# MAT4213 - GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

## Deuxième semestre — 2020-2021

## Fiche 5: Géométrie des surfaces de $\mathbb{R}^3$

**1.** *Quelques surfaces.* On considère les surfaces suivantes $\Sigma$ de $\mathbb{R}^3$ :

$(a)$ une sphère de rayon $R > 0$,
$(b)$ un cylindre de révolution de rayon $R > 0$,
$(c)$ un paraboloïde hyperbolique d'équation $z = x^2 - y^2$,
$(d)$ un hyperboloïde à une nappe d'équation $z^2 = x^2 + y^2 - 1$,
$(e)$ un tore de révolution obtenu en faisant tourner un cercle de rayon 1 et de centre $(2, 0)$ dans le plan $(x, z)$ autour de l'axe $z$.

Calculer les formes fondamentales $\mathsf{I}$, $\mathsf{II}$, l'opérateur de Weingarten $\mathsf{S}$, les courbures principales, moyenne et de Gauss, et déterminer les points ombilics.

*Solution.* Comme d'habitude, on notera $\langle\,,\rangle$ le produit scalaire euclidien de $\mathbb{R}^3$. Étant donné une surface plongée $i : \Sigma \to \mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$, on identifiera l'espace tangent $T_p\Sigma$ (via $di_p$) avec un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Le produit scalaire $\langle\,,\rangle$ induit ainsi un produit scalaire sur l'espace tangent $T_p\Sigma$, pour tout $p \in \Sigma$, que l'on notera aussi $\langle\,,\rangle$. On considère alors

$$\mathfrak{X}(\Sigma) = \left\{X \in C^\infty(\Sigma, \mathbb{R}^3) : X(p) \in T_p\Sigma\right\}$$

et

$$\mathfrak{X}^\perp(\Sigma) = \left\{X \in C^\infty(\Sigma, \mathbb{R}^3) : X(p) \in (T_p\Sigma)^\perp\right\},$$

où $(T_p\Sigma)^\perp \subseteq \mathbb{R}^3$ est l'espace orthogonal à $T_p\Sigma$. Soit $\pi_p : \mathbb{R}^3 \to T_p\Sigma$ la projection orthogonale.

Comme d'habitude, on note

$$\bar{\nabla} : \mathfrak{X}(\Sigma) \times C^\infty(\Sigma, \mathbb{R}^3) \to C^\infty(\Sigma, \mathbb{R}^3)$$

l'application $\bar{\nabla}(X, Y)(p) = dY(p)(X(p))$, pour tout $p \in \Sigma$. On définit en plus

$$\nabla : \mathfrak{X}(\Sigma) \times \mathfrak{X}(\Sigma) \to \mathfrak{X}(\Sigma)$$

via $\nabla(X, Y)(p) = \pi_p(\bar{\nabla}(X, Y)(p))$, pour tout $p \in \Sigma$. On écrit normalement $\bar{\nabla}_X Y$ et $\nabla_X Y$ au lieu de $\bar{\nabla}(X, Y)$ et $\nabla(X, Y)$, respectivement.

On rappelle que la **première forme fondamentale** de $\Sigma$ est $\mathsf{I} = i^*(\langle\,,\rangle)$, *i.e.* $\mathsf{I}_p(v, w) = \langle di_p(v), di_p(w)\rangle$, pour tout $p \in \Sigma$ et $v, w \in T_p\Sigma$.

Par ailleurs, on rappelle que l'**opérateur de Weingarten** est l'application

$$\mathsf{S} : \mathfrak{X}(\Sigma) \times \mathfrak{X}^\perp(\Sigma) \to \mathfrak{X}(\Sigma)$$

donnée par $\mathsf{S}(X, Y)(p) = -\pi_p(\bar{\nabla}_X Y(p))$, pour tout $p \in \Sigma$. On écrit normalement $\mathsf{S}_Y X$ au lieu de $\mathsf{S}(X, Y)$. C'est facile à voir que, si $X, X' \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ et $Y, Y' \in \mathfrak{X}^\perp(\Sigma)$ sont tels que $X(p) = X'(p)$ et $Y(p) = Y'(p)$, pour $p \in \Sigma$ fixe, alors $\mathsf{S}_Y X(p) = \mathsf{S}_{Y'} X'(p)$, ce qui définit une application bilinéaire

$$\mathsf{S}_p : T_pM \times (T_p\Sigma)^\perp \to T_pM$$

et on écrira $\mathsf{S}_{p,u}(v)$ au lieu de $\mathsf{S}_p(v,u)$, pour $v \in T_pM$ et $u \in (T_p\Sigma)^\perp$. En plus, on voit bien que

$$\mathsf{I}_p\big(v, \mathsf{S}_{p,u}(w)\big) = \mathsf{I}_p\big(\mathsf{S}_{p,u}(v), w\big),$$

pour $p \in \Sigma$, $v, w \in T_pM$ et $u \in (T_p\Sigma)^\perp$.

Étant donné $p \in \Sigma$ et $u \in (T_p\Sigma)^\perp$, on rappelle que la **seconde forme fondamentale** de $\Sigma$ est l'application bilinéaire

$$\mathsf{II}_{p,u} : T_pM \times T_p\Sigma \to T_pM$$

donnée par $\mathsf{II}_{p,u}(v,w) = \mathsf{I}_p(v, \mathsf{S}_{p,u}(w))$, pour $v, w \in T_pM$.

Si $\psi : U \to \Sigma$ est un paramétrage local de $\Sigma$ en $p = \psi(u,v) \in \Sigma$, on considérera la base ordonnée

$$\mathscr{B}_{\psi(s,t)} = \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial s}(s,t), \frac{\partial \psi}{\partial t}(s,t) \right\}$$

de $T_{\psi(s,t)}\Sigma$. Pour simplifier, on écrira $\psi_s(s,t)$ et $\psi_t(s,t)$ les éléments de $\mathscr{B}_{\psi(s,t)}$, respectivement. Dans ce cas, on écrira les matrices de $\mathsf{I}_p$, $\mathsf{II}_{p,n_p}$ et $\mathsf{S}_{p,n_p}$ relatives à la base $\mathscr{B}_{\psi(s,t)}$, où

$$n_p = \frac{\psi_s(s,t) \wedge \psi_t(s,t)}{\|\psi_s(s,t) \wedge \psi_t(s,t)\|}.$$

On écrira souvent $\mathsf{II}_p$ et $\mathsf{S}_p$ pour simplifier. En particulier, on voit bien que

$$\mathsf{I}_p = \begin{pmatrix} \langle \psi_s, \psi_s \rangle & \langle \psi_s, \psi_t \rangle \\ \langle \psi_t, \psi_s \rangle & \langle \psi_t, \psi_t \rangle \end{pmatrix} \tag{1}$$

et

$$\mathsf{II}_p = \begin{pmatrix} \langle \psi_{ss}, n_{\psi(s,t)} \rangle & \langle \psi_{st}, n_{\psi(s,t)} \rangle \\ \langle \psi_{ts}, n_{\psi(s,t)} \rangle & \langle \psi_{tt}, n_{\psi(s,t)} \rangle \end{pmatrix}, \tag{2}$$

où les doubles indices de $\psi$ indiquent les dérivées d'ordre 2 respectives. La matrice de $\mathsf{S}_p$ se trouve alors de $\mathsf{II}_p = \mathsf{I}_p\,\mathsf{S}_p$.

On rappelle en plus que la **courbure de Gauss** est l'application $K : \Sigma \to \mathbb{R}$ qui associe $\det(\mathsf{S}_{p,u_p})$ à chaque $p \in \Sigma$, pour $u_p \in (T_p\Sigma)^\perp$ tel que $\|u_p\| = 1$. Les **courbures principales** $\kappa_1(p)$ et $\kappa_2(p)$ en $p \in \Sigma$ sont les valeurs propres de $\mathsf{S}_{p,u_p}$ et la **courbures moyenne** en $p \in \Sigma$ est $\operatorname{tr}(\mathsf{S}_{p,u_p})/2 = (\kappa_1(p) + \kappa_2(p))/2$. Noter que la courbure de Gauss est indépendante de $u_p$, mais les courbures principales et moyenne ne le sont pas. Un point $p \in \Sigma$ est dit **elliptique** (resp., **hyperbolique**, **parabolique**) si $K(p) > 0$ (resp., $K(p) < 0$, $K(p) = 0$). En outre, un point $p \in \Sigma$ est dit **ombilic** si $\kappa_1(p) = \kappa_2(p)$. Noter que ces notions sont indépendantes de $u_p$.

