MAT4213 - Géométrie différentielle
Deuxième semestre — 2020-2021

Fiche 5: Géométrie des surfaces de $\mathbb{R}^3$

1. *Quelques surfaces.* On considère les surfaces suivantes Σ de $\mathbb{R}^3$:

(a) une sphère de rayon $R > 0$,

(b) un cylindre de révolution de rayon $R > 0$,

(c) un paraboloïde hyperbolique d'équation $z = x^2 - y^2$,

(d) un hyperboloïde à une nappe d'équation $z^2 = x^2 + y^2 - 1$,

(e) un tore de révolution obtenu en faisant tourner un cercle de rayon 1 et de centre $(2, 0)$ dans le plan (x, z) autour de l'axe z.

Calculer les formes fondamentales I, II, l'opérateur de Weingarten S, les courbures principales, moyenne et de Gauss, et déterminer les points ombilics.

2. *Graphe et équation implicite.*

(a) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 avec $f(0,0) = 0$ et $df(0,0) = 0$. Comparer la différentielle seconde de f en $(0,0)$ avec la seconde forme fondamentale du graphe de f au point $(0,0,0)$.

(b) Soit $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et $p = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ un point tel que $F(p) = 0$ et $dF(p) \neq 0$. Montrer que la seconde forme fondamentale de la surface $\Sigma = F^{-1}(0)$ au point p est donnée par

$$\mathsf{II}_p = -\frac{1}{\|\mathsf{grad}_p F\|} d_p^2 F.$$

3. *Pseudosphère.* On considère l'application $\psi : \mathbb{R}_{<0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ donnée par

$$\psi(s, \theta) = \left(e^s \cos(\theta), e^s \sin(\theta), \int_0^s \sqrt{1 - e^{2t}}\, dt \right),$$

pour $(s, \theta) \in \mathbb{R}^2$ et soit $\Sigma = \mathsf{Img}(\psi)$.

(a) Montrer que Σ est une surface,

(b) Dessiner la surface et montrer que sa courbure de Gauss est constante égale à -1.

4. Soit $r > 0$ et le cylindre de révolution $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = r^2\}$.

(a) Donner une condition nécessaire et suffisante sur la fonction $z : J \to \mathbb{R}$ pour que la courbe $\alpha : J \to \mathbb{R}^3$ donnée par

$$\alpha(t) = \big(r \cos(t), r \sin(t), z(t) \big)$$

soit une géodésique, où $J \subseteq \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert.

(b) Déterminer toutes les géodésiques sur Σ.

(c) Calculer la distance entre les points $(r, 0, 0)$ et $(0, r, 1)$ de Σ.

5. Soit $\alpha \in]0, \pi/2[$ et le cône

$$\Sigma_\alpha = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_{>0} : x^2 + y^2 = z^2 \tan^2(\alpha)\}.$$

(a) Soit $\Sigma'_\alpha = \Sigma_\alpha \setminus \{(x\tan(\alpha), 0, x) : x \in \mathbb{R}_{>0}\}$. On définit l'application

$$f : \Sigma'_\alpha \to \mathbb{R}^2$$

de la façon suivante. On considère

$$\hat{\Sigma}_\alpha = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_{\geq 0} : x^2 + y^2 \leq z^2 \tan^2(\alpha)\}.$$

et la rotation

$$R = \begin{pmatrix} \sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos(\alpha) & 0 & \sin(\alpha) \end{pmatrix}.$$

On dit que $L = \{\lambda(\cos(\alpha), 0, \sin(\alpha)) : \lambda \in \mathbb{R}_{>0}\}$ est **l'axe central du cône** $\hat{\Sigma}_\alpha$. Étant donné $p \in \Sigma'_\alpha$, on fait rouler $R(\hat{\Sigma}_\alpha)$ sans glisser sur le plan $z = 0$, de sorte que l'axe central du cône tourne autour de l'axe z en sens antihoraire jusqu'à ce que $R(p)$ touche le plan $z = 0$ en un point (x, y). On pose $f(p) = (x, y)$. Montrer que

$$f\big(r\cos(\theta), r\sin(\theta), r/\tan(\alpha)\big) = \left(\frac{r\cos\big(\theta\sin(\alpha)\big)}{\sin(\alpha)}, \frac{r\sin\big(\theta\sin(\alpha)\big)}{\sin(\alpha)}\right),$$

pour tout $r > 0$ et $\theta \in]0, 2\pi[$. En déduire que f est de classe C^∞.

(b) Montrer que l'application ci-dessus est une isométrie.

