MAT4213 - Géométrie différentielle

Deuxième semestre — 2020-2021

Fiche 3: Calcul différentiel sur les surfaces de $\mathbb{R}^3$

1. *Définition des surfaces.* Soient $S \subseteq \mathbb{R}^3$, $p \in S$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer l'équivalence entre les assertions suivantes :

(S.1) (**Paramétrage**) il existe un voisinage ouvert $W \subseteq \mathbb{R}^2$ de $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}$ et une application $\psi : W \to \mathbb{R}^3$ de classe C^k telle que $d\psi(w)$ est injective pour tout $w \in W$, $\psi(W) \subseteq S$, $\psi(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}) = p$, $\psi : W \to \psi(W)$ est un homéomorphisme et $\psi(W)$ est un ouvert de S ;

(S.2) (**Redressement**) il existe un voisinage ouvert $U \subseteq \mathbb{R}^3$ de p, $V \subseteq \mathbb{R}^3$ un voisinage ouvert de $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}$ et $\phi : U \to V$ un difféomorphisme de classe C^k tel que $\phi(p) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}$ et $\phi(S \cap U) = (\mathbb{R}^2 \times \{0\}) \cap V$;

(S.3) (**Équation**) il existe un voisinage ouvert $U \subseteq \mathbb{R}^3$ de p et une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^k telle que $f(p) = 0$, $df(p) \neq 0$ et $f^{-1}(\{0\}) = S \cap U$;

(S.4) (**Graphe**) il existe un plan $P \subseteq \mathbb{R}^3$ et une droite $D \subseteq \mathbb{R}^3$ se coupant transversalement en p, $W' \subseteq P$ un voisinage ouvert de p, $V' \subseteq D$ un voisinage ouvert de p et $g : W' \to D$ une application de classe C^k telle que $g(p) = p$ et

$$S \cap \iota(W' \times V') = \Big\{\iota\big(x, g(x)\big) : x \in W'\Big\}, \tag{1}$$

où $\iota : P \times D \to \mathbb{R}^3$ est l'isomorphisme donné par $\iota(y,z) = y + z - p$.

On dit que S est une **surface de classe** C^k (plongée dans $\mathbb{R}^3$) si elle vérifie l'une des assertions ci-dessus en chacun de ses points.

Solution. On montre d'abord que (S.1) implique (S.2). Soit $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathsf{Img}(d\psi(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}))$, ce qui implique que $\langle v\rangle + \mathsf{Img}(d\psi(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2})) = \mathbb{R}^3$. On considère l'ouvert $W \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^3$ et l'application $\hat{\Psi} : W \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ donnée par $\hat{\Psi}(w,z) = \psi(w) + zv$, pour tout $w \in W$ et $z \in \mathbb{R}$. On voit bien que l'image de l'application linéaire $d\hat{\Psi}(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est $\langle v\rangle + \mathsf{Img}(d\psi(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2})) = \mathbb{R}^3$, ce qui nous dit que l'application $d\hat{\Psi}(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2})$ est surjective. Le théorème d'inversion locale nous dit qu'il existe des ouverts $W' \subseteq W$ et $J \subseteq \mathbb{R}$ tels que $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3} \in W' \times J$, $U' = \hat{\Psi}(V' \times J)$ est un ouvert et $\hat{\Psi}|_{W' \times J} : W' \times J \to U'$ est un C^k-difféomorphisme. On pose $V' = W' \times J$. Comme $\psi : W \to \mathsf{Img}(W)$ est un homéomorphisme, $\psi(W')$ est un ouvert de S incluant p, ce qui nous dit qu'il existe un ouvert $U'' \subseteq \mathbb{R}^3$ tel que $p \in S \cap U'' = \psi(W') = \hat{\Psi}|_{V'}(W' \times \{0\})$. Soit $U = U' \cap U''$ et $V = (\hat{\Psi}|_{V'})^{-1}(U) \subseteq V'$. Noter que $p \in U$ et $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3} \in V$. On voit bien que

$$\begin{aligned}\hat{\Psi}|_V\big((\mathbb{R}^2 \times \{0\}) \cap V\big) &= \hat{\Psi}|_{V'}\big((\mathbb{R}^2 \times \{0\}) \cap V\big) = \hat{\Psi}|_{V'}\big((W' \times \{0\}) \cap V\big) \\ &= \hat{\Psi}|_{V'}(W' \times \{0\}) \cap \hat{\Psi}|_{V'}(V) = S \cap U'' \cap U = S \cap U.\end{aligned}$$

Noter que la deuxième égalité est une conséquence directe de $(\mathbb{R}^2 \times \{0\}) \cap V' = (W' \times \{0\}) \cap V'$, et que la deuxième égalité est une conséquence du fait que $\hat{\Psi}|_{V'}$ est une bijection. Si l'on pose $\phi = (\hat{\Psi}|_V)^{-1}$, on trouve le résultat demandé.