($a$) On utilise le paramétrage

$$\psi(\theta,\varphi) = \big(R\cos(\varphi)\cos(\theta), R\cos(\varphi)\sin(\theta), R\sin(\varphi)\big),$$

défini sur $]\,0, 2\pi\,[ \times ]\,0, \pi\,[$. On voit bien que

$$\psi_\theta(\theta,\varphi) = \big(-R\cos(\varphi)\sin(\theta), R\cos(\varphi)\cos(\theta), 0\big)$$

et

$$\psi_\varphi(\theta,\varphi) = \big(-R\sin(\varphi)\cos(\theta), -R\sin(\varphi)\sin(\theta), R\cos(\varphi)\big).$$

En conséquence, (1) nous dit que la matrice de la première forme fondamentale dans la base $\{\psi_\theta, \psi_\varphi\}$, est

$$\mathsf{I}_{\psi(\theta,\varphi)} = \begin{pmatrix} R^2\cos^2(\varphi) & 0 \\ 0 & R^2 \end{pmatrix}.$$

En plus,

$$\begin{aligned}
\psi_{\theta\theta}(\theta,\varphi) &= \big(-R\cos(\varphi)\cos(\theta), -R\cos(\varphi)\sin(\theta), 0\big),\\
\psi_{\varphi\theta}(\theta,\varphi) &= \big(R\sin(\varphi)\sin(\theta), -R\sin\varphi\cos(\theta), 0\big),\\
\psi_{\varphi\varphi}(\theta,\varphi) &= \big(-R\cos(\varphi)\cos(\theta), -R\cos(\varphi)\sin(\theta), -R\sin(\varphi)\big).
\end{aligned}$$

Le vecteur normal associé est alors

$$n_{\psi(\theta,\varphi)} = \big(\cos(\varphi)\cos(\theta), \cos(\varphi)\sin(\theta), \sin(\varphi)\big).$$

En employant (2) on en déduit que la matrice de la seconde forme fondamentale dans la base $\{\psi_\varphi, \psi_\theta\}$ est

$$\mathsf{II}_{\psi(\theta,\varphi)} = \begin{pmatrix} R\cos^2(\phi) & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}.$$

On en déduit la matrice de l'opérateur de Weingarten $\mathsf{S}_{\psi(\theta,\varphi)}$ via l'équation $\mathsf{II}_{\psi(\theta,\varphi)} = \mathsf{I}_{\psi(\theta,\varphi)}\mathsf{S}_{\psi(\theta,\varphi)}$, *i.e.*

$$\mathsf{S}_{\psi(\theta,\varphi)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{R} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} \end{pmatrix}.$$

L'opérateur $\mathsf{S}_{\psi(\theta,\varphi)}$ est une homothétie de rapport $1/R$ en chaque point, donc chaque point est ombilic et on a

$$H(p) = \frac{1}{R} \text{ et } K(p) = \frac{1}{R^2},$$

pour tout $p \in \Sigma$. Notons ici que le paramétrage ne couvre pas les points $(0,0,1)$ et $(0,0,-1)$, donc en toute rigueur il faudrait les traiter séparément.

(*b*) Pour le cylindre, on utilise le paramétrage $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ donné par

$$\psi(\theta,z) = \big(R\cos(\theta), R\sin(\theta), z\big).$$

On voit bien que

$$\psi_z(\theta,z) = (0,0,1) \text{ et } \psi_\theta(\theta,z) = \big(-R\sin(\theta), R\cos(\theta), 0\big).$$

En conséquence,

$$\mathsf{I}_{\psi(\theta,z)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En outre,

$$\psi_{zz}(\theta,z) = \psi_{\theta z}(\theta,z) = (0,0,0) \text{ et } \psi_{\theta\theta}(\theta,z) = -\big(R\cos(\theta), R\sin(\theta), 0\big).$$

On a aussi

$$n_{\psi(\theta,z)}(x,y,z) = \big(\cos(\theta), \sin(\theta), 0\big).$$

L'identité (2) nous dit alors que

$$\mathsf{II}_{\psi(\theta,z)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{R} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme $\mathsf{I}_{\psi(\theta,z)}$ est la matrice identité, alors

$$\mathsf{S}_{\psi(\theta,z)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{R} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit

$$k_1 = -\frac{1}{R}, \quad k_2 = 0, \quad H = -\frac{1}{2R}, \quad K = 0.$$

Il n'y a pas de point ombilic.

($c$) On a le paramétrage naturel $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ donné par

$$\psi(x,y) = (x,y,x^2 - y^2).$$

En particulier,

$$\psi_x(x,y) = (1,0,2x), \psi_y(x,y) = (0,1,-2y).$$

Alors, (1) nous dit que

$$\mathsf{I}_{\psi(x,y)} = \begin{pmatrix} 1+4x^2 & -4xy \\ -4xy & 1+4y^2 \end{pmatrix}.$$

Par ailleirs, on voit bien que

$$n_{\psi(x,y)} = \frac{(-2x,2y,1)}{(1+4x^2+4y^2)^{\frac{1}{2}}}$$

et les dérivées secondes

$$\phi_{xx}(x,y) = (0,0,2), \phi_{xy}(x,y) = (0,0,0), \text{ et } \phi_{yy}(x,y) = (0,0,-2)$$

En conséquence, en employant (2), on obtient que

$$\mathsf{II}_{\psi(x,y)} = \frac{1}{(1+4x^2+4y^2)^{\frac{1}{2}}} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

On en déduit l'application de Weingarten à partir de l'identité $\mathsf{II}_p = \mathsf{I}_p \mathsf{S}_p$. Donc, la matrice de $\mathsf{S}_{\psi(x,y)}$ est

$$\mathsf{S}_{\psi(x,y)} = \frac{1}{(1+4x^2+4y^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} 2+8y^2 & -8xy \\ 8xy & -(2+8x^2) \end{pmatrix}.$$

On obtient alors

$$K\big(\psi(x,y)\big) = \det(\mathsf{S}_{\psi(x,y)}) = \frac{-4}{(1+4x^2+4y^2)^2},$$

et

$$H\big(\psi(x,y)\big) = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(\mathsf{S}_{\psi(x,y)}) = \frac{4(y^2-x^2)}{(1+4x^2+4y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

On peut aussi calculer les courbures principales via les formules

$$\kappa_1(p) = H(p) + \sqrt{H(p)^2 - K(p)} \text{ et } \kappa_2(p) = H(p) - \sqrt{H(p)^2 - K(p)}.$$

En l'origine en tout cas, on a bien $\kappa_1 = 2$ et $\kappa_2 = -2$ et les directions principales sont l'axe des $x$ et l'axe des $y$.

($d$) On utilisera le paramétrage

$$\psi(z,\theta)=\big(\sqrt{1+z^2}\cos(\theta),\sqrt{1+z^2}\sin(\theta),z\big).$$

En conséquence,

$$\begin{aligned}
\psi_z &= \left(\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\cos(\theta),\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\sin(\theta),1\right),\\
\psi_\theta &= \left(-\sqrt{1+z^2}\sin(\theta),\sqrt{1+z^2}\cos(\theta),0\right),\\
\psi_{zz} &= \frac{1}{(1+z^2)^{\frac{3}{2}}}\big(\cos(\theta),\sin(\theta),0\big),\\
\psi_{z\theta} &= \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\big(-\sin(\theta),\cos(\theta),0\big),\\
\psi_{\theta\theta} &= \left(-\sqrt{1+z^2}\cos(\theta),-\sqrt{1+z^2}\sin(\theta),0\right),\\
n_{\psi(z,\theta)} &= \frac{1}{\sqrt{1+2z^2}}\left(-\sqrt{1+z^2}\cos(\theta),-\sqrt{1+z^2}\sin(\theta),z\right).
\end{aligned}$$

En conséquence, la première forme fondamentale dans la base $\{\psi_z,\psi_\theta\}$ est

$$\mathsf{I}_{\psi(z,\theta)}=\begin{pmatrix}\frac{1+2z^2}{1+z^2} & 0\\ 0 & 1+z^2\end{pmatrix}.$$

De la même façon, on voit bien que

$$\mathsf{II}_{\psi(z,\theta)}=\begin{pmatrix}\frac{1}{(1+z^2)\sqrt{1+2z^2}} & 0\\ 0 & -\frac{1+z^2}{\sqrt{1+2z^2}}\end{pmatrix}$$

et

$$\mathsf{S}_{\psi(z,\theta)}=\mathsf{I}^{-1}_{\psi(z,\theta)}\mathsf{II}_{\psi(z,\theta)}=\begin{pmatrix}\frac{1}{(1+2z^2)^{\frac{3}{2}}} & 0\\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{1+2z^2}}\end{pmatrix}.$$

On obtient alors les courbures principales

$$\kappa_1\big(\psi(z,\theta)\big)=\frac{1}{(1+2z^2)^{\frac{3}{2}}}\ \text{et}\ \kappa_2\big(\psi(z,\theta)\big)=-\frac{1}{\sqrt{1+2z^2}}$$

ce qui implique que

$$K\big(\psi(z,\theta)\big)=-\frac{1}{(1+2z^2)^2}\ \text{et}\ H\big(\psi(z,\theta)\big)=-\frac{1+z^2}{(1+2z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

($e$) On a le paramétrage $\phi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ donné par :

$$\psi(u,v)=\Big(\big(2+\cos(u)\big)\cos(v),\big(2+\cos(u)\big)\sin(v),\sin(u)\Big).$$

Ce n'est pas injectif, mais comme vu précédemment, ça le devient si on quotient $\mathbb{R}^2$ par $2\pi\mathbb{Z}^2$ à la source, ou si on restreint à des petits ouverts. En tout cas, $\psi$ est un difféomorphisme local $\mathbb{R}^2\to\Sigma$, ce qui suffit pour tous les calculs locaux.

