
MAT4213 - Géométrie différentielle

Deuxième semestre — 2020-2021

Fiche 4: Variétés abstraites

---

1. *Tore.* Soit T^2 le quotient du plan $\mathbb{R}^2$ par la relation d'équivalence donnée par $(u,v) \sim (u',v')$ si et seulement si $(u-u', v-v') \in \mathbb{Z}^2$.

(a) Donner un atlas pour T^2.

(b) Montrer que les formes différentielles du et dv sont bien définies sur T^2. Sont-elles fermées ? exactes ?

(c) Donner un difféomorphisme entre T^2 et la surface

$$\Sigma = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \left(\sqrt{x^2+y^2} - 2 \right)^2 + z^2 = 1 \right\}.$$

Solution.

(a) On suppose que T^2 est muni de la topologie quotient, *i.e.* $U \subseteq T^2$ est ouvert si et seulement si $\pi^{-1}(U)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, où $\pi : \mathbb{R}^2 \to T^2$ est la projection canonique. Si l'on dénote $\tau_{(a,b)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la translation $\tau_{(a,b)}(x,y) = (x+a, y+b)$, on conclut que $\pi^{-1}(\pi(U)) = \cup_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} \tau_{(n,m)}(U)$, pour tout $U \subseteq \mathbb{R}^2$, ce qui implique que π est une application ouverte. Comme π est ouverte et la relation d'équivalence définissant T^2 est un fermé de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, T^2 est Hausdorff.

Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, soit $U'_{(a,b)} = \,]\,a-1/2, a+1/2\,[\, \times \,]\,b-1/2, b+1/2\,[\, \subseteq \mathbb{R}^2$. Soit $\psi_{(a,b)} : U'_{(a,b)} \to T^2$ la restriction de la projection canonique $\pi : \mathbb{R}^2 \to T^2$. On voit bien que $\psi_{(a,b)}$ est continue, injectif et son image $U_{(a,b)} \subseteq T^2$ est un ouvert de T^2. En plus, $\psi_{(a,b)}$ est un homéomorphisme avec son image, vu que π est une application ouverte. Soit $\phi_{(a,b)} : U_{(a,b)} \to U'_{(a,b)}$ l'application réciproque de $\psi_{(a,b)} : U'_{(a,b)} \to U_{(a,b)}$. Alors $(U_{(a,b)}, \phi_{(a,b)})$ est une carte de T^2. En outre, on voit bien que

$$T^2 = U_{(0,0)} \cup U_{(0,1/2)} \cup U_{(1/2,0)} \cup U_{(1/2,1/2)}.$$

On note finalement que

$$\phi_{(a,b)} \circ \phi^{-1}_{(a',b')} : \phi_{(a',b')}(U_{(a,b)} \cap U_{(a',b')}) \to \phi_{(a,b)}(U_{(a,b)} \cap U_{(a',b')})$$

est une application de classe C^∞, pour tous $a, b \in \{0, 1/2\}$. On vérifiera ce résultat pour $(a',b') = (0,0)$ et $(a,b) = (1/2,0)$, et on laisse les autres à la lectrice/au lecteur. Dans ce cas

$$\phi_{(0,0)}(U_{(a,b)} \cap U_{(a',b')}) = \,]\,0, +1/2\,[\, \times \,]\,-1/2, +1/2\,[\, \sqcup \,]\,-1/2, 0\,[\, \times \,]\,-1/2, +1/2\,[\tag{1}$$

et

$$\phi_{(1/2,0)}(U_{(a,b)} \cap U_{(a',b')}) = \,]\,0, +1/2\,[\, \times \,]\,-1/2, +1/2\,[\, \sqcup \,]\,1/2, 1\,[\, \times \,]\,-1/2, +1/2\,[\,.$$

En outre, $\phi_{(1/2,0)} \circ \phi^{-1}_{(0,0)}(x) = x$ pour tout x dans le premier ouvert dans le membre de droite de (1) et $\phi_{(1/2,0)} \circ \phi^{-1}_{(0,0)}(x) = x + (1,0)$ pour tout x dans le deuxième ouvert dans le membre de droite de (1). Cela implique que $\{(U_{(a,b)}, \phi_{(a,b)}) : a, b \in \{0, 1/2\}\}$ est un atlas de classe C^∞ de T^2.

(b) On remarque d'abord que la projection canonique $\pi : \mathbb{R}^2 \to T^2$ induit un isomorphisme $T_{(x,y)}\mathbb{R}^2 \to T_{\pi(x,y)}T^2$, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Finalement, on voit bien que les formes différentielles $\theta_u, \theta_v \in \Omega^1(T^2)$ données par

$$\theta_u(\pi(x,y))(a,b) = a \text{ et } \theta_v(\pi(x,y))(a,b) = b$$

sont bien définies. Noter en particulier que $\pi^*\theta_u = du$ et $\pi^*\theta_v = dv$. C'est pour cela que l'on écrit parfois aussi du et dv, au lieu de θ_u et θ_v.

Comme la projection canonique $\pi : \mathbb{R}^2 \to T^2$ est un difféomorphisme local autour de tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, il est ouvert. En plus, cela nous dit que, étant donné un point $\pi(x,y) \in T^2$, il existe un ouvert $U \subseteq \mathbb{R}^2$ tel que $(x,y) \in U'$ et $\pi^* : \Omega^1(\pi(U')) \to \Omega^1(U')$ est un isomorphisme. Comme le pull-back commute avec la différentielle on conclut que

$$\pi^*(d\theta_u) = d(\pi^*\theta_u) = d(du) = 0 \text{ et } \pi^*(d\theta_v) = d(\pi^*\theta_v) = d(dv) = 0,$$

i.e. les formes θ_u et θ_v sont fermées.

On remarque par contre que les formes θ_u et θ_v ne sont pas exactes. On donnera la preuve pour θ_u, car le cas de θ_v est analogue. S'il existe une application $f : T^2 \to \mathbb{R}$ telle que $df = \theta_u$, alors

$$du = \pi^*\theta_u = \pi^*(df) = d(\pi^* f) = d(f \circ \pi),$$

i.e. il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que $f \circ \pi = u + C$. Or, la fonction $f \circ \pi$ est périodique de période entier mais $u + C$ ne l'est pas. Cette absurdité nous dit que θ_u n'est pas exacte.

(c) On définit l'application $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ via

$$\varphi(\theta,\phi) = \Big(\cos(\theta)\big(2+\cos(\phi)\big), \sin(\theta)\big(2+\cos(\phi)\big), \sin(\phi)\Big).$$

C'est clair que φ est de classe C^∞ et que $\mathsf{Img}(\varphi) = \Sigma$. En plus, $\varphi(\theta,\phi) = \varphi(\theta',\phi')$ si et seulement si $(\theta-\theta', \phi-\phi') \in \mathbb{Z}^2$, ce qui implique que φ induit une application bijective $\bar{\varphi} : T^2 \to \Sigma$ de classe C^∞ dont la dérivée est injective. Comme $\bar{\varphi}$ est un difféomorphisme local, cela implique que $\bar{\varphi}$ est un difféomorphisme.

2. *Structure de variété.* On rappelle que deux atlas sur un ensemble sont **compatibles** si leur union est encore un atlas.

(a) Montrer que le graphe M de $x \mapsto |x|$ n'est pas une sous-variété de classe C^1 de $\mathbb{R}^2$.

(b) Donner à M une structure de variété de classe C^∞ compatible avec la topologie telle que M soit difféomorphe à $\mathbb{R}$.

(c) Soit M un ensemble muni de deux atlas $\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{A}_2$ tels que pour toute fonction $f : M \to \mathbb{R}$, f est de classe C^∞ pour $\mathscr{A}_1$ si et seulement si elle l'est pour $\mathscr{A}_2$. Montrer que les atlas $\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{A}_2$ sont compatibles.

Solution.