(c) Montrer que les géodésiques sur Σ_α sont les courbes dont l'image dans le plan est une droite.

(d) Calculer la distance entre les points $p = (\tan(\alpha), 0, 1)$ et $q = (0, 2\tan(\alpha), 2)$ sur Σ_α.

6. On considère la sphère unité Σ de $\mathbb{R}^3$ et un plan affine P.

(a) Calculer la courbure géodésique de $P \cap \Sigma$.

(b) A quelle condition sur P la courbure géodésique de $P \cap \Sigma$ est-elle nulle ?

7. Soit $J \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et $\alpha : J \to \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$ une courbe de classe C^∞ paramétrée par longueur d'arc, que l'on écrira $\alpha(s) = (f(s), g(s))$, pour $s \in J$. On considère l'application $\psi : \mathbb{R} \times J \to \mathbb{R}^3$ de la forme

$$\psi(u,v) = \big(f(v)\cos(u), f(v)\sin(u), g(v)\big),$$

et $\Sigma = \mathrm{Img}(\psi)$.

(a) Un **méridien** de ψ est une courbe $\psi_u : J \to \Sigma$ de la forme $\psi_u(v) = \psi(u,v)$, avec $u \in \mathbb{R}$ fixé. Montrer que ψ_u est une géodésique de Σ pour tout $u \in \mathbb{R}$.

(b) Un **parallèle** de ψ est une courbe $\psi_v : \mathbb{R} \to \Sigma$ de la forme $\psi_v(u) = \psi(u,v)$, avec $v \in J$ fixé. À quelle condition sur v la courbe ψ_v est-elle une géodésique de Σ ?

(c) Soit $\gamma : J' \to \Sigma$ une géodésique de Σ. Soient $r, \theta : J' \to \mathbb{R}$ les applications telles que $r(t)$ soit la distance $\gamma(t)$ à l'axe z, et $\theta(t)$ soit l'angle entre $\gamma'(t)$ et le parallèle passant par $\gamma(t)$, pour tout $t \in J'$. Montrer que l'application $t \mapsto r(t)\cos(\theta(t))$, appelée l'**invariant de Clairaut**, est constante sur J'.

8. *Ellipsoïde et système triple orthogonal.* Soient $a, b, c \in \mathbb{R}_{>0}$ tels que $c \leq b \leq a$ et

$$\Sigma = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}.$$

(a) Que dire des cas où $c < b = a$, $c = b < a$ et $c = b = a$?

(b) On suppose désormais que $c < b < a$. Montrer que Σ est l'image de la sphère unité par la transformation $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donnée par $F(x, y, z) = (ax, by, cz)$. En déduire un paramétrage f de Σ par coordonnées “sphériques"

$$(\theta, \varphi) \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\times \left] 0, 2\pi \right[.$$

(c) Pour un point $(x, y, z) \in \Sigma$, calculer la distance h entre l'origine et le plan affine tangent à Σ en (x, y, z). Exprimer cette quantité en fonction de θ et φ.

(d) Donner les matrices de I, II dans la base $\{f_\theta, f_\varphi\}$.

(e) En déduire la matrice de S^{-1} puis la formule suivante pour la courbure de Gauss

$$K = \frac{h^4}{a^2 b^2 c^2}.$$

(f) Déterminer les points ombilics de Σ.

(g) Nommer la surface d'équation

$$\frac{x^2}{a^2 - \lambda} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda} + \frac{z^2}{c^2 - \lambda} = 1$$

en fonction de la valeur de λ.

(h) Montrer que pour (presque) tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}\}$, il existe un unique triplet (u, v, w) tel que $u < c^2 < v < b^2 < w < a^2$ et

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{a^2 - u} + \frac{y^2}{b^2 - u} + \frac{z^2}{c^2 - u} &= 1, \\
\frac{x^2}{a^2 - v} + \frac{y^2}{b^2 - v} - \frac{z^2}{v - c^2} &= 1, \\
\frac{x^2}{a^2 - w} - \frac{y^2}{w - b^2} - \frac{z^2}{w - c^2} &= 1.
\end{aligned}$$

Réciproquement donner une formule pour (x, y, z) en fonction de (u, v, w).

(i) Montrer que les trois surfaces définies par les équations ci-dessus s'intersectent deux à deux orthogonalement. On dit que ces familles de surfaces forment un **système triple orthogonal**.

(j) On fixe ici $u = 0$, montrer que les coordonnées restantes (v, w) définissent les lignes de courbure sur l'ellipsoïde Σ.