MAT4213 - GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
Deuxième semestre — 2020-2021
Fiche 4: Variétés abstraites

1. *Tore.* Soit T^2 le quotient du plan $\mathbb{R}^2$ par la relation d'équivalence donnée par $(u,v) \sim (u',v')$ si et seulement si $(u-u', v-v') \in \mathbb{Z}^2$.

(a) Donner un atlas pour T^2.

(b) Montrer que les formes différentielles du et dv sont bien définies sur T^2. Sont-elles fermées ? exactes ?

(c) Donner un difféomorphisme entre T^2 et la surface

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \left(\sqrt{x^2+y^2}-2\right)^2 + z^2 = 1\right\}.$$

2. *Structure de variété.* On rappelle que deux atlas sur un ensemble sont **compatibles** si leur union est encore un atlas.

(a) Montrer que le graphe M de $x \mapsto |x|$ n'est pas une sous-variété de classe C^1 de $\mathbb{R}^2$.

(b) Donner à M une structure de variété de classe C^∞ compatible avec la topologie telle que M soit difféomorphe à $\mathbb{R}$.

(c) Soit M un ensemble muni de deux atlas $\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{A}_2$ tels que pour toute fonction $f : M \to \mathbb{R}$, f est de classe C^∞ pour $\mathscr{A}_1$ si et seulement si elle l'est pour $\mathscr{A}_2$. Montrer que les atlas $\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{A}_2$ sont compatibles.

3. *Fibré tangent.* Soit S^n la sphère unité de $\mathbb{R}^{n+1}$.

(a) Montrer que le fibré tangent de S^n est la sous-variété de $\mathbb{R}^{2n+2}$ donnée par

$$T = \left\{(x,y) : x,y \in \mathbb{R}^{n+1}, \langle x,x\rangle = 1, \langle x,y\rangle = 0\right\},$$

où $\langle\, ,\rangle$ dénote le produit scalaire euclidien.

(b) Construire un champ de vecteurs partout non nul sur S^{2m-1} avec $m \geq 1$.

(c) Existe-t-il un tel champ de vecteurs sur S^2 ?

(d) Construire un champ de vecteurs sur S^2 qui s'annule en un seul point.

4. *Submersion et orientabilité.* Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une submersion.

(a) Montrer qu'il existe un champ de vecteur $X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tel que $df(X) = 1$.

(b) Montrer que la $(n-1)$-forme α sur $\mathbb{R}^n$ définie par

$$\alpha_x(v_2,\ldots,v_n) = \det\big(X(x), v_2, \ldots, v_n\big),$$

pour tous $x, v_2, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$, est partout non nulle sur chaque hypersurface $\Sigma_a = f^{-1}(a)$. En déduire que ces hypersurfaces sont orientables.

(c) Généraliser au cas où $f : M \to N$ est une submersion et M est orientable.

5. *Immersion injective.* On rappelle qu'une application continue entre espaces métrisables $f : X \to Y$ est **propre** si l'image réciproque par f de tout compact est compact.

(a) Montrer qu'une immersion injective propre $f : M \to N$ est un plongement.

(b) Montrer que l'application $f : \mathbb{R}_{<1} \to \mathbb{R}^2$ donnée par

$$f(t) = \left(\frac{t^2-1}{t^2+1}, \frac{t(t^2-1)}{t^2+1} \right)$$

est une immersion injective. Est-ce un plongement ?

6. *Espace projectif.* Soit $\mathbb{RP}^n$ le quotient de la sphère

$$S^n = \left\{ x = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_0^2 + \dots + x_n^2 = 1 \right\}$$

par la relation d'équivalence donnée par $x \sim$ si et seulement si $x = \pm y$. On notera $\pi(x_0, \dots, x_n) = [x_0 : \dots : x_n]$, où $\pi : S^n \to \mathbb{RP}^n$ est la projection canonique.

(a) Donner un atlas avec $n+1$ cartes pour $\mathbb{RP}^n$.

(b) Montrer que la topologie induite par cet atlas est la topologie quotient.

