Calculer l'opérateur de Weingarten à partir du repère local adapté précédent.

(c) Calculer la courbure de Gauss et la courbure moyenne à partir du repère local adapté précédent.

4. Soit $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ une surface de classe C^∞ plongée dans $\mathbb{R}^3$ et soit (E_1, E_2, E_3) un repère local adapté défini sur un ouvert $U \subseteq \Sigma$.

(a) Si $\omega_{12}, \omega_{23}, \omega_{31}$ sont les formes associées au repère (E_1, E_2, E_3), montrer que

$$K(p) = E_2\Big[\iota_{E_1}(\omega_{12})\Big](p) - E_1\Big[\iota_{E_2}(\omega_{12})\Big](p) - \Big(\iota_{E_1}(\omega_{12})(p)\Big)^2 - \Big(\iota_{E_2}(\omega_{12})(p)\Big)^2,$$

pour tout $p \in U$, où

$$\iota_{E_i}(\omega_{12})(p) = \omega_{12}(p)\big(E_i(p)\big),$$

pour $i \in \{1, 2\}$.

(b) Recalculer la courbure de la sphère unité au moyen de l'expression précédente.