(a) On suppose que $M = \{(x,|x|) : x \in \mathbb{R}\}$ est une sous-variété de classe C^1 de $\mathbb{R}^2$. En conséquence, comme $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2} \in M$, il existe une courbe $\alpha : J \to \mathbb{R}^2$ de classe C^1, où J un intervalle ouvert incluant 0, $\mathsf{Img}(\alpha) \subseteq M$, $\alpha(0) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}$ et $\alpha'(0) \neq \mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}$. On écrira

$\alpha(t) = (x(t), y(t))$ pour $t \in J$. Noter que $y(t) = |x(t)|$. Si $y'(0) \neq 0$, alors il existe $t \in J$ tel que $y(t) < t(0) = 0$, ce qui est absurde. On suppose désormais $y'(t) = 0$. Or,

$$|x'(0)| = \left|\lim_{t\to 0}\frac{x(t)-x(0)}{t}\right| = \lim_{t\to 0}\frac{|x(t)|}{|t|} = \left|\lim_{t\to 0}\frac{y(t)}{t}\right| = |y'(0)| = 0.$$

On trouve alors un absurde, ce qui implique que M n'est pas une sous-variété de classe C^1.

(b) L'application $f : \mathbb{R} \to M$ donnée par $x \mapsto (x, |x|)$ est un homéomorphisme avec son image, vu que l'application réciproque est la restriction à M de la projection canonique $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sur la première coordonnée. Par transport de structures, on peut alors définir une structure de variété C^∞ sur M via l'atlas donné par la carte (M, f^{-1}). Dans ce cas, f est un difféomorphisme.

(c) Il suffit de montrer que, étant donné une carte (U,ϕ) de $\mathscr{A}_1$, avec $\phi : U \to \mathbb{R}^n$, et une carte (V,ψ) de $\mathscr{A}_2$, avec $\psi : V \to \mathbb{R}^n$, telles que $U \cap V \neq \emptyset$, l'application

$$F = \psi\circ\phi^{-1} : \phi(U\cap V) \to \psi(U\cap V)$$

est de classe C^∞. On remarque que $\psi(U\cap V)$ et $\phi(U\cap V)$ sont des ouverts de $\mathbb{R}^n$, car $U\cap V$ est un ouvert de M et ϕ et ψ sont des homéomorphismes avec leurs images.

Soit $p \in U\cap V$. Étant donné $i \in [\![1,n]\!]$, soit g_i la composée de ψ avec la projection $\pi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sur la i-ème coordonnée. Par hypothèse, $g_i : V \to \mathbb{R}$ est de classe C^∞ pour l'atlas $\mathscr{A}_2$. En conséquence, il existe un voisinage ouvert $V' \subseteq U\cap V$ de p tel que $(g_i)|_{V'} : V' \to \mathbb{R}^n$ admette une extension $f_i : M \to \mathbb{R}^n$ de classe C^∞ pour l'atlas $\mathscr{A}_2$, *i.e.* $(f_i)|_{V'} = (g_i)|_{V'}$. D'après l'hypothèse dans l'énoncé, f_i est de classe C^∞ pour l'atlas $\mathscr{A}_1$, *i.e.* $f_i\circ\phi^{-1} : \phi(U) \to \mathbb{R}$ est de classe C^∞. En conséquence, $\pi_i\circ F|_{V'} = f_i\circ\phi^{-1}|_{V'} : \phi(V') \to \mathbb{R}$ est de classe C^∞ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, ce qui nous dit que $F|_{V'}$ est de classe C^∞. Par conséquent, F est de classe C^∞, comme on voulait démontrer.

3. *Fibré tangent.* Soit S^n la sphère unité de $\mathbb{R}^{n+1}$.

(a) Montrer que le fibré tangent de S^n est la sous-variété de $\mathbb{R}^{2n+2}$ donnée par

$$T = \big\{(x,y) : x,y \in \mathbb{R}^{n+1}, \langle x,x\rangle = 1, \langle x,y\rangle = 0\big\},$$

où $\langle\,,\rangle$ dénote le produit scalaire euclidien.

(b) Construire un champ de vecteurs partout non nul sur S^{2m-1} avec $m \geq 1$.

(c) Existe-t-il un tel champ de vecteurs sur S^2 ?

(d) Construire un champ de vecteurs sur S^2 qui s'annule en un seul point.

Solution.

(a) On remarque d'abord que T est une sous-variété de classe C^∞ de dimension $2n$ dans $\mathbb{R}^{2n+2}$. En effet, on considère l'application $\phi : \mathbb{R}^{2n+2} \to \mathbb{R}^2$ donnée par $\phi(x,y) = (\langle x,x\rangle, \langle x,y\rangle)$ pour tous $x,y \in \mathbb{R}^{n+1}$. C'est clair que ϕ est de classe C^∞, $T = \phi^{-1}(\{(1,0)\})$ et ϕ a une différentielle de rang 2 en chaque point de T, car la matrice de $d\phi$ est

$$\begin{pmatrix} 2x & 0 \\ y & x \end{pmatrix},$$

et en chaque point $x \in S^n$, au moins une des coordonnées x_i est non nulle et la sous-matrice

$$\begin{pmatrix} 2x_i & 0 \\ y_i & x_i \end{pmatrix}$$

est de rang 2.

On voit bien que l'inclusion $i : S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ induit une application bijective

$$di : TS^n \to \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$$

de classe C^∞. L'image de di est précisément T. En effet, $di(x) : T_xS^n \to \{x\} \times \mathbb{R}^{n+1}$ est injectif pour tout $x \in S^n$, avec image exactement $\{y \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle x, y \rangle = 0\}$. Comme di est un difféomorphisme local, ce qui suit de calculer sa différentielle, on conclut que di est un difféomorphisme.

(b) On considère les coordonnées $(x_1, y_1, \dots, x_m, y_m) \in \mathbb{R}^{2m}$. On considère le champ de vecteurs

$$X = \sum_{i=1}^{m} y_i \frac{\partial}{\partial x_i} - x_i \frac{\partial}{\partial y_i}$$

de $\mathbb{R}^{2m}$. Noter que $X(p) \neq \mathbf{0}_{\mathbb{R}^{2m}}$ pour tout $p \neq \mathbf{0}_{\mathbb{R}^{2m}}$. C'est clair que $X(p) \in T_pS^{2m-1}$ pour tout $p \in S^{2m-1}$, ce qui implique que X définit un champ de vecteurs partout non nul sur S^{2m-1}.

(c) Non, d'après le théorème de la boule chevelue ce n'est pas possible.

(d) On rappelle d'abord les difféomorphismes donnés par les projections stéréographiques $\phi_\pm : S^2 \setminus \{n_\pm\} \to \mathbb{R}^2$ définies via

$$\phi_\pm(x, y, z) = \left(\frac{x}{1 \mp z}, \frac{y}{1 \mp z} \right),$$

où $n_\pm = (0, 0, \pm 1)$. Les réciproques sont

$$\psi_\pm(p) = \left(\frac{2p}{\|p\|^2 + 1}, \pm \frac{\|p\|^2 - 1}{\|p\|^2 + 1} \right),$$

pour tout $p \in \mathbb{R}^2$. En particulier, on voit bien que

$$(\phi_+ \circ \psi_-)(p) = \frac{p}{\|p\|^2},$$

pour tout $p \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}\}$,, donne une application $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}\}$ de classe C^∞ telle que $F^{-1} = F$.

On considère le champ de vecteurs Y sur $\mathbb{R}^2$ de la forme $Y = \partial/\partial x$. On définit

$$X(x, y, z) = \begin{cases} d\psi_+ \circ Y \circ \phi_+(x, y, z), & \text{si } (x, y, z) \in S^2 \setminus \{n_+\}, \\ \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}, & \text{si } (x, y, z) = (0, 0, 1). \end{cases}$$

C'est clair que X est un champ de vecteurs sur S^2, *i.e.* $X(x, y, z) \in T_{(x,y,z)}S^2$, pour tout $(x, y, z) \in S^2$. En plus, $X|_{S^2 \setminus \{n_+\}} = d\psi_+ \circ Y \circ \phi_+$ est évidemment de classe C^∞. On note aussi que $X(x, y, z) \neq \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}$ pour tout $(x, y, z) \in S^2 \setminus \{n_+\}$, vu que $Y(p) \neq \mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}$ pour tout $p \in \mathbb{R}^2$ et ϕ_+ est un difféomorphisme. Il suffit de montrer que X est de classe C^∞ en n_+. Pour cela, il suffit de montrer que le champ de vecteurs $Z = d\phi_- \circ X \circ \psi_-$ sur $\mathbb{R}^2$ est de classe C^∞. Or, par définition

$$Z(x, y) = \begin{cases} dF \circ Y \circ F(x, y), & \text{si } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \\ \mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}, & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

De façon explicite,

$$Z(x,y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\frac{\partial}{\partial y}$$

pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. On vérifie bien Z est bien C^∞, car les composantes le sont.