Le champ de vecteurs normal sortant du tore $\Sigma$ est donné par :

$$n_\psi(u,v)=\big(-\sin(u)\cos(v),-\sin(u)\sin(v),\cos(u)\big).$$

En effet, dans le demi-plan où l'angle cylindrique $\theta$ est fixé, le champ de vecteur normal au cercle est $(-\sin(u), \cos(u))$, on utilise ensuite l'angle $v$ pour trouver la formule. On peut aussi calculer $\phi_u$ et $\phi_v$ puis leur produit vectoriel. On voit bien que

$$\begin{aligned}
\psi_u(u,v) &= \big(-\sin(u)\cos(v), -\sin(u)\sin(v), \cos(u)\big),\\
\psi_v(u,v) &= \Big(-\big(2+\cos(u)\big)\sin(v), \big(2+\cos(u)\big)\cos(v), 0\Big),\\
\psi_{uu}(u,v) &= \big(-\cos(u)\cos(v), -\cos(u)\sin(v), -\sin(u)\big),\\
\psi_{vv}(u,v) &= \Big(-\big(2+\cos(u)\big)\cos(v), -\big(2+\cos(u)\big)\sin(v), 0\Big),\\
\psi_{uv}(u,v) &= \big(\sin(u)\sin(v), -\sin(u)\cos(v), 0\big).
\end{aligned}$$

On en déduit les matrices de $\mathsf{I}$ et $\mathsf{II}$ dans la base $\{\psi_u, \psi_v\}$ à partir de (1) et (2). En effet,

$$\mathsf{I}_{\psi(u,v)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \big(2+\cos(u)\big)^2 \end{pmatrix}$$

et

$$\mathsf{II}_{\psi(u,v)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\big(2+\cos(u)\big)\sin(u) \end{pmatrix}.$$

En conséquence,

$$\mathsf{S}_{\psi(u,v)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sin(u)}{\big(2+\cos(u)\big)} \end{pmatrix}.$$

**2.** *Graphe et équation implicite.*

($a$) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^2$ avec $f(0,0) = 0$ et $df(0,0) = 0$. Comparer la différentielle seconde de $f$ en $(0,0)$ avec la seconde forme fondamentale du graphe de $f$ au point $(0,0,0)$.

($b$) Soit $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^2$ et $p = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ un point tel que $F(p) = 0$ et $dF(p) \neq 0$. Montrer que la seconde forme fondamentale de la surface $\Sigma = F^{-1}(0)$ au point $p$ est donnée par

$$\mathsf{II}_p = -\frac{1}{\|\operatorname{grad}_p F\|} d_p^2 F.$$

*Solution.*

($a$) On considère le paramétrage $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ de $\Sigma$ donné par $\psi(x,y) = (x, y, f(x,y))$. On trouve alors

$$\begin{aligned}
\phi_{xx}(x,y) &= \Big(0, 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\Big),\\
\phi_{xy}(x,y) &= \Big(0, 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\Big),\\
\phi_{yy}(x,y) &= \Big(0, 0, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\Big)
\end{aligned}$$

et le vecteur normal

$$n_{\psi(x,y)} = \frac{\left(-\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), -\frac{\partial f}{\partial y}(x,y), 1\right)}{\left(1 + \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)^2 + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)^2\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Ainsi, (2) nous dit que

$$\mathsf{II}_{\psi(x,y)} = \frac{1}{\left(1 + \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)^2 + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)^2\right)^{\frac{1}{2}}} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix}.$$

En $(0,0)$, on a $df(0,0) = 0$ et donc $\mathsf{II}_{\psi(0,0)} = d^2 f(0,0)$. Ainsi, si l'on voit une surface comme un graphe sur son espace tangent, la seconde forme fondamentale en ce point est simplement la différentielle seconde de la fonction correspondante.

$(b)$ Le vecteur normal s'écrit

$$n_p = \mathsf{grad}\, F(p)/(\|\mathsf{grad}\, F(p)\|),$$

où $\mathsf{grad}\, F(p) = \partial f(p)/\partial x \partial_x + \partial f(p)/\partial y \partial_y + \partial f(p)/\partial z \partial_z$. Pour $v$ vecteur tangent à $\Sigma$ en $p$,

$$\begin{aligned} \mathsf{II}_p(v) &= -\langle \nabla_v n_p, v\rangle = -\left\langle \frac{\nabla_v \mathsf{grad}\, F(p)}{\|\mathsf{grad}\, F(p)\|}, v\right\rangle - d\left(\frac{1}{\|\mathsf{grad}\, f(p)\|}\right)\langle \mathsf{grad}\, F(p), v\rangle \\ &= -\frac{d^2 F(v)}{\|\mathsf{grad}\, F(p)\|}. \end{aligned}$$

**3.** *Pseudosphère.* On considère l'application $\psi : \mathbb{R}_{<0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ donnée par

$$\psi(s,\theta) = \left(e^s \cos(\theta), e^s \sin(\theta), \int_0^s \sqrt{1 - e^{2t}}\, dt\right),$$

pour $(s,\theta) \in \mathbb{R}^2$ et soit $\Sigma = \mathsf{Img}(\psi)$.

$(a)$ Montrer que $\Sigma$ est une surface,

$(b)$ Dessiner la surface et montrer que sa courbure de Gauss est constante égale à $-1$.

*Solution.*

$(a)$ On pose $f : \mathbb{R}_{<0} \to \mathbb{R}_{<0}$ l'application donnée par

$$f(s) = \int_0^s \sqrt{1 - e^{2t}}\, dt,$$

alors $f$ est de classe $C^\infty$. Soit $\Psi : B(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}, 1) \setminus \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}\} \to \mathbb{R}^3$ l'application donnée par

$$\Psi(x,y) = \left(x, y, f\left(\ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\right)\right),$$

pour tout $(x,y) \in B(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}, 1) \setminus \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}\}$. On voit bien que $\Psi$ est de classe $C^\infty$. C'est clair que $\Sigma = \mathsf{Img}(\Psi)$, et que $\Psi$ est un homéomorphisme sur son image, vu que la restriction de la projection canonique $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ sur les deux premières variables est la réciproque de $\Psi$. En conséquence, $\Sigma$ est une surface (plongée) de $\mathbb{R}^3$ de classe $C^\infty$.

En outre, c'est clair que $\psi$ est de classe $C^\infty$. En plus, comme

$$\psi_s(s,\theta) = \left(e^s \cos(\theta), e^s \sin(\theta), \sqrt{1-e^{2s}}\right)$$

et

$$\psi_\theta(s,\theta) = \left(-e^s \sin(\theta), e^s \cos(\theta), 0\right),$$

alors

$$\psi_s(s,\theta) \wedge \psi_\theta(s,\theta) = \left(-e^s \cos(\theta)\sqrt{1-e^{2s}}, -e^s \sin(\theta)\sqrt{1-e^{2s}}, e^{2s}\right) \neq \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3},$$

ce qui nous dit que $\psi$ est une immersion. Comme $\Sigma$ est un surface, $\psi$ détermine des paramétrages locaux de $\Sigma$.

$(b)$ On considère la base ordonnée $\mathscr{B}_{\psi(s,\theta)} = \{\psi_s, \psi_\theta\}$ de $T_{\psi(s,\theta)}\Sigma$. Comme

$$\psi_s(s,\theta) = \left(e^s \cos(\theta), e^s \sin(\theta), \sqrt{1-e^{2s}}\right)$$

et

$$\psi_\theta(s,\theta) = \left(-e^s \sin(\theta), e^s \cos(\theta), 0\right),$$

on conclut que

$$\mathrm{I}_{\psi(s,\theta)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2s} \end{pmatrix}.$$

En plus, en considérant le vecteur normal

$$n(s,\theta) = \frac{\psi_s(s,\theta) \wedge \psi_\theta(s,\theta)}{\|\psi_s(s,\theta) \wedge \psi_\theta(s,\theta)\|} = \left(-\cos(\theta)\sqrt{1-e^{2s}}, -\sin(\theta)\sqrt{1-e^{2s}}, e^s\right),$$

on trouve que

$$\mathrm{II}_{\psi(s,\theta)} = \begin{pmatrix} -\frac{e^s}{\sqrt{1-e^{2s}}} & 0 \\ 0 & e^s\sqrt{1-e^{2s}} \end{pmatrix},$$

ce qui nous dit que

$$\mathrm{II}_{\psi(s,\theta)} = \begin{pmatrix} -\frac{e^s}{\sqrt{1-e^{2s}}} & 0 \\ 0 & e^{-s}\sqrt{1-e^{2s}} \end{pmatrix}.$$

En conséquence, $K(p) = -1$, pour tout $p \in \Sigma$.