(c) Montrer que, pour cette structure de variété sur $\mathbb{RP}^n$, l'application de classe C^∞ donnée par $\pi : S^n \to \mathbb{RP}^n$ est un difféomorphisme local.

(d) Montrer qu'il existe une unique de structure de variété sur $\mathbb{RP}^n$ telle que π soit un difféomorphisme local.

(e) Montrer que l'application $f : \mathbb{RP}^n \to \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x_0, \dots, x_n) = x_1^2 + 2x_2^2 + \dots + nx_n^2$$

est bien définie et de classe C^∞.

(f) Déterminer les points critiques de f.

(g) Soit $\phi : \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{R}^6$ l'application

$$\phi\big([x : y : z]\big) = \left(x^2, y^2, z^2, \sqrt{2}yz, \sqrt{2}xz, \sqrt{2}xy \right).$$

Montrer que ϕ est un plongement.

(h) Montrer que l'image de ϕ est contenue dans S^5 et même dans l'intersection d'un hyperplan affine avec S^5.

(i) En déduire que $\mathbb{RP}^2$ admet un plongement dans $\mathbb{R}^4$.

(j) $\mathbb{RP}^2$ peut-il se plonger dans $\mathbb{R}^3$?

(k) Montrer que $\mathbb{RP}^{2m-1}$ est orientable pour $m \geq 1$.

7. *Ruban de Möbius.* Soit M le quotient de $\mathbb{R} \times]-1, 1[$ par la relation d'équivalence donnée par $(u, v) \sim (u', v')$ si et seulement si $u - u' \in \mathbb{Z}$ et $v = v'(-1)^{u-u'}$.

(a) Donner un atlas pour M.

(b) Construire un plongement $M \to \mathbb{R}^3$.

(c) Soit M' le sous-ensemble de $\mathbb{RP}^2$ représenté par $\{(x, y, z) \in S^2 : |z| < 1/2\}$. Montrer que $\mathbb{RP}^2 \setminus M'$ est difféomorphe à un disque fermé.

(d) Montrer que M' est difféomorphe à M, si bien que $\mathbb{RP}^2$ est obtenu en recollant un disque et un ruban de Möbius sur leur bord commun.

8. *Espaces de matrices.* Soit $\mathsf{M}_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$ l'ensemble des matrices carrées de taille n.

(a) Montrer que $\mathsf{SL}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{R}) : \det(A) = 1\}$ est une hypersurface.

(b) Montrer que $\mathsf{O}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathsf{M}_n(\mathbb{R}) : A^t A = \mathsf{I}_n\}$ est une sous-variété.

(c) Soit r un entier avec $0 \leq r \leq n$ et Σ_r l'espace des matrices de rang r. Montrer que Σ_r est une sous-variété.

9. *Produit.* Soit M et N deux variétés.

(a) Construire un atlas sur le produit $M \times N$.

(b) Montrer que les deux projections $M \times N \to M$ et $M \times N \to N$ sont C^∞.

(c) Décrire le fibré tangent de $M \times N$.

(d) Montrer que le produit $S^1 \times S^1$ est difféomorphe au tore T^2.

(e) Le produit $S^1 \times S^2$ est-il difféomorphe à S^3 ?

10. *Fibration de Hopf.* On considère $\mathbb{CP}^1$ le quotient de $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par la relation d'équivalence donnée par $(z_1, z_2) \sim (z_1', z_2')$ si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ non nul tel que $z_1' = \lambda z_1, z_2' = \lambda z_2$. On note $[z_1 : z_2]$ la classe d'équivalence de (z_1, z_2).

(a) Montrer que les applications $\psi_1, \psi_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{CP}^1$ données par $z \mapsto [z : 1]$ et $z \mapsto [1 : z]$, respectivement, définissent un atlas.

(b) Montrer que $\mathbb{CP}^1$ est difféomorphe à S^2.

(c) Soit S^3 la sphère unité de $\mathbb{C}^2$. Montrer que l'application $\pi : S^3 \to \mathbb{CP}^1$ donnée par $\pi(z_1, z_2) = [z_1 : z_2]$ est de classe C^∞.

(d) Montrer que π est une submersion. Décrire ses fibres, c'est-à-dire les images réciproques de points.