4. *Submersion et orientabilité.* Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une submersion.

(a) Montrer qu'il existe un champ de vecteur $X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tel que $df(X) = 1$.

(b) Montrer que la $(n-1)$-forme α sur $\mathbb{R}^n$ définie par

$$\alpha_x(v_2,\dots,v_n) = \det\big(X(x), v_2, \dots, v_n\big),$$

pour tous $x, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$, est partout non nulle sur chaque hypersurface $\Sigma_a = f^{-1}(a)$. En déduire que ces hypersurfaces sont orientables.

(c) Généraliser au cas où $f : M \to N$ est une submersion et M est orientable.

Solution.

(a) On considère d'abord le champ de vecteurs gradient

$$\nabla f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}$$

Alors, $df(\nabla f) = \|\nabla f\|^2$ est une fonction C^∞ qui ne s'annule nulle part puisque f est une submersion, ce qui nous dit que la différentielle est partout non nulle. On pose finalement

$$X = \frac{1}{\|\nabla f\|^2}\nabla f.$$

(b) On remarque d'abord que, étant donné $a \in \mathbb{R}$, la partie $\Sigma_a = f^{-1}(\{a\})$ de $\mathbb{R}^n$ est une sous-variété de dimension $n-1$, *i.e.* une **hypersurface**, car f est une submersion. Étant donné $x \in \Sigma_a \subseteq \mathbb{R}^n$, on voit bien que $\mathbb{R}^n = T_x\mathbb{R}^n = T_x\Sigma_a \oplus \mathbb{R}.X(x)$, puisque $T_x\Sigma_a = \mathrm{Ker}(df(x))$ et $df(X(x)) = 1$. Si l'on prend une base $(v_2,\dots,v_n)$ de $T_x\Sigma_a$, alors $(X(x), v_2, \dots, v_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$ et $\alpha_x(v_2,\dots,v_n) = \det(X(x), v_1, \dots, v_n) \neq 0$. En conséquence, α est partout non nulle sur l'espace tangent à Σ_a et, en particulier, Σ_a est orientable.

(c) On suppose que M est une variété orientable de dimension m et N est une variété de dimension n. Comme M est orientable, on peut choisir une forme volume ω sur M, *i.e.* une forme différentielle $\omega \in \Omega^m(M)$ telle que $\omega_x \neq 0$ pour tout $x \in M$. Étant donné $a \in N$, on choisit une base $(X_1,\dots,X_n)$ de T_aN. Soit $\Sigma_a = f^{-1}(a)$. C'est une sous-variété de M de dimension $m-n$ d'après le critère des submersions. De plus, en chaque point p de Σ_a, $d_pf : T_pM \to T_aN$ est une surjection dont le noyau est $T_p\Sigma_a$. On peut alors trouver des champs de vecteurs $(\tilde{X}_1,\dots,\tilde{X}_n)$ le long de Σ_a dont l'image par d_pf coïncide avec $(X_1,\dots,X_n)$ pour chaque $p \in \Sigma_a$. On définit alors la forme différentielle α sur la sous-variété $f^{-1}(\{a\})$ de la façon suivante. Pour tout $p \in \Sigma_a$ et $(v_{n+1},\dots,v_m) \in T_p\Sigma_a$, on pose

$$\alpha_p(v_{n+1},\dots,v_m) = \omega_p(\tilde{X}_1,\dots,\tilde{X}_n, v_{n+1},\dots,v_m).$$

On vérifie de même que α est partout non nulle sur l'espace tangent à $f^{-1}(\{a\})$.

En fait, la forme α ci-dessus ne dépend pas du choix des relevés $\tilde{X}_i$. En effet, si $\hat{X}_i$ est un autre relevé de X_i, alors $\tilde{X}_i - \hat{X}_i$ est tangent à Σ_a et donc $(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_i - \hat{X}_i, \dots, \tilde{X}_n, v_{n+1}, \dots, v_m)$ est une famille liée, *i.e.*

$$\omega_x(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_i - X_i', \dots, \tilde{X}_n, v_{n+1}, \dots, v_m) = 0.$$

5. *Immersion injective.* On rappelle qu'une application continue entre espaces métrisables $f : X \to Y$ est **propre** si l'image réciproque par f de tout compact est compact.

(a) Montrer qu'une immersion injective propre $f : M \to N$ est un plongement.

(b) Montrer que l'application $f : \mathbb{R}_{<1} \to \mathbb{R}^2$ donnée par

$$f(t) = \left(\frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}, \frac{t(t^2 - 1)}{t^2 + 1} \right)$$

est une immersion injective. Est-ce un plongement ?

Solution.

(a) On rappelle qu'un plongement est par définition une immersion qui est un homéomorphisme sur son image. Si une immersion $f : M \to N$ est injective, elle donne un plongement si et seulement si sa réciproque $f^{-1} : f(M) \to M$ est continue. On suppose que f est une immersion injective et propre. Il suffit de montrer que l'application $f : M \to f(M)$ est fermée, *i.e.* $f(F)$ est fermé dans $f(M)$, pour tout fermé $F \subseteq M$. Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de F telle que $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $y \in f(M)$, on va montrer que $y \in f(F)$. Prenons un voisinage compact K de y dans N (*e.g.* K est l'image réciproque d'une boule fermée centrée en $\phi(y)$ dans l'image de ϕ pour (U, ϕ) une carte incluant y). Comme f est propre, $f^{-1}(K)$ est compact, et comme f est continue et $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers y, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \in f^{-1}(K)$ pour tout $n \geq n_0$. Comme $f^{-1}(K)$ est compact, on peut extraire une sous-suite $\{x_{\phi(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un élément $x \in f^{-1}(K)$. Or, F étant fermé, on a $x \in F$, ce qui nous dit que $y = f(x) \in f(F)$.

On remarque par ailleurs qu'il existe des plongements qui ne sont pas propres. Par exemple, l'inclusion $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ est un plongement mais n'est pas propre.

(b) On voit bien que

$$f'(t) = \left(\frac{4t}{(t^2+1)^2}, \frac{t^4 + 4t^2 - 1}{(t^2+1)^2} \right),$$

ce qui nous dit que $f'(t) \neq (0,0)$, pour tout $t \in \mathbb{R}_{<1}$. Soient $t, s \in \mathbb{R}_{<1}$ tels que $f(t) = f(s)$. Comme la fonction $g : \mathbb{R}_{>1} \to \mathbb{R}_{>0}$ donnée par $g(x) = (x-1)/(x+1)$ est bijective (et la réciproque est donné par $g^{-1}(y) = (1+y)/(1-y)$), en regardant la première coordonnée de f on conclut que $s^2 = t^2$. Par ailleurs, la deuxième coordonné de f nous dit que $t = s$ ou $t^2 = s^2 = 1$. Comme le deuxième est seulement vérifié si $t = s = -1$, vu que $s, t < 1$, f est injective.

On voit bien que

$$\lim_{t\to 1} f(t) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^2} = f(-1).$$

Par ailleurs, la suite $\{f(1-1/2^n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $(0,0) = f(-1)$ mais son image par f^{-1} est $\{1-1/2^n\}_{n\in\mathbb{N}}$, qui ne converge pas vers -1. En conséquence, $f^{-1} : f(\mathbb{R}_{<1}) \to \mathbb{R}_{<1}$ n'est pas continue et f n'est pas un plongement.

6. *Espace projectif.* Soit $\mathbb{RP}^n$ le quotient de la sphère

$$S^n = \left\{x = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_0^2 + \cdots + x_n^2 = 1\right\}$$

par la relation d'équivalence donnée par $x \sim$ si et seulement si $x = \pm y$. On notera $\pi(x_0, \dots, x_n) = [x_0 : \dots : x_n]$, où $\pi : S^n \to \mathbb{RP}^n$ est la projection canonique.