**4.** Soit $r > 0$ et le cylindre de révolution $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = r^2\}$.

$(a)$ Donner une condition nécessaire et suffisante sur la fonction $z : J \to \mathbb{R}$ pour que la courbe $\alpha : J \to \mathbb{R}^3$ donnée par

$$\alpha(t) = \left(r\cos(t), r\sin(t), z(t)\right)$$

soit une géodésique, où $J \subseteq \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert.

$(b)$ Déterminer toutes les géodésiques sur $\Sigma$.

$(c)$ Calculer la distance entre les points $(r,0,0)$ et $(0,r,1)$ de $\Sigma$.

*Solution.* Soit $u_p \in (T_p\Sigma)^\perp$ tel que $\|u_p\| = 1$. On rappelle que la projection orthogonale $\pi_p : \mathbb{R}^3 \to T_p\Sigma$ est donnée par $\pi_p(v) = v - \langle v, u_p\rangle u_p$. Une courbe régulière $\alpha : J \to \Sigma$ de classe $C^2$ est dite une **géodésique** sur $\Sigma$, où $J$ est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, si $\pi_{\alpha(t)}(\alpha''(t)) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}$, pour tout $t \in J$. On rappelle que la définition générale de géodésique impose plutôt $\nabla_{\alpha'}\alpha'(t) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}$, pour tout $t \in J$, où

$$\nabla_{\alpha'}\alpha'(t) = \nabla_X X\big(\alpha(t)\big) = \pi_{\alpha(t)}\Big(\bar{\nabla}_X X\big(\alpha(t)\big)\Big)$$

et $X$ est un champ de vecteurs $X$ de classe $C^2$ défini sur un voisinage de $\alpha(t)$ tel que $X \circ \alpha = \alpha'$. Par ailleurs, l'identité $X \circ \alpha = \alpha'$ nous dit que $\bar{\nabla}_X X(\alpha(t)) = d(X)(\alpha(t))(\alpha'(t)) = \alpha''(t)$ et en conséquence $\nabla_{\alpha'}\alpha'(t) = \pi_{\alpha(t)}(\alpha''(t))$. Comme d'habitude on va identifier deux courbes si l'on obtient une comme la reparamétrisation de l'autre.

Étant donné $p$ et $q$ deux points différents dans une surface $\Sigma$, on sait que si $\alpha : [a,b] \to \Sigma$ est une courbe de classe $C^2$ telle que $\alpha(a) = p$ et $\alpha(b) = q$, et

$$\ell(\alpha) = \inf\big\{\ell(\beta) : \beta \in C^2([a',b'],\Sigma), \beta(a') = p, \beta(b) = q\big\},$$

alors $\alpha$ est une géodésique, dite **minimisante**, où $\ell(\beta)$ dénote la longueur de la courbe $\beta$. En outre, si $\Sigma$ est une surface fermée de $\mathbb{R}^3$, le théorème de Hopf-Rinow nous dit que pour toute paire de points $(p,q) \in \Sigma^2$, il existe une géodésique minimisante reliant $p$ et $q$.

$(a)$ Toute courbe $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ de classe $C^2$ tracée sur le cylindre est de façon locale de la forme $x(t) = r\cos(\theta(t))$, $y(t) = r\sin(\theta(t))$ et $z(t)$, avec $\theta(t)$ et $z(t)$ de classe $C^2$. On suppose que $\alpha$ est définie sur un intervalle ouvert $J$. En outre, un vecteur normal au cylindre (de norme 1) au point $\alpha(t)$ est $u_{\alpha(t)} = (\cos(\theta(t)), \sin(\theta(t)), 0)$. En conséquence,

$$\begin{aligned}\pi_{\alpha(t)}\big(\alpha''(t)\big) &= \alpha''(t) - \langle \alpha''(t), u_{\alpha(t)}\rangle u_{\alpha(t)} \\ &= \Big(-r\sin\big(\theta(t)\big)\theta''(t), r\cos\big(\theta(t)\big)\theta''(t), z''(t)\Big),\end{aligned}$$

pour tout $t \in J$. Alors, par définition, la courbe $\alpha$ est géodésique si et seulement si $z''(t) = \theta''(t) = 0$ pour tout $t \in J$, ce qui implique qu'il existe $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ tels que $z(t) = at + b$ et $\theta(t) = ct + d$. On voit bien dans ce cas que $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{r^2c^2 + a^2}$. Comme $\alpha$ est régulière, $r^2c^2 + a^2 \neq 0$. Réciproquement, si $r^2c^2 + a^2 \neq 0$, la courbe $\alpha$ est une géodésique. Dans le cas de cet item, on considère $c = 1$ et $d = 0$.

$(b)$ On a calculé toutes les géodésiques dans la question précédente. On peut analyser les résultats par contre un peu plus en détail. Si $c = 0$, alors $a \neq 0$ et on a alors une géodésique verticale de la forme

$$\alpha(t) = (x_0, y_0, at + b).$$

Si $c \neq 0$, on peut reparamétrer $\alpha$ avec $u = \theta(t)$ pour l'avoir sous la forme $\alpha(u) = (r\cos(u), r\sin(u), a'u + b')$ comme à la question précédente.

$(c)$ Comme $\Sigma$ est une surface fermée de $\mathbb{R}^3$, on sait que deux points quelconques de $\Sigma$ sont reliés par une géodésique minimisante, i.e. il existe une géodésique $\alpha : [\gamma, \delta] \to \Sigma$ telle que $\alpha(\gamma) = (r,0,0)$, $\alpha(\delta) = (0,r,1)$ et $\ell(\alpha) \leq \ell(\beta)$ pour tout autre courbe $\beta : [\gamma', \delta'] \to \Sigma$ régulière de classe $C^2$ telle que $\beta(\gamma) = (r,0,0)$ et $\beta(\delta) = (0,r,1)$. D'après notre caractérisation de géodésiques pour le cylindre, on note que si $\alpha$ est un géodésique de la forme $(r\cos(ct+d), r\sin(ct+d), at+b)$, avec $r^2c^2+a^2 \neq 0$, qui passe par $(r,0,0)$ et $(0,r,1)$, alors $c \neq 0$. En particulier, en faisant un reparamétrage, on peut supposer sans perte de généralité que $\alpha$ est de la forme $(r\cos(u), r\sin(u), a'u + b')$

avec $b' \in [0, 2\pi[$, et elle est définie sur $\mathbb{R}$. En plus, si $\alpha$ passe par $(r, 0, 0)$ et $(0, r, 1)$, on conclut que $a' \neq 0$. Or, $(r, 0, 0) \in \mathsf{Img}(\alpha)$ si et seulement si $b'/(a'\pi) \in \mathbb{Z}$. Soit $n = b'/(a'\pi)$, *i.e.* $b' = na'\pi$. En outre, $\alpha$ passe par $(0, r, 1)$ si et seulement s'il existe

$$1 = a'(2m\pi + \pi/2) + na'\pi = a'\pi(2m + n + 1/2),$$

*i.e.* $a' = 2/(\pi(4m + 2n + 1))$. On conclut qu'une géodésique $\alpha$ de la forme de la forme $(r\cos(u), r\sin(u), a'u + b')$ satisfait que $(r, 0, 0)$ et $(0, r, 1)$ sont dans $\mathsf{Img}(\alpha)$ si et seulement s'il existe $n, m \in \mathbb{Z}$ tels que $a' = 2/(\pi(4m+2n+1))$ et $b' = 2n/(4m+2n+1)$. On notera $\alpha_{m,n}$ la géodésique indéxée par $(m, n)$. On remarque que $\alpha_{m,n}(-n\pi) = (r, 0, 0)$ et $\alpha((2m + 1/2)\pi) = (0, r, 1)$, ce qui implique que

$$\begin{aligned}
\ell(\alpha_{m,n}|_I) &= \left| \int_{-n\pi}^{(4m+1)\pi/2} \|\alpha'_{m,n}(s)\| ds \right| = \left| \int_{-n\pi}^{(4m+1)\pi/2} \sqrt{r^2 + \frac{4}{(\pi(4m+2n+1))^2}} ds \right| \\
&= \sqrt{r^2 + \frac{4}{(\pi(4m+2n+1))^2}} \left| \frac{(4m+2n+1)\pi}{2} \right| \\
&= \sqrt{1 + \frac{(4m+2n+1)^2\pi^2 r^2}{4}},
\end{aligned}$$

où $I$ est l'intervalle dont les bornes sont $-n\pi$ et $(2m + 1/2)\pi$. On conclut que la géodésique de longueur minimale qui passe par $(r, 0, 0)$ et $(0, r, 1)$ est $\alpha_{0,0}$, *i.e.* $\alpha_{0,0}(u) = (r\cos(u), r\sin(u), 2u/\pi)$.

**5.** Soit $\alpha \in ]0, \pi/2[$ et le cône

$$\Sigma_\alpha = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_{>0} : x^2 + y^2 = z^2 \tan^2(\alpha)\}.$$

$(a)$ Soit $\Sigma'_\alpha = \Sigma_\alpha \setminus \{(x\tan(\alpha), 0, x) : x \in \mathbb{R}_{>0}\}$. On définit l'application

$$f : \Sigma'_\alpha \to \mathbb{R}^2$$

de la façon suivante. On considère

$$\hat{\Sigma}_\alpha = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_{\geq 0} : x^2 + y^2 \leq z^2 \tan^2(\alpha)\}.$$

et la rotation

$$R = \begin{pmatrix} \sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos(\alpha) & 0 & \sin(\alpha) \end{pmatrix}.$$

On dit que $L = \{\lambda(\cos(\alpha), 0, \sin(\alpha)) : \lambda \in \mathbb{R}_{>0}\}$ est **l'axe central du cône** $\hat{\Sigma}_\alpha$. Étant donné $p \in \Sigma'_\alpha$, on fait rouler $R(\hat{\Sigma}_\alpha)$ sans glisser sur le plan $z = 0$, de sorte que l'axe central du cône tourne autour de l'axe $z$ en sens antihoraire jusqu'à ce que $R(p)$ touche le plan $z = 0$ en un point $(x, y)$. On pose $f(p) = (x, y)$. Montrer que

$$f\big(r\cos(\theta), r\sin(\theta), r/\tan(\alpha)\big) = \left(\frac{r\cos\big(\theta\sin(\alpha)\big)}{\sin(\alpha)}, \frac{r\sin\big(\theta\sin(\alpha)\big)}{\sin(\alpha)}\right),$$

pour tout $r > 0$ et $\theta \in ]0, 2\pi[$. En déduire que $f$ est de classe $C^\infty$.

($b$) Montrer que l'application ci-dessus est une isométrie.

($c$) Montrer que les géodésiques sur $\Sigma_\alpha$ sont les courbes dont l'image dans le plan est une droite.

($d$) Calculer la distance entre les points $p = (\tan(\alpha), 0, 1)$ et $q = (0, 2\tan(\alpha), 2)$ sur $\Sigma_\alpha$.

*Solution.*

($a$) On note d'abord que $R(\{(\tan(\alpha)x, 0, x) : x \in \mathbb{R}_{>0}\}) = \{(x, 0, 0) : x \in \mathbb{R}_{>0}\}$. Comme la construction de $f$ fait intervenir seulement des transformation rigides de l'espace, on voit bien que, si $p \in \Sigma'_\alpha$ avec $\|p\| = \rho$, alors $\|f(p)\| = \rho$. On suppose que $p = (r\cos(\theta), r\sin(\theta), r/\tan(\alpha))$, pour $r > 0$ et $\theta \in ]0, 2\pi[$. On a donc $\sin(\alpha) = r/\rho$ et $\rho = r/\sin(\alpha)$. En plus, on voit bien que l'arc circulaire $C$ formé entre $p_0 = (r, 0, r/\tan(\alpha))$ et $p$ a longueur $r\theta$. Comme la construction de $f$ fait intervenir seulement des transformation rigides de l'espace, $f(C)$ est l'arc circulaire formé entre $f(p_0) = (r/\sin(\alpha), 0, 0))$ et $f(p) = (\rho\cos(\phi), \rho(\sin(\phi)))$ est $r\theta = \rho\phi$. Cela nous dit que $f$ est de la forme demandée. En outre, comme l'application $\psi : \mathbb{R}_{>0} \times ]0, 2\pi[ \to \Sigma'_\alpha$ donnée par $\psi(r, \theta) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta), r/\tan(\alpha))$ est un paramétrage de classe $C^\infty$ de $\Sigma'_\alpha$ avec $r > 0$ et $\theta \in ]0, 2\pi[$, on conclut que $f$ est de classe $C^\infty$.

($b$) On rappelle que, étant donné deux surfaces $\Sigma$ et $\Sigma'$ (plongées de $\mathbb{R}^3$) de classe $C^\infty$, une application $f : \Sigma \to \Sigma'$ de classe $C^\infty$ est une isométrie si

$$\mathrm{I}_p^{\Sigma}(v, w) = \mathrm{I}_{f(p)}^{\Sigma'}\big(df_p(v), df_p(w)\big),$$

pour tout $p \in \Sigma$ et $v, w \in T_p\Sigma$.

Si l'on utilise le paramétrage $\psi$, la première forme fondamentale s'écrit

$$\mathrm{I}_{\psi(r,\theta)}^{\Sigma} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sin^2(\alpha)} & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

dans la base $\{\psi_r(r, \theta), \psi_\theta(r, \theta)\}$ En outre, la règle de dérivation en chaîne nous dit que

$$df_p\big(\psi_r(r, \theta)\big) = \frac{\partial(f \circ \psi)}{\partial r}(r, \theta) \text{ et } df_p\big(\psi_\theta(r, \theta)\big) = \frac{\partial(f \circ \psi)}{\partial \theta}(r, \theta),$$

ce qui implique que

$$df_p\big(\psi_r(r, \theta)\big) = \left(\frac{\cos\big(\theta\sin(\alpha)\big)}{\sin(\alpha)}, \frac{\sin\big(\theta\sin(\alpha)\big)}{\sin(\alpha)}\right)$$
$$df_p\big(\psi_\theta(r, \theta)\big) = \Big(-r\sin\big(\theta\sin(\alpha)\big), r\cos\big(\theta\sin(\alpha)\big)\Big)$$

En conséquence,

$$\mathrm{I}_{f(\psi(r,\theta))}^{\mathbb{R}^2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sin^2(\alpha)} & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

dans la base $\{df_p(\psi_r(r, \theta)), df_p(\psi_\theta(r, \theta))\}$.

($c$) Dans le plan les géodésiques sont des droites et une isométrie envoie des géodésiques sur des géodésiques. Donc les géodésiques du cône sont les courbes dont l'image par $f$ sont des droites.

($d$) Il suffit de calculer la distance dans le plan entre leurs images par $f$. On a

$$f\big(\tan(\alpha),0\big)=\left(\frac{1}{\cos(\alpha)},0\right)$$

et

$$f\left(2\tan(\alpha),\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2}{\cos(\alpha)}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin(\alpha)\right),\sin\left(\frac{\pi}{2}\sin(\alpha)\right)\right).$$

On trouve alors la distance

$$\frac{1}{\cos(\alpha)}\left((2\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin(\alpha)\right)-1)^2+4\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\sin(\alpha)\right)\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{\sqrt{5-4\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin(\alpha)\right)}}{\cos(\alpha)}.$$

Quand $\alpha$ tend vers 0, cette quantité tend vers 1, ce qui est cohérent.

**6.** On considère la sphère unité $\Sigma$ de $\mathbb{R}^3$ et un plan affine $P$.

($a$) Calculer la courbure géodésique de $P\cap\Sigma$.

($b$) A quelle condition sur $P$ la courbure géodésique de $P\cap\Sigma$ est-elle nulle ?