(a) Donner un atlas avec $n+1$ cartes pour $\mathbb{RP}^n$.

(b) Montrer que la topologie induite par cet atlas est la topologie quotient.

(c) Montrer que, pour cette structure de variété sur $\mathbb{RP}^n$, l'application de classe C^∞ donnée par $\pi : S^n \to \mathbb{RP}^n$ est un difféomorphisme local.

(d) Montrer qu'il existe une unique de structure de variété sur $\mathbb{RP}^n$ telle que π soit un difféomorphisme local.

(e) Montrer que l'application $f : \mathbb{RP}^n \to \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x_0, \dots, x_n) = x_1^2 + 2x_2^2 + \cdots + nx_n^2$$

est bien définie et de classe C^∞.

(f) Déterminer les points critiques de f.

(g) Soit $\phi : \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{R}^6$ l'application

$$\phi\big([x : y : z]\big) = \Big(x^2, y^2, z^2, \sqrt{2}yz, \sqrt{2}xz, \sqrt{2}xy\Big).$$

Montrer que ϕ est un plongement.

(h) Montrer que l'image de ϕ est contenue dans S^5 et même dans l'intersection d'un hyperplan affine avec S^5.

(i) En déduire que $\mathbb{RP}^2$ admet un plongement dans $\mathbb{R}^4$.

(j) $\mathbb{RP}^2$ peut-il se plonger dans $\mathbb{R}^3$?

(k) Montrer que $\mathbb{RP}^{2m-1}$ est orientable pour $m \geq 1$.

Solution.

(a) Soit $\pi : S^n \to \mathbb{RP}^n$. On remarque d'abord que l'on considère la topologie quotient sur $\mathbb{RP}^n$, *i.e.* $U \subseteq \mathbb{RP}^n$ est ouvert si et seulement si $\pi^{-1}(U)$ est ouvert de S^n. L'identité $\pi^{-1}(\pi(U)) = U \cup (-U)$, pour tout $U \subseteq \mathbb{R}^2$, nous dit que π est une application ouverte. Comme π est ouverte et la relation d'équivalence définissant T^2 est un fermé de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, T^2 est Hausdorff. On voit bien que π est un revêtement, vu que S^n l'est et la fibre de π est discrète. En plus, comme S^n est compact, $\mathbb{RP}^n$ l'est aussi. On notera $\pi(x_0, \dots, x_n) = [x_0 : \dots : x_n]$ ou sinon $(x_0 : \dots : x_n)$.

Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, on définit $U_i = \pi(\{(x_0, \dots, x_n) \in S^n : x_i \neq 0\})$. C'est clair que U_i est un ouvert de $\mathbb{RP}^n$. On considère l'application $\phi_i : U_i \to \mathbb{R}^n$ donnée par

$$\phi_i([x_0 : \dots : x_n]) = \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right),$$

pour $i \in [\![0,n]\!]$. On voit bien que l'application ϕ_i est bijective, avec réciproque donnée par la composée de l'application continue $\Psi_i : \mathbb{R}^n \to S^n$ donnée par

$$\Psi_i(y_1,\dots,y_n) = \frac{(y_1,\dots,y_i,1,y_{i+1},\dots,y_n)}{\sqrt{1+\sum_{j=1}^n y_j^n}}$$

et π, pour $i \in [\![0,n]\!]$. Comme $\phi_i \circ \pi$ est continue (sur $\pi^{-1}(U_i)$), on conclut que ϕ_i est continue aussi, pour $i \in [\![0,n]\!]$. En outre, Ψ_i est continue, ce qui implique que ψ_i est continue. En conséquence, ϕ_i est un homéomorphisme.

On vérifie finalement que $\{(U_i,\phi_i) : i \in [\![0,n]\!]\}$ est un atlas de classe C^∞. On remarque d'abord que

$$\mathbb{RP}^n = \bigcup_{i=0}^n U_i.$$

En outre, étant donné $i,j \in [\![0,n]\!]$ avec $i<j$, l'application

$$\phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \to \phi_j(U_i \cap U_j)$$

est donnée par

$$\phi_j \circ \phi_i^{-1}(y_1,\dots,y_n) = \left(\frac{y_1}{y_j},\dots,\frac{y_i}{y_j},\frac{1}{y_j},\frac{y_{i+1}}{y_j},\dots,\frac{y_{j-1}}{y_j},\frac{y_{j+1}}{y_j},\dots,\frac{y_n}{y_j}\right)$$

pour tout $(y_1,\dots,y_n) \in \phi_i(U_i \cap U_j)$, *i.e.* $(y_1,\dots,y_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $y_j \neq 0$. C'est clair que $\phi_j \circ \phi_i^{-1}$ est de classe C^∞. Le cas $i>j$ est analogue.

(*b*) Il s'agit d'un conséquence directe des arguments dans l'item précédent.

(*c*) On va montrer que la différentielle $d\pi : T_xS^n \to T_{\pi(x)}\mathbb{RP}^n$ est bijective pour tout $x^0 \in S^n$. On peut supposer sans perte de généralité que $x_0^0 \neq 0$. On va même supposer que $x_0^0 > 0$, mais le cas $x_0^0 < 0$ est pareil. Dans ce cas, on peut prendre un paramétrage local $\psi : B(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n},1) \to S^n$ de S^n autour de x^0 donné par

$$\psi(y_1,\dots,y_n) = \left(\sqrt{1-\sum_{i=1}^n y_i^2}, y_1,\dots,y_n\right).$$

Soit $y^0 = (x_1^0,\dots,x_n^0)$. Alors, $y^0 \in B(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n},1)$ et $\psi(y^0) = x^0$. On voit bien l'inclusion $\pi \circ \psi(B(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n},1)) \subseteq U_0$, et

$$(\phi_0 \circ \pi \circ \psi)(y_1,\dots,y_n) = \frac{(y_1,\dots,y_n)}{\sqrt{1-\sum_{i=1}^n y_i^2}}.$$

Un calcul direct nous dit que sa différentielle est bijective pour tout $(y_1,\dots,y_n) \in B(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n},1)$, comme on voulait démontrer.

(*d*) Soit $\mathscr{A}$ et $\mathscr{A}'$ deux atlas de $\mathbb{RP}^n$ tel que π soit un difféomorphisme local pour $\mathscr{A}$ et $\mathscr{A}'$. En particulier, pour tout $x \in S^n$ il existe des ouverts $U_x \subseteq S^n$ et $V_x \subseteq \mathbb{RP}^n$ tels que $x \in U$ et $\pi|_{U_x} : U_x \to V_x$ est un difféomorphisme pour $\mathscr{A}$ et $\mathscr{A}'$. On peut supposer aussi qu'il existe une carte (U_x,ϕ_x) de S^n. En conséquence, $(V_x, \phi_x \circ (\pi|_{U_x})^{-1})$ est une carte de $\mathscr{A}$ et de $\mathscr{A}'$. C'est facile à monter que deux cartes $(V_x, \phi_x \circ (\pi|_{U_x})^{-1})$ et $(V_{x'}, \phi_{x'} \circ (\pi|_{U_{x'}})^{-1})$ sont compatibles, vue que (U_x,ϕ_x) et $(U_{x'},\phi_{x'})$ le sont. Comme la réunion de la famille $\mathscr{A}'' = \{V_x : x \in S^n\}$ est $\mathbb{RP}^n$, on voit bien que $\mathscr{A}$ et $\mathscr{A}'$ incluent un atlas $\mathscr{A}''$. En conséquence, $\mathscr{A}$ et $\mathscr{A}'$ sont compatibles, comme on voulait démontrer.

(e) On considère l'application $\hat{F} : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ donnée par

$$\hat{F}(x_0, \dots, x_n) = \sum_{i=0}^{n} i x_i^2,$$

et $F = \hat{F}|_{S^n}$. Comme $\hat{F}$ est de classe C^∞, F l'est aussi. On voit bien que $F(x_0, \dots, x_n) = F(-x_0, \dots, -x_n)$, ce qui implique que F induit l'application f. En plus, comme π est un difféomorphisme local et F est de classe C^∞, on conclut que f est de classe C^∞.

(f) Comme π est un difféomorphisme local, $x \in S^n$ est un point critiques de F si et seulement si $\pi(x)$ est un point critique de f. En outre, un point critique de F est précisément un point $x \in S^n$ tel que $d\hat{F}(x)(y) = 0$, pour tout $y \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $\langle x, y\rangle = 0$. Un calcul simple nous dit que

$$d\hat{F}(x)(y) = 2\big\langle (0, x_1, 2x_2, \dots, nx_n), (y_0, y_1, y_2, \dots, y_n)\big\rangle = 2\sum_{i=0}^{n} i x_i y_i.$$

On voit bien que le vecteur de la forme $x = \pm e_i$, avec e_i un vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$ et $i \in [\![0, n]\!]$, satisfait $d\hat{F}(x)(y) = 0$, pour tout $y \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $\langle x, y\rangle = 0$, *i.e.* $\pi(e_i)$ est un point critique de f pour tout $i \in [\![0, n]\!]$.

Soit $x \in S^n$ et $I = \{i \in [\![0, n]\!] : x_i \neq 0\}$. On suppose $\#(I) > 1$. Dans ce cas, on affirme que $\pi(x)$ n'est pas un point critique de f. En effet, si $i, j \in I$ sont différents, le vecteur $y = x_i e_j - x_j e_i \in T_x S^n$, mais $0 = d\hat{F}(x)(y) = 2(i - j)x_i x_j$ est absurde.

(g) On considère l'application $\hat{\Phi} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^6$ donnée par

$$\hat{F}(x, y, z) = \Big(x^2, y^2, z^2, \sqrt{2}yz, \sqrt{2}xz, \sqrt{2}xy\Big),$$

et $\Phi = \hat{\Phi}|_{S^n}$. Comme $\hat{\Phi}$ est de classe C^∞, Φ l'est aussi. On voit bien que $\Phi(x, y, z) = \Phi(-x, -y, -z)$, ce qui implique que Φ induit l'application ϕ. On voit bien que $\Phi(x, y, z) = \Phi(x', y,', z')$ si et seulement si $(x, y, z) = \pm(x', y', z')$. En effet, en regardant les 3 premiers coordonnées de $\Phi(x, y, z)$ on déduit que $x = \pm x'$, $y = \pm y'$ et $z = \pm z'$, mais les trois dernières coordonnées de $\Phi(x, y, z)$ nous disent que $(x, y, z) = \pm(x', y', z')$. Cela implique que ϕ est injectif.

En plus, comme π est un difféomorphisme local et Φ est de classe C^∞, on conclut que ϕ est de classe C^∞. Cela nous dit aussi que Φ est une immersion si et seulement si ϕ l'est. Pour le prouver il suffit de montrer que $d\Phi(x, y, z) : T_{(x,y,z)}S^2 \to T_{(x,y,z)}\mathbb{R}^6$ est injectif pour tout $(x, y, z) \in S^2$, qui suit d'un calcul direct mais long. Finalement, comme $\mathbb{RP}^2$ est compact, l'immersion injective ϕ est propre, ce qui implique par l'exercice **5** que ϕ est un plongement.

(h) On voit bien que

$$\big\|\phi(x : y : z)\big\|^2 = x^4 + y^4 + z^4 + 2y^2z^2 + 2x^2z^2 + 2x^2y^2 = (x^2 + y^2 + z^2)^2 = 1,$$

ce qui nous dit que l'image de ϕ est contenue dans S^5. En plus, si l'on prend les six points

$$\big\{\phi(1 : 0 : 0), \phi(0 : 1 : 0), \phi(0 : 0 : 1), \phi(1/\sqrt{2} : 1/\sqrt{2} : 0), \\ \phi(1/\sqrt{2} : 0 : 1/\sqrt{2}), \phi(0 : 1/\sqrt{2} : 1/\sqrt{2})\big\}$$

on trouve l'hyperespace affine H de $\mathbb{R}^6$ donné par l'équation

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1.$$

On voit bien que $\phi(x : y : z) \in H$ pour tout $(x, y, z) \in S^2$, car $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

(i) Il s'agit d'un conséquence immédiate de l'item précédent. On peut sinon montrer que l'application $i : \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{R}^4$ donnée par

$$i(x:y:z) = \Big(x^2+2y^2+3z^2, yz, xz, xy\Big),$$

est un plongement.

(j) Non, car toute surface (plongée) fermée de $\mathbb{R}^3$ est orientable, tandis que $\mathbb{RP}^2$ n'est pas orientable (voir l'item suivant). On remarque que, comme $\mathbb{RP}^2$ est compact, tout plongement de $\mathbb{RP}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ est fermé.

(k) Soient M et $\hat{M}$ sont deux variétés connexes de classe C^∞ de dimension finie n, $\pi : \hat{M} \to M$ une application surjective de classe C^∞ telle que $\#(\pi^{-1}(\{p\})) = 2$ pour tout $p \in M$ et, pour tout $p \in M$, il existe un ouvert $U \subseteq M$ avec $p \in U$ et un difféomorphisme $\tau : U \times \pi^{-1}(\{p\}) \to \pi^{-1}(U)$ tel que $\pi \circ \tau : U \times \pi^{-1}(\{p\}) \to U$ est la projection canonique. C'est facile à voir qu'il existe un unique difféomorphisme $\iota : \hat{M} \to \hat{M}$ tel que $\pi \circ \iota = \pi$ et $\iota(x) \neq x$ pour tout $x \in \hat{M}$. Cette application satisfait alors $\iota \circ \iota = \mathrm{id}_{\hat{M}}$.

On va montrer le résultat suivant. On suppose désormais que $\hat{M}$ est orientable. On affirme que dans ce cas M est orientable si et seulement si ι préserve l'orientation de $\hat{M}$. Si ι préserve l'orientation de $\hat{M}$, soit $\{v_{x,1}, \dots, v_{x,n}\}$ une base orientée de $T_x\hat{M}$ compatible avec une carte $(\hat{V}, \hat{\phi})$ de $\hat{M}$ telle que $x \in \hat{V}$. On choisit $\hat{V}$ telle que $\pi|_{\hat{V}}$ soit injectif. On définit l'orientation de $T_{\pi(y)}M$ par $\{d\pi_y v_{y,1}, \dots, d\pi_y v_{y,n}\}$ pour tout $y \in \hat{V}$. Comme $\hat{M}$ est orienté et ι préserve l'orientation, on voit bien que l'orientation de $T_{\pi(y)}M$ induite de $T_y\hat{M}$ ou de $T_{\iota(y)}\hat{M}$ coïncident. Comme π est un difféomorphisme local, on conclut que l'orientation de $T_{\pi(y)}M$ compatible avec la carte $(\pi(\hat{V}), \hat{\phi} \circ (\pi|_{\hat{V}})^{-1})$ de M telle que $\pi(y) \in \pi(\hat{V})$. En conséquence, M est une variété orientée. Réciproquement, si M est orientée, comme $\hat{M}$ et M sont connexes et π est un difféomorphisme local, π préserve ou reverse l'orientation. On suppose sans perte de généralité que l'orientation est préservée. L'identité $\pi \circ \iota = \pi$ nous dit alors que ι préserve l'orientation.

On considère maintenant le cas de $\hat{M} = S^n$ et $M = \mathbb{RP}^n$. On a montré que S^n est orientable. En outre c'est clair que S^n est connexe, ce qui implique que $\mathbb{RP}^n$ est connexe aussi. On voit bien que $\iota : S^n \to S^n$ est l'antipode $x \mapsto -x$. Or, comme le déterminant de la différentielle de ι est $(-1)^{n+1}$, ι préserve l'orientation si et seulement n est impair. Le résultat dans la paragraphe précédent nous dit que $\mathbb{RP}^n$ est orientable si et seulement si n est impair.

7. *Ruban de Möbius.* Soit M le quotient de $\mathbb{R}\times\,]-1,1[$ par la relation d'équivalence donnée par $(u,v) \sim (u',v')$ si et seulement si $u - u' \in \mathbb{Z}$ et $v = v'(-1)^{u-u'}$.

(a) Donner un atlas pour M.

(b) Construire un plongement $M \to \mathbb{R}^3$.