*Solution.* Soit $\alpha : J\to\Sigma$ une courbe régulière de classe $C^2$ paramétrée par longueur d'arc et incluse dans une surface $\Sigma$. On rappelle que la **courbure géodésique** de $\alpha$ est définie par

$$\kappa_{g,\alpha}(t)=\left\|\pi_{\alpha(t)}\big(\alpha''(t)\big)\right\|=\left\|\alpha''(t)\wedge n_{\alpha(t)}\right\|,$$

pour $t\in J$, où $n_{\alpha(t)}\in(T_{\alpha(t)}\Sigma)^\perp$ tel que $\|n_{\alpha(t)}\|=1$. Si l'on suppose que la courbe $\alpha$ est régulière de classe $C^2$ mais elle n'est pas nécéssairement paramétrée par longueur d'arc, on peut montrer que $\kappa_{g,\beta}(s(t))$ est indépendant du choix de reparamétrage $\beta : J\to\Sigma$ de $\alpha=\beta\circ s$ par longueur d'arc, où $s : J\to J'$ est le reparamétrage, car

$$\kappa_{g,\beta}(s(t))=\frac{\left|\left\langle\alpha'(t)\wedge n_{\alpha(t)},\alpha''(t)\right\rangle\right|}{\|\alpha'(t)\|^3}. \tag{3}$$

En effet, d'après l'exercice **6** de la fiche 2, on a

$$\frac{d^2\beta}{ds^2}\big(s(t)\big)=\frac{1}{\|\alpha'(t)\|^2}\left(\alpha''(t)-\alpha'(t)\frac{\langle\alpha'(t),\alpha''(t)\rangle}{\|\alpha'(t)\|^2}\right),$$

pour tout $t\in J$. On considère la base orthonormée $\{v_{\alpha(t)},n_{\alpha(t)},w_{\alpha(t)}\}$, où $v_{\alpha(t)}=\alpha'(t)/\|\alpha'(t)\|$ et $w_{\alpha(t)}=v_{\alpha(t)}\wedge n_{\alpha(t)}$. On peut alors écrire $\alpha''(t)=\lambda(t)v_{\alpha(t)}+\mu(t)n_{\alpha(t)}+\nu(t)w_{\alpha(t)}$, où $\lambda(t)=\langle\alpha'(t),\alpha''(t)\rangle/\|\alpha'(t)\|^2$, ce qui implique que

$$\frac{d^2\beta}{ds^2}\big(s(t)\big)\wedge n_{\alpha(t)}=-\frac{\nu(t)}{\|\alpha'(t)\|^2}w_{\alpha(t)}$$

et

$$\frac{\left\langle\alpha'(t)\wedge n_{\alpha(t)},\alpha''(t)\right\rangle}{\|\alpha'(t)\|^3}=\frac{\left\langle w_{\alpha(t)},\alpha''(t)\right\rangle}{\|\alpha'(t)\|^2}=\frac{\nu(t)}{\|\alpha'(t)\|^2},$$

ce qui nous donne finalement (3). En conséquence, on peut définir $\kappa_{g,\alpha}(t)$ via $\kappa_{g,\beta}(s(t))$, mais une expression directe est donnée par le membre de droite de (3).

($a$) Quitte à prendre l'image par une isométrie vectorielle de $\mathbb{R}^3$, on peut supposer que le plan $P$ est d'équation $z = a$ avec $0 \leq a < 1$ (si $a > 1$, $P \cap \Sigma$ est vide). Alors le cercle $P \cap \Sigma$ admet pour paramétrage par longueur d'arc donné par

$$\gamma(t) = \big(r\cos(t/r), r\sin(t/r), a\big)$$

avec $r = \sqrt{1-a^2}$. En outre, on considère le vecteur normal unitaire à la sphère $n_{\gamma(t)} = \gamma(t)$. La courbure géodésique de $\gamma$ est alors

$$\left\|\gamma''(t) \wedge n_{\gamma(t)}\right\| = \frac{a}{r}.$$

($b$) Cette quantité est nulle si et seulement si $a = 0$, $r = 1$. On obtient une géodésique seulement quand le plan passe par l'origine : on dit que $P \cap \Sigma$ est un **grand cercle**. On voit ici que la courbure géodésique (vue comme courbe sur la surface) est différente de la courbure vue comme courbe dans l'espace. À l'inverse, si $a$ tend vers $1^-$, la courbure géodésique tend vers $+\infty$, le cercle est de plus en plus courbé.

**7.** Soit $J \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et $\alpha : J \to \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$ une courbe de classe $C^\infty$ paramétrée par longueur d'arc, que l'on écrira $\alpha(s) = (f(s), g(s))$, pour $s \in J$. On considère l'application $\psi : \mathbb{R} \times J \to \mathbb{R}^3$ de la forme

$$\psi(u,v) = \big(f(v)\cos(u), f(v)\sin(u), g(v)\big),$$

et $\Sigma = \mathsf{Img}(\psi)$.

($a$) Un **méridien** de $\psi$ est une courbe $\psi_u : J \to \Sigma$ de la forme $\psi_u(v) = \psi(u,v)$, avec $u \in \mathbb{R}$ fixé. Montrer que $\psi_u$ est une géodésique de $\Sigma$ pour tout $u \in \mathbb{R}$.

($b$) Un **parallèle** de $\psi$ est une courbe $\psi_v : \mathbb{R} \to \Sigma$ de la forme $\psi_v(u) = \psi(u,v)$, avec $v \in J$ fixé. À quelle condition sur $v$ la courbe $\psi_v$ est-elle une géodésique de $\Sigma$ ?

($c$) Soit $\gamma : J' \to \Sigma$ une géodésique de $\Sigma$. Soient $r, \theta : J' \to \mathbb{R}$ les applications telles que $r(t)$ soit la distance $\gamma(t)$ à l'axe $z$, et $\theta(t)$ soit l'angle entre $\gamma'(t)$ et le parallèle passant par $\gamma(t)$, pour tout $t \in J'$. Montrer que l'application $t \mapsto r(t)\cos(\theta(t))$, appelée l'**invariant de Clairaut**, est constante sur $J'$.

*Solution.*

($a$) On doit vérifier que l'accélération est orthogonale à la surface. Ici, l'accélération de la courbe $\psi_u$ est

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}(u,v) = \big(f''(v)\cos(u), f''(v)\sin(u), g''(v)\big).$$

On note d'abord que

$$\left\langle \frac{\partial\psi}{\partial u}(u,v), \frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}(u,v) \right\rangle = 0$$

et

$$\left\langle \frac{\partial\psi}{\partial v}(u,v), \frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}(u,v) \right\rangle = f'(v)f''(v) + g'(v)g''(v) = 0,$$

où l'on a utilisé l'égalité $f'(v)^2 + g'(v)^2 = 1$, car la courbe $(f(g), g(v))$ est paramétrée par longueur d'arc. Comme l'espace tangent est engendré par $\partial\psi/\partial u$ et $\partial\psi/\partial v$, on conclut que $\psi''_u$ est orthogonale à la surface, comme on voulait démontrer.

On remarque par ailleurs qu'un vecteur normal à la surface est

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\psi}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial\psi}{\partial v}(u,v)\\
&= \big(f(v)\cos(u), f'(v)\sin(u), g'(v)\big) \times \big(-f(v)\sin(u), f(v)\cos(u), 0\big)\\
&= \big(-f(v)g'(v)\cos(u), -f(v)g'(v)\sin(u), f(v)f'(v)\big)
\end{aligned}$$

$(b)$ On voit bien que

$$\left\langle \frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}(u,v), \frac{\partial\psi}{\partial u}(u,v)\right\rangle = f(v)^2\cos(u)\sin(u) - f(v)^2\cos(u)\sin(u) = 0$$

et

$$\left\langle \frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}(u,v), \frac{\partial\psi}{\partial v}(u,v)\right\rangle = -f(v)f'(v).$$

La parallèle $\psi_{v_0}$ est une géodésique si et seulement si $f'(v_0) = 0$, car $f(v_0) > 0$. En particulier, on a des parallèles géodésiques aux maxima et minimal locaux de $f$.

$(c)$ Soit $\gamma : J' \to \Sigma$ une géodésique, où $J'$ est un intervalle ouvert. On peut l'écrire (au moins localement) sous la forme $\gamma(t) = \psi(u(t), v(t))$, où $u, v : J' \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions réelles de classe $C^\infty$. On remarque d'abord que $r(t) = f(v(t))$ et

$$\cos\big(\theta(t)\big) = \frac{1}{\left\|\frac{\partial\psi}{\partial u}\big(u(t), v(t)\big)\right\|}\left\langle \frac{\partial\psi}{\partial u}\big(u(t), v(t)\big), \gamma'(t)\right\rangle.$$

De plus, comme $\|\partial\psi/\partial u(u,v)\| = f(v)$, on conclut que

$$\begin{aligned}
r(t)\cos\big(\theta(t)\big) &= \left\langle \frac{\partial\psi}{\partial u}\big(u(t), v(t)\big), u'(t)\frac{\partial\psi}{\partial u}\big(u(t), v(t)\big) + v'(t)\frac{\partial\psi}{\partial v}\big(u(t), v(t)\big)\right\rangle\\
&= u'(t) f\big(v(t)\big)^2.
\end{aligned}$$

Comme $\gamma$ est une géodésique, on a

$$\begin{aligned}
0 &= \left\langle \frac{\partial\psi}{\partial u}\big(u(t), v(t)\big), \gamma''(t)\right\rangle\\
&= \left\langle \frac{\partial\psi}{\partial u}\big(u(t), v(t)\big), u''(t)\frac{\partial\psi}{\partial u}\big(u(t), v(t)\big) + v''(t)\frac{\partial\psi}{\partial v}\big(u(t), v(t)\big) + u'(t)^2\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}\big(u(t), v(t)\big)\right.\\
&\qquad \left. + v'(t)^2\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}\big(u(t), v(t)\big) + 2u'(t)v'(t)\frac{\partial^2\psi}{\partial u\partial v}\big(u(t), v(t)\big)\right\rangle\\
&= u''(t)f\big(v(t)\big)^2 + 2u'(t)v'(t)f\big(v(t)\big)f'\big(v(t)\big),
\end{aligned}$$

qui est précisément la dérivée de l'application $t \mapsto r(t)\cos(\theta(t))$, d'où le résultat.

**8.** *Ellipsoïde et système triple orthogonal.* Soient $a, b, c \in \mathbb{R}_{>0}$ tels que $c \le b \le a$ et

$$\Sigma = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\right\}.$$

$(a)$ Que dire des cas où $c < b = a$, $c = b < a$ et $c = b = a$ ?

$(b)$ On suppose désormais que $c < b < a$. Montrer que $\Sigma$ est l'image de la sphère unité par la transformation $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donnée par $F(x,y,z) = (ax, by, cz)$. En déduire un paramétrage (local) $\psi$ de $\Sigma$ par coordonnées "sphériques"

$$(\theta, \varphi) \in \left]0, 2\pi\right[ \times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[.$$

(*c*) Pour un point $(x_0, y_0, z_0) \in \Sigma$, calculer la distance $h$ entre l'origine et le plan affine tangent à $\Sigma$ en $(x_0, y_0, z_0)$. Exprimer cette quantité en fonction de $\theta_0$ et $\varphi_0$ tels que $\psi(\theta_0, \varphi_0) = (x_0, y_0, z_0)$.

(*d*) Donner les matrices de $\mathsf{I}$ et $\mathsf{II}$ dans la base $\{\psi_\theta, \psi_\varphi\}$.

(*e*) En déduire la matrice de $\mathsf{S}^{-1}$ et la formule suivante pour la courbure de Gauss

$$K = \frac{h^4}{a^2 b^2 c^2}.$$

(*f*) Déterminer les points ombilics de $\Sigma$.

(*g*) Nommer la surface d'équation

$$\frac{x^2}{a^2 - \lambda} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda} + \frac{z^2}{c^2 - \lambda} = 1$$

en fonction de la valeur de $\lambda$.

(*h*) Montrer que pour (presque) tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}\}$, il existe un unique triplet $(u,v,w)$ tel que $u < c^2 < v < b^2 < w < a^2$ et

$$\frac{x^2}{a^2 - u} + \frac{y^2}{b^2 - u} + \frac{z^2}{c^2 - u} = 1,$$
$$\frac{x^2}{a^2 - v} + \frac{y^2}{b^2 - v} - \frac{z^2}{v - c^2} = 1,$$
$$\frac{x^2}{a^2 - w} - \frac{y^2}{w - b^2} - \frac{z^2}{w - c^2} = 1.$$

Réciproquement donner une formule pour $(x,y,z)$ en fonction de $(u,v,w)$.

(*i*) Montrer que les trois surfaces définies par les équations ci-dessus s'intersectent deux à deux orthogonalement. On dit que ces familles de surfaces forment un **système triple orthogonal**.

(*j*) On fixe ici $u = 0$, montrer que les coordonnées restantes $(v,w)$ définissent les lignes de courbure sur l'ellipsoïde $\Sigma$.

*Solution.*

(*a*) Si $a = b$, alors $\Sigma$ est une surface de révolution autour de l'axe $z$. Si $b = c$, c'est une surface de révolution autour de l'axe $x$. Si $a = b = c$, c'est une sphère.

(*b*) Posant $x = au$, $y = bv$, $z = cw$, on a

$$u^2 + v^2 + w^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}.$$

Donc la sphère de rayon 1 dans les coordonnées $(u,v,w)$ correspond à l'ellipsoïde $\Sigma$ dans les coordonnées $(x,y,z)$.

On en déduit le paramétrage

$$\psi(\theta, \varphi) = \big(a\cos(\theta)\cos(\varphi), b\sin(\theta)\cos(\varphi), c\sin(\varphi)\big).$$

(c) Le point $(x,y,z)$ est dans le plan affine tangent au point $(x_0,y_0,z_0)$ de $\Sigma$ si et seulement si le vecteur $(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$ est dans le noyau de

$$\frac{xdx}{a^2}+\frac{ydy}{b^2}+\frac{zdz}{c^2}=0.$$

Autrement dit, le plan affine tangent a pour équation

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}+\frac{z_0z}{c^2}-1=0.$$

La distance de l'origine a ce plan est, d'après la formule générale,

$$h(x_0,y_0,z_0)=\frac{1}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}+\frac{z_0^2}{c^4}}}.$$

En terme des coordonnées sphériques, on a

$$h(\theta_0,\varphi_0)=\frac{abc}{\sqrt{b^2c^2\cos^2(\theta_0)\cos^2(\varphi_0)+a^2c^2\sin^2(\theta_0)\cos^2(\varphi_0)+a^2b^2\sin^2(\varphi_0)}}.$$

(d) On voit bien que les dérivées partielles de $\psi$ et le vecteur normal sont donnés par

$$\begin{aligned}
\psi_\theta &= \big(-a\sin(\theta)\cos(\varphi), b\cos(\theta)\cos(\varphi), 0\big),\\
\psi_\varphi &= \big(-a\cos(\theta)\sin(\varphi), -b\sin(\theta)\sin(\varphi), c\cos(\varphi)\big),\\
\psi_{\theta\theta} &= \big(-a\cos(\theta)\cos(\varphi), -b\sin(\theta)\cos(\varphi), 0\big),\\
\psi_{\varphi\theta} &= \big(a\sin(\theta)\sin(\varphi), -b\cos(\theta)\sin(\varphi), 0\big),\\
\psi_{\varphi\varphi} &= \big(-a\cos(\theta)\cos(\varphi), -b\sin(\theta)\cos(\varphi), -c\sin(\theta)\big),\\
n_{\psi(\theta,\varphi)} &= \frac{h(\theta,\varphi)}{abc}\big(-bc\cos(\theta)\cos(\varphi), -ac\cos(\theta)\sin(\varphi), -ab\sin(\theta)\big).
\end{aligned}$$

Les matrices de $\mathsf{I}$ et $\mathsf{II}$ dans la base $(\psi_\theta,\psi_\varphi)$ sont alors

$$\mathsf{I}_{\psi(\theta,\varphi)}=\begin{pmatrix} a^2\sin^2(\theta)\cos^2(\varphi)+b^2\cos^2(\theta)\cos^2(\varphi) & (a^2-b^2)\cos(\theta)\sin(\theta)\cos(\varphi)\sin(\varphi)\\ (a^2-b^2)\cos(\theta)\sin(\theta)\cos(\varphi)\sin(\varphi) & a^2\cos^2(\theta)\sin^2(\varphi)+b^2\sin^2(\theta)\sin^2(\varphi)+c^2\cos^2(\varphi)\end{pmatrix}$$

et

$$\mathsf{II}_{\psi(\theta,\varphi)}=h(\theta,\varphi)\begin{pmatrix}\cos^2(\varphi) & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

En particulier, on voit bien que

$$\begin{aligned}
\det\big(\mathsf{I}_{\psi(\theta,\varphi)}\big) &= \big(a^2\sin^2(\theta)+b^2\cos^2(\theta)\big)\big(a^2\cos^2(\theta)+b^2\sin^2(\theta)\big)\cos^2(\varphi)\sin^2(\varphi)\\
&\quad+\big(a^2\sin^2(\theta)+b^2\cos^2(\theta)\big)c^2\cos^4(\varphi)\\
&\quad-(a^2-b^2)^2\cos^2(\theta)\sin^2(\theta)\cos^2(\varphi)\sin^2(\varphi)\\
&= \cos^2(\varphi)\big(a^2b^2\sin^2(\varphi)+c^2a^2\sin^2(\theta)\cos^2(\varphi)+c^2b^2\cos^2(\theta)\cos^2(\varphi)\big)\\
&= \frac{a^2b^2c^2}{h(\theta,\varphi)^2}\cos^2(\varphi).
\end{aligned}$$