(c) Soit M' le sous-ensemble de $\mathbb{RP}^2$ représenté par $\{(x,y,z) \in S^2 : |z| < 1/2\}$. Montrer que $\mathbb{RP}^2 \setminus M'$ est difféomorphe à un disque fermé.

(d) Montrer que M' est difféomorphe à M, si bien que $\mathbb{RP}^2$ est obtenu en recollant un disque et un ruban de Möbius sur leur bord commun.

Solution.

(a) Soit $J = \,]-1,1[$ et $\hat{J} = [-1,1]$. On suppose que M est muni de la topologie quotient, *i.e.* $U \subseteq M$ est ouvert si et seulement si $\pi^{-1}(U)$ est un ouvert de $\mathbb{R}\times J$, où $\pi : \mathbb{R}\times J \to M$ est la projection canonique. Soit $\tau : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application $\tau(x,y) = (x+1,-y)$. Alors,

$\pi^{-1}(\pi(U)) = \cup_{n\in\mathbb{Z}} \tau^{(n)}(U)$, pour tout $U \subseteq \mathbb{R}^2$, ce qui implique que π est une application ouverte. De la même façon, on définit l'espace topologique $\hat{M} = (\mathbb{R} \times \hat{J})/\approx$, avec la relation d'équivalence $(u, v) \approx (u', v')$ si et seulement si $u - u' \in \mathbb{Z}$ et $v = v'(-1)^{u-u'}$, munit de la topologie quotient, et l'application $\hat{\pi} : \mathbb{R} \times \hat{J} \to \hat{M}$ est ouverte. Comme π (resp., $\hat{\pi}$) est ouverte et la relation d'équivalence définissant M (resp., $\hat{M}$) est un fermé de $(\mathbb{R} \times J) \times (\mathbb{R} \times J)$ (resp., $(\mathbb{R} \times \hat{J}) \times (\mathbb{R} \times \hat{J})$), M (resp., $\hat{M}$) est Hausdorff. Noter en plus que $\hat{M} = \hat{\pi}([0, 1] \times \hat{J})$, ce qui implique que $\hat{M}$ est compact. On remarque aussi que l'inclusion $\mathbb{R} \times J \to \mathbb{R} \times \hat{J}$ induit un plongement $i : M \to \hat{M}$.

Étant donné $s \in \mathbb{R}$ on définit $\tilde{U}_s =]\,s - 1/2, s + 1/2\,[\times]-1, 1[$. On voit bien que $\pi|_{\tilde{U}_s} : \tilde{U}_s \to M$ est continue et injectif, où $\pi : \mathbb{R}\times]-1, 1[\to M$ est la projection canonique. Soit $U_s = \pi(\tilde{U}_s)$. Comme π est une application ouverte, $\pi|_{\tilde{U}_s} : \tilde{U}_s \to U_s$ est un homéomorphisme, et soit $\phi_s : U_s \to \tilde{U}_s \subseteq \mathbb{R}^2$ l'application réciproque. C'est clair que

$$M = U_0 \cup U_{1/2}.$$

On définit l'atlas $\mathscr{A} = \{(U_0, \phi_0), (U_{1/2}, \phi_{1/2})\}$. Vérifions maintenant que le changement de cartes est un C^∞-difféomorphisme. En effet,

$$\phi_0(U_0 \cap U_{1/2}) =]-1/2, 0\,[\times]-1, 1\,[\,\cup\,]\,0, 1/2\,[\times]-1, 1\,[\,,$$

et

$$\phi_{1/2} \circ \phi_0^{-1} : \phi_0(U_0 \cap U_{1/2}) \to \phi_{1/2}(U_0 \cap U_{1/2})$$

envoie $(u, v) \in]-1/2, 0\,[\times]-1, 1\,[$ dans $(u + 1, v)$ et $(u, v) \in]\,0, -1/2\,[\times]-1, 1\,[$ dans (u, v). En conséquence, le changement de cartes est un C^∞-difféomorphisme.

(*b*) On définit alors $\Phi : \mathbb{R}\times]-1, 1[\to \mathbb{R}^3$ par

$$\Phi(u, v) = \Big(\big(2 + v\cos(\pi u)\big)\cos(2\pi u), \big(2 + v\cos(\pi u)\big)\sin(2\pi u), v\sin(\pi u)\Big). \tag{2}$$

C'est clair que Φ est de classe C^∞. En outre, on affirme que $\Phi(u, v) = \Phi(u', v')$ si et seulement si $(u, v) \sim (u', v')$. En effet, on voit bien que si $(u, v) \sim (u', v')$, alors $\Phi(u, v) = \Phi(u', v')$, ce qui implique que Φ induit une application $\phi : M \to \mathbb{R}^3$. Réciproquement, si $\Phi(u, v) = \Phi(u', v')$, alors en considérant la somme des carrées des deux premières coordonnées de Φ on conclut que

$$2 + v\cos(\pi u) = 2 + v'\cos(\pi u'), \tag{3}$$

ce qui implique que

$$\cos(2\pi u) = \cos(2\pi u') \text{ et } \sin(2\pi u) = \sin(2\pi u').$$

Cela nous dit que $u - u' \in \mathbb{Z}$. Soit alors $k = u' - u \in \mathbb{Z}$. Alors, (3) et la dernière coordonnée de Φ nous disent que

$$v\sin(\pi u) = v'\sin(\pi u + k\pi) = (-1)^k v'\sin(\pi u),$$
$$v\cos(\pi u) = v'\cos(\pi u + k\pi) = (-1)^k v'\cos(\pi u),$$

ce qui donne $v = (-1)^k v'$, d'où $(u, v) \sim (u', v')$. Cette dernière propriété implique que ϕ est injectif.

Montrons aussi que ψ est une immersion. On peut raisonner avec les coordonnées cylindriques (r, θ, z), puisque $(r, \theta, z) \to (x, y, z)$ a une différentielle inversible en chaque point (hors de l'axe z, mais $\phi(M)$ est disjoint de l'axe z). On a $\partial\theta/\partial u \neq 0$ et $\partial\theta/\partial v = 0$, et $(\partial r/\partial v, \partial z/\partial v) = (\cos(\pi u), \sin(\pi u)) \neq (0, 0)$ en tout point, donc ψ est une immersion.

Il reste à démontrer que ϕ est un homéomorphisme sur son image. Pour le prouver on remarque que l'application Φ admet une unique extension continue en une application $\hat{\Phi} : \mathbb{R} \times \hat{J} \to \mathbb{R}^3$ donnée par la même expression que (2). L'application $\hat{\Phi}$ satisfait aussi que $\hat{\Phi}(u,v) = \hat{\Phi}(u',v')$ si et seulement si $(u,v) \approx (u',v')$, ce qui implique que $\hat{\Phi}$ induit une application continue et injective $\hat{\phi} : \hat{M} \to \mathbb{R}^3$. Comme $\hat{M}$ est compact, $\hat{\phi}$ est un homéomorphisme sur son image. Finalement, on voit bien que $\phi = \hat{\phi} \circ i$, ce qui implique que ϕ est un homéomorphisme sur son image.

(c) On considère le disque fermé D de centre $(0,0)$ et de rayon $\sqrt{3}/2$ dans $\mathbb{R}^2$ et $\psi : D \to \mathbb{RP}^2$ l'application C^∞ définie par

$$\psi(x,y) = [x : y : \sqrt{1-x^2-y^2}].$$

En conséquence, $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ parcours l'intervalle $[1/2,1]$ quand (x,y) parcourt D. Ainsi $\mathbb{RP}^2 \setminus \psi(D) = M'$. De plus, ψ est injectif, car $\pi : S^2 \to \mathbb{RP}^2$ est injectif sur $\{z > 0\} \cap S^2$, et ψ est une immersion, grâce aux deux premières coordonnées (x,y). Cela nous dit que ψ est un plongement, car D est compact. En conséquence, $\mathbb{RP}^2 \setminus M'$ est difféomorphe à un disque fermé.

(d) Soit $f : M \to \mathbb{RP}^2$ l'application définie par

$$f(u,v) = \left[\cos\left(\frac{\pi v}{4}\right)\cos(\pi u) : \cos\left(\frac{\pi v}{4}\right)\sin(\pi u) : \sin\left(\frac{\pi v}{4}\right)\right].$$

C'est clair que $f(u+1,-v) = f(u,v)$, ce qui implique que f est bien définie sur M. De plus, f est de classe C^∞, car f est définie et C^∞ sur $\mathbb{R}\times\,]-1,1[$ et la projection $\mathbb{R}\times\,]-1,1[\,\to M$ est un difféomorphisme local. On a bien $f(M) = M'$, car $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z < 1/2\}$ correspond à une latitude comprise entre $-\pi/4$ et $\pi/4$. C'est un difféomorphisme sur son image, car les coordonnées sphériques donnent des difféomorphismes sur les portions de sphères. On a ainsi décomposé $\mathbb{RP}^2 = D \cup M$: un disque et un ruban de Möbius recollé sur leur bord commun donne le plan projectif $\mathbb{RP}^2$.

8. *Espaces de matrices.* Soit $\mathsf{M}_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$ l'ensemble des matrices carrées de taille n.

(a) Montrer que $\mathsf{SL}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{R}) : \det(A) = 1\}$ est une hypersurface.

(b) Montrer que $\mathsf{O}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{R}) : A^tA = \mathsf{I}_n\}$ est une sous-variété.

(c) Soit r un entier avec $0 \le r \le n$ et Σ_r l'espace des matrices de rang r. Montrer que Σ_r est une sous-variété.

Solution.

(a) Il suffit de montrer que l'application $\det : \mathsf{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ a sa différentielle surjective (*i.e.* non nulle) en chaque point de $\mathsf{SL}_n(\mathbb{R})$. Si $\det(A) = 1$, on a

$$\det(A+H) = \det(A)\det(\mathsf{I}_n + A^{-1}H) = 1 + \operatorname{tr}(A^{-1}H) + o(H).$$

Or si B est non nulle, la forme linéaire $H \mapsto \operatorname{tr}(BH) = \sum_{i,j} b_{i,j}h_{j,i}$ est non nulle. Donc pour tout $A \in \mathsf{SL}_n(\mathbb{R})$, $d\det_A$ est non nulle. Ainsi par le critère des submersions, $\mathsf{SL}_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de codimension 1 (*i.e.* de dimension n^2-1).

(b) Ici on considère l'application $f : \mathsf{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathsf{Sym}_n(\mathbb{R})$ donnée par $f(A) = A^tA$, où $\mathsf{Sym}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices symétriques. On a $(A^tA)^t = A^t(A^t)^t = A^tA$, donc f

est bien définie. Il suffit de montrer que la différentielle de f est surjective en chaque point $A \in \mathsf{O}_n(\mathbb{R}) = f^{-1}(\mathsf{I}_n)$. Pour $A \in \mathsf{O}_n(\mathbb{R})$,

$$df_A(H) = A^t H + H^t A.$$

Si $S \in \mathsf{Sym}_n(\mathbb{R})$, on pose $H = AS/2$ et on a

$$df_A(H) = \frac{1}{2}(A^t AS + (AS)^t A) = \frac{1}{2}(S + S^t) = S.$$

Ainsi la différentielle de f est surjective en chaque point $A \in \mathsf{O}_n(\mathbb{R})$ et on en déduit que $\mathsf{O}_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de codimension $n(n+1)/2$ (i.e. la dimension de $\mathsf{Sym}_n(\mathbb{R})$), *i.e.* de dimension $n(n-1)/2$.

(c) Soit

$$J_r = \begin{pmatrix} \mathsf{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

la matrice de rang r. On va commencer par montrer que Σ_r est une sous-variété au point J_r. On observe qu'une matrice voisine de J_r sera de la forme

$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

avec A inversible de taille r. Alors X est de rang r si et seulement si ses $(n-r)$ dernières colonnes sont combinaisons linéaires des r premières, ce qui se traduit par $B = AE$ et $D = CE$ pour une certaine matrice E. Cela est équivalent à l'équation $D = CA^{-1}B$. Autrement dit, Σ_r coïncide près de J_r avec le graphe de l'application $(A, B, C) \mapsto CA^{-1}B$ définie près de $(J_r, 0, 0)$. C'est donc une sous-variété près de J_r par le critère du graphe.

Pour $M \in \Sigma_r$ quelconque, il existe $P, Q \in \mathsf{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que $PMQ = J_r$. Or l'application $X \mapsto PXQ$ est un difféomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$ sur lui-même (d'inverse $X \mapsto P^{-1}XQ^{-1}$), envoie Σ_r sur lui-même et envoie M sur J_r. Ainsi Σ_r est également une sous-variété au point M, et donc en chacun de ses points.

9. *Produit.* Soit M et N deux variétés.

(a) Construire un atlas sur le produit $M \times N$.
(b) Montrer que les deux projections $M \times N \to M$ et $M \times N \to N$ sont C^∞.
(c) Décrire le fibré tangent de $M \times N$.
(d) Montrer que le produit $S^1 \times S^1$ est difféomorphe au tore T^2.
(e) Le produit $S^1 \times S^2$ est-il difféomorphe à S^3 ?

Solution.

(a) Comme le produit d'espaces topologiques Hausdorff est aussi Hausdorff, on voit bien que $M \times N$ est Hausdorff. Soit $\{(U_i, \phi_i) : i \in I\}$ un atlas pour M et $\{(V_j, \psi_j) : j \in J\}$ un atlas pour N. Alors on considère $K = I \times J$ et pour $k = (i, j) \in K$, $W_k = U_i \times V_j$ et $\theta_k : W_k \to M \times N$ défini par $\theta_k(u, v) = (\phi_i(u), \psi_j(v))$. Les W_k recouvrent bien $M \times N$ puisque les U_i recouvrent M et les V_j recouvrent N. En outre, c'est clair que θ_k est un homéomorphisme sur son image, car ϕ_i et ψ_j le sont.

Les changements de cartes sont de la forme

$$\theta_{k'}^{-1} \circ \theta_k(u, v) = \left(\phi_{i'}^{-1} \circ \phi_i(u), \psi_{j'}^{-1} \circ \psi_j(v)\right),$$

et sont définis sur l'ouvert produit $\phi_i(U_i \cap U_{i'}) \times \psi_j(V_j \cap V_{j'})$.

(b) Pour voir que la projection $p_1 : M \times N \to M$ est C^∞, on note que

$$\phi_i \circ p_1 \circ (\phi_i \times \psi_j)^{-1} : \phi_i(U_i) \times \psi_j(V_j) \to \phi_i(U_i)$$

est la projection canonique et elle est en conséquence de classe C^∞. De même pour $p_2 : M \times N \to N$.

(c) L'espace tangent au point $(m,n) \in M \times N$ est par définition l'ensemble des classes d'équivalence des courbes $\gamma :]-1,1[\to M \times N$ avec $\gamma(0) = (m,n)$ par la relation d'équivalence suivante. Deux courbes sont équivalentes si, dans une carte (W_k, θ_k), les courbes $\theta_k^{-1} \circ \gamma :]-1,1[\to \mathbb{R}^d$ ont la même dérivée en 0. Ça s'identifie au produit des espaces tangents, *i.e.* $T_{(m,n)}(M \times N) = T_m M \times T_n N$. Enfin,

$$\begin{aligned} T(M \times N) &= \bigsqcup_{(m,n)\in M\times N} T_{(m,n)}(M \times N) = \bigsqcup_{(m,n)\in M\times N} T_m M \times T_n N \\ &= \Big(\bigsqcup_{m\in M} T_m M\Big) \times \Big(\bigsqcup_{n\in N} T_n N\Big) = TM \times TN. \end{aligned}$$

(d) On définit d'abord l'application $f : \mathbb{R}^2 \to S^1 \times S^1$ par

$$f(u,v) = \big(\cos(2\pi u), \sin(2\pi u), \cos(2\pi v), \sin(2\pi v)\big),$$

où l'on considère $S^1 \subset \mathbb{R}^2$. C'est une application C^∞ et on voit bien que $f(u,v) = f(u',v')$ si et seulement si $(u-u', v-v') \in \mathbb{Z}^2$. On obtient par conséquent une bijection $\bar f : T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \to S^1 \times S^1$ de classe C^∞. En outre, on voit bien que la dérivée $df(u,v) : T_{(u,v)}\mathbb{R}^2 \to T_{f(u,v)}(S^1 \times S^1)$ est bijective pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$. Comme la différentielle $d\pi_{(u,v)}$ de la projection canonique $\pi : \mathbb{R}^2 \to T^2$ est bijective, on conclut que $d\bar f(\pi(u,v)) : T_{\pi(u,v)}T^2 \to T_{f(u,v)}(S^1 \times S^1)$ est bijective pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, ce qui implique que $\bar f$ est un difféomorphisme local. En conséquence, $\bar f$ est un difféomorphisme.