(e) On voit bien que

$$\begin{aligned}
&\mathsf{S}^{-1}_{\psi(\theta,\varphi)}=\mathsf{II}^{-1}_{\psi(\theta,\varphi)}\,\mathsf{I}_{\psi(\theta,\varphi)}\\
&=h^{-1}\begin{pmatrix} a^2\sin^2(\theta)+b^2\cos^2(\theta) & (a^2-b^2)\cos(\theta)\sin(\theta)\tan(\varphi)\\ (a^2-b^2)\cos(\theta)\sin(\theta)\cos(\varphi)\sin(\varphi) & a^2\cos^2(\theta)\sin^2(\varphi)+b^2\sin^2(\theta)\sin^2(\varphi)+c^2\cos^2(\varphi)\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

En outre, on a

$$\begin{aligned} K\big(\psi(\theta,\varphi)\big) &= \det\big(\mathsf{S}_{\psi(\theta,\varphi)}\big) = \det\big(\mathsf{I}^{-1}_{\psi(\theta,\varphi)}\big)\det\big(\mathsf{II}_{\psi(\theta,\varphi)}\big) \\ &= \frac{h(\theta,\varphi)^2}{a^2b^2c^2\cos^2(\varphi)}h(\theta,\varphi)^2\cos^2(\varphi) = \frac{h(\theta,\varphi)^4}{a^2b^2c^2}. \end{aligned}$$

($f$) On remarque d'abord qu'un point $p \in \Sigma$ est ombilic si et seulement si l'opérateur de Weingarten $\mathsf{S}_p$ est un multiple de la matrice identité. Soit $p = \psi(\theta,\varphi)$. Si $\sin(\varphi) = 0$ la matrice $\mathsf{S}_p^{-1}$ est diagonale, ce qui nous dit que, si $p$ est un point ombilic, alors $a > b > c$ nous dit que

$$c^2 = a^2\sin^2(\theta) + b^2\cos^2(\theta) > c^2\sin^2(\theta) + c^2\cos^2(\theta) = c^2,$$

ce qui est impossible. On suppose désormais $\sin(\varphi) \neq 0$. Comme $\varphi \in \,]-\pi/2,\pi/2[$ , on a $\cos(\varphi) \neq 0$. En conséquence, si $p$ est un point ombilic, $\sin(\theta) = 0$ ou $\cos(\theta) = 0$, car $\mathsf{S}_p$ est une matrice diagonale dans ce cas . Si $\cos(\theta) = 0$, alors $a > b > c$ nous dit que

$$a^2 = b^2\sin^2(\varphi) + c^2\cos^2(\varphi) < a^2\sin^2(\theta) + a^2\cos^2(\theta) = a^2,$$

ce qui est impossible. On suppose alors $\sin(\theta) = 0$, *i.e.* que les éventuels points ombilics sont situés dans le plan $xz$. Puis, on doit avoir $a^2\sin^2(\varphi) + c^2\cos^2(\varphi) = b^2$, *i.e.*

$$\sin^2(\varphi) = \frac{b^2-c^2}{a^2-c^2} \text{ et/ou} \cos^2(\varphi) = \frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}.$$

L'équation précédente admet deux solutions $\pm\varphi_0$. En conséquence, on trouve les 4 points ombilics $\psi(\pm\varphi_0, 0)$ et $\psi(\pm\varphi_0, \pi)$, *i.e.*

$$\left(\pm a\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}, 0, \pm c\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}\right).$$

Pour être complet, il faudrait vérifier que les points $(0,0,\pm c)$ ne sont pas ombilics par un autre argument puisque ces points ne sont pas couverts par le paramétrage $\psi$. En ces points on peut voir $\Sigma$ comme un graphe $z = \psi'(x,y)$ et en $(0,0,c)$, on a

$$\psi'(x,y) = \pm c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}} = \pm\left(c-\frac{x^2}{2a^2}-\frac{y^2}{2b^2}\right) + o(\|x,y\|^2).$$

Comme $a < b$, ces points ne sont pas ombilics.

($g$) Si $\lambda < c^2$, il s'agit d'un ellipsoïde ; si $c^2 < \lambda < b^2$, c'est un hyperboloïde à une nappe ; si $b^2 < \lambda < a^2$, c'est un hyperboloïde à deux nappes ; et si $a^2 < \lambda$ c'est l'ensemble vide.

($h$) Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ fixé. On considère la fonction

$$f(t) = x^2(b^1-t)(c^2-t) + y^2(a^2-t)(c^2-t) + z^2(a^2-t)(b^2-t) - (a^2-t)(b^2-t)(c^2-t).$$

Il s'agit d'un polynôme de degré 3, ce qui nous dit qu'il s'annule une fois ou trois fois. On a

$$f(c^2) = z^2(a^2-c^2)(b^2-c^2), f(b^2) = y^2(a^2-b^2)(c^2-b^2) \text{ et } f(a^2) = x^2(b^2-a^2)(c^2-a^2).$$

Si $x \neq 0$, $y \neq 0$ et $z \neq 0$, alors d'après les signes aux points ci-dessus, on en déduit le résultat.

Réciproquement, si $(u,v,w)$ sont fixés, alors $(x^2,y^2,z^2)$ sont solutions d'un système linéaire. On trouve dans ce cas

$$x^2 = \frac{(a^2-u)(a^2-v)(a^2-w)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)},$$
$$y^2 = \frac{(b^2-u)(b^2-v)(b^2-w)}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)},$$
$$z^2 = \frac{(c^2-u)(c^2-v)(c^2-w)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)},$$

ce qui donne huits solutions

$$x = \pm\sqrt{\frac{(a^2-u)(a^2-v)(a^2-w)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}},$$
$$y = \pm\sqrt{\frac{(b^2-u)(b^2-v)(b^2-w)}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)}},$$
$$z = \pm\sqrt{\frac{(c^2-u)(c^2-v)(c^2-w)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}}.$$

(*i*) On le vérifie pour les deux premières, les calculs sont similaires pour les deux autres paires. Les vecteurs normaux (pas forcément unitaires) sont respectivement :

$$\left(\frac{x}{a^2-u}, \frac{y}{b^2-u}, \frac{z}{c^2-u}\right), \quad \left(\frac{x}{a^2-v}, \frac{y}{b^2-v}, \frac{z}{c^2-v}\right).$$

Leur produit scalaire est :

$$\frac{x^2}{(a^2-u)(a^2-v)} + \frac{y^2}{(b^2-u)(b^2-v)} + \frac{z^2}{(c^2-u)(c^2-v)}.$$

Or en soustrayant les deux équations, on obtient

$$(u-v)\left(\frac{x^2}{(a^2-u)(a^2-v)} + \frac{y^2}{(b^2-u)(b^2-v)} + \frac{z^2}{(c^2-u)(c^2-v)}\right) = 0,$$

d'où le résultat puisque $u < v$.

(*j*) On peut utiliser les formules de l'item (h) et considérer le paramétrage local

$$g(v,w) = \left(a\sqrt{\frac{(a^2-v)(a^2-w)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}}, b\sqrt{\frac{(b^2-v)(b^2-w)}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)}}, c\sqrt{\frac{(c^2-v)(c^2-w)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}}\right).$$

On obtient les autres cartes en ajoutant des signes $\pm$.

Comme on sait déjà que les trois familles de surfaces sont orthogonales deux à deux, les vecteurs $g_v$ et $g_w$ son orthogonaux. Pour voir que l'opérateur de Weingarten est diagonal dans la base $(g_v, g_w)$, c'est-à-dire précisément ce qu'on veut montrer, il suffit de voir que la seconde forme fondamentale est aussi diagonale. Il suffit donc de montrer que $\langle g_{vw}, n\rangle = 0$.

On voit bien que

$$g_{vw} = \Big(\frac{a}{4}\Big(\frac{1}{(a^2-v)(a^2-w)(a^2-b^2)(a^2-c^2)}\Big)^{1/2},$$
$$\frac{b}{4}\Big(\frac{1}{(b^2-v)(b^2-w)(b^2-a^2)(b^2-c^2)}\Big)^{1/2},$$
$$\frac{c}{4}\Big(\frac{1}{(c^2-v)(c^2-w)(c^2-b^2)(c^2-a^2)}\Big)^{1/2}\Big).$$

En conséquence,

$$n = \left( \frac{1}{a}\sqrt{\frac{(a^2-v)(a^2-w)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}}, \frac{1}{b}\sqrt{\frac{(b^2-v)(b^2-w)}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)}}, \frac{1}{c}\sqrt{\frac{(c^2-v)(c^2-w)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}} \right)$$

et

$$4\langle n, g_{vw}\rangle = \frac{(b^2-c^2)-(a^2-c^2)+(a^2-b^2)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)(b^2-c^2)} = 0,$$

d'où le résultat.

Un théorème de Dupin affirme que c'est le cas dans tout système triple orthogonal : les familles de surfaces s'intersectent deux à deux suivant leurs lignes de courbure ! Tous ces calculs en image sur http://images.math.cnrs.fr/Un-systeme-triple-orthogonal.