(e) La réponse est non, mais ça n'a rien d'évident, vu que les deux espaces sont compactes et connexes. On peut le démontrer en regardant le groupe fondamental

$$\pi_1(S^1 \times S^2) \simeq \pi_1(S^1) \times \pi_1(S^2) \simeq \pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}, \quad \pi_1(S^3) = 1.$$

Or π_1 est un invariant d'homéomorphisme, en particulier de difféomorphisme, donc $S^1 \times S^2$ n'est pas difféomorphe à S^3. On a utilisé seulement que $\pi_1(X \times Y) = \pi_1(X) \times \pi_1(Y)$, ce qui est facile à voir à partir de la définition, et $\pi_1(S^k) = 0$ si $k \geq 2$, $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$, qui est moins évident.

10. *Fibration de Hopf.* On considère $\mathbb{CP}^1$ le quotient de $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par la relation d'équivalence donnée par $(z_1,z_2) \sim (z_1',z_2')$ si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ non nul tel que $z_1' = \lambda z_1, z_2' = \lambda z_2$. On note $[z_1 : z_2]$ la classe d'équivalence de (z_1,z_2).

(a) Montrer que les applications $\psi_1, \psi_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{CP}^1$ données par $z \mapsto [z : 1]$ et $z \mapsto [1 : z]$, respectivement, définissent un atlas.

(b) Montrer que $\mathbb{CP}^1$ est difféomorphe à S^2.

(c) Soit S^3 la sphère unité de $\mathbb{C}^2$. Montrer que l'application $\pi : S^3 \to \mathbb{CP}^1$ donnée par $\pi(z_1,z_2) = [z_1 : z_2]$ est de classe C^∞.

(d) Montrer que π est une submersion. Décrire ses fibres, c'est-à-dire les images réciproques de points.

Solution.

(*a*) Les applications ψ_1 et ψ_2 sont injectives, car $[z:1]=[w:1]$ ou $[1:z]=[1:w]$ implique $z=w$. On voit bien que $\psi_i^1(\psi_2(\mathbb{C})\cap\psi_1(\mathbb{C}))=\mathbb{C}\setminus\{0\}$ pour $i\in\{1,2\}$, car car l'identité $[1:z]=[w:1]$ pour $z,w\in\mathbb{C}$ est équivalent à $z,w\neq 0$ et $z=w^{-1}$. En plus, le même calcul nous dit que $\psi_i\circ\psi_{3-i}^{-1}(z)=1/z$, pour tout $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ et $i\in\{1,2\}$, ce qui nous dit que $\psi_i\circ\psi_{3-i}^{-1}$ est de classe C^∞ pour $i\in\{1,2\}$. On laisse à la lectrice/au lecteur la vérification du fait la topologie de $\mathbb{CP}^1$ associée à l'atlas est Hausdorff.

(*b*) On va utiliser la projection stéréographique $\phi_\pm : S^2\setminus\{n_\pm\}\to\mathbb{R}^2$ donnée par

$$\phi_\pm(x,y,z)=\left(\frac{x}{1\mp z},\frac{y}{1\mp z}\right),$$

où $n_\pm=(0,0,\pm1)$. Les réciproques sont

$$\psi_\pm(p)=\left(\frac{2p}{\|p\|^2+1},\pm\frac{\|p\|^2-1}{\|p\|^2+1}\right),$$

pour tout $p\in\mathbb{R}^2$. On définit l'application $g:S^2\to\mathbb{CP}^1$ donnée par

$$g(x,y,z)=\begin{cases}\left[\frac{x+iy}{1-z}:1\right], & \text{si } (x,y,z)\neq n_+,\\ [1:0], & \text{si } (x,y,z)=n_+.\end{cases}$$

On voit bien que g est de classe C^∞. En effet, on note d'abord que $\mathsf{Img}(\psi_+)\subseteq S^2\setminus\{n_+\}$, $g(S^2\setminus\{n_+\})\subseteq\psi_1^{-1}(\mathbb{C})$ et $\psi_1^{-1}\circ g\circ\psi_+$ est donné par l'application $(x,y)\mapsto x+iy$ pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. En outre, $\mathsf{Img}(\psi_-)\subseteq S^2\setminus\{n_-\}$, $g(S^2\setminus\{n_-\})\subseteq\psi_2^{-1}(\mathbb{C})$ et

$$\psi_2^{-1}\circ g\circ\psi_-(x,y)=\begin{cases}x-iy, & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

i.e. $\psi_2^{-1}\circ g\circ\psi_-(x,y)=x-iy$, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Cela nous dit que g est de classe C^∞ et en plus sa dérivée $dg_{(x,y,z)}:T_{(xy,z)}S^2\to T_{g(x,y,z)}\mathbb{CP}^1$ est bijectif pour tout $(x,y,z)\in S^2$, ce qui implique que g est un difféomorphisme local. En outre, on voit bien que g est bijectif. En conséquence, g est un difféomorphisme.

(*c*) On considère l'application $\Pi:\mathbb{C}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{CP}^1$ donnée par $\Pi(z_1,z_2)=[z_1:z_2]$. Soit $W_i=\{(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2 : z_i\neq 0\}$ pour $i\in\{1,2\}$. C'est clair que W_i est un ouvert et que $\Pi(W_i)\subseteq\psi_i(\mathbb{C})$ pour $i\in\{1,2\}$. En plus, $(\psi_i^{-1}\circ\Pi)(z_1,z_2)=z_{3-i}/z_i$ pour $(z_1,z_2)\in W_i$ et $i\in\{1,2\}$, *i.e.* l'application Π est de classe C^∞. Noter que $\pi=\Pi\circ i$, où $i:S^3\to\mathbb{C}^2$ est l'inclusion, ce qui implique que π est de classe C^∞.

(*d*) L'item précédent nous dit que

$$d(\psi_j^{-1}\circ\Pi)(z_1,z_2)=\frac{z_j dz_{3-j}-z_{3-j}dz_j}{z_j^2}, \tag{4}$$

pour $(z_1,z_2)\in W_j$ et $j\in\{1,2\}$, où l'on utilise la notation $dz_j=dx_j+idy_j$. Le noyau de (4) est l'ensemble des vecteurs de la forme $\lambda.(z_1,z_2)$ avec $\lambda\in\mathbb{C}$, *i.e.* un sous-espace vectoriel réel $K_{(z_1,z_2)}$ de $T_{(z_1,z_2)}\mathbb{C}^2$ de dimension 2. On voit bien que $K_{(z_1,z_2)}$ n'est pas inclus dans $T_{(z_1,z_2)}S^3\subseteq T_{(z_1,z_2)}\mathbb{C}^2$ pour $(z_1,z_2)\in S^3$, car $(z_1,z_2)\in K_{(z_1,z_2)}$ mais $(z_1,z_2)\notin T_{(z_1,z_2)}S^3$ Cela implique que l'application $d\pi_{(z_1,z_2)}:T_{(z_1,z_2)}S^3\to T_{[z_1:z_2]}\mathbb{CP}^1$ est surjective.

La fibre $\Pi^{-1}([z_1:z_2])=\{\lambda(z_1,z_2):\lambda\in\mathbb{C}\setminus\{0\}\}$ est une droite complexe, elle intersecte S^3 sur le cercle $\pi^{-1}([z_1:z_2])=\{\lambda(z_1,z_2):\lambda\in S^1\subseteq\mathbb{C}\}$. Deux tels cercles correspondant à $[z_1:z_2]\neq[w_1:w_2]$ sont enlacés, et forment ce qu'on appelle un **entrelacs de Hopf**.