La réciproque de l'implication précédente, *i.e.* (S.2) implique (S.1), est directe. En effet, il suffit de considérer un voisinage ouvert $W \subseteq \mathbb{R}^2$ de $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}$ et un intervalle ouvert $J \subseteq \mathbb{R}$

incluant 0 tels que $W \times J \subseteq V$. On considère aussi l'ouvert $U' = \phi(W \times J) \subseteq U$ et le C^k-difféomorphisme $\phi' = \phi|_{U'} : U' \to W \times J$. Noter que

$$\begin{aligned}\phi'(S \cap U') &= \phi(S \cap U \cap U') = \phi(S \cap U) \cap \phi(U') = (\mathbb{R}^2 \times \{0\}) \cap V \cap (W \times J)\\ &= (\mathbb{R}^2 \times \{0\}) \cap (W \times J) = W \times \{0\}.\end{aligned}$$

On définit l'application $\psi : W \to \mathbb{R}^3$ donnée par $\psi(w) = \phi'^{-1}(w,0)$, pour $w \in W$. C'est clair que $\psi(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}) = \phi'^{-1}(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}) = p$ et $d\psi(w) = d(\phi'^{-1})(w,0) \circ \mathsf{inc}$ est injectif pour tout $w \in W$, où $\mathsf{inc} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ est l'inclusion donnée par $w \mapsto (w,0)$ pour tout $w \in \mathbb{R}^2$. En outre,

$$\psi(W) = \phi'^{-1}\big(W \times \{0\}\big) = S \cap U',$$

ce qui nous dit que $\psi(W) \subseteq S$ est un ouvert de S. Finalement, on note que $\psi : W \to \psi(W)$ est un homéomorphisme, vu que sa réciproque est la composition de $\phi'|_{S \cap U'} : S \cap U \to W \times \{0\}$ et la projection $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ sur les deux premières coordonnées.

On va démontrer maintenant que (S.2) implique (S.3). Soit $U \subseteq \mathbb{R}^3$ comme dans (S.2) et $f : U \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par $f = \pi_3 \circ \phi$, où $\pi_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est la projection canonique sur la troisième coordonnée. Comme ϕ est π_3 sont des applications de classe C^k, f aussi. Noter que $f(p) = \pi_3(\phi(p)) = \pi_3(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}) = 0$. En outre, la règle de dérivation en chaîne nous dit que $df(p) = \pi_3 \circ d\phi(p)$, qui n'est pas nul, vu que $d\phi(p)$ est une application linéaire bijective. On note finalement que

$$f^{-1}\big(\{0\}\big) = \phi^{-1}\Big(\pi_3^{-1}\big(\{0\}\big)\Big) = \phi^{-1}\Big(\big(\mathbb{R}^2 \times \{0\}\big) \cap V\Big) = S \cap U.$$

On va démontrer maintenant que (S.3) implique (S.4). Comme $df(p) \neq 0$, le noyau a dimension 2. Soit $\Pi = \mathsf{Ker}(df(p)) \subseteq \mathbb{R}^3$ et soit $v \in \mathbb{R}^3$ non nul et orthogonal à P tel que $f(v) = 1$. On pose $D = \{p + \lambda v : \lambda \in \mathbb{R}\}$ et $P = \{p + w : w \in \Pi\}$. L'application $\iota : P \times D \to \mathbb{R}^3$ donnée par $\iota(p+w, p+\lambda v) = p + w + \lambda v$, pour $w \in \Pi$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, est un C^∞-diffeomorphisme. On définit $F : (P \times D) \cap \iota^{-1}(U) \to \mathbb{R}^3$ par $F(p+w, p+\lambda v) = w + f(p+w+\lambda v)v$, pour $w \in \Pi$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $p + w + \lambda v \in U$, ce qui nous dit que F est une application de classe C^k. On voit bien que $dF(p+w, p+\lambda v)(w', \lambda' v) = w' + df(p+w+\lambda v)(w' + \lambda' v)v$, pour $w, w' \in \Pi$ et $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$ tels que $p + w + \lambda v \in U$. En conséquence, $dF(p,p)$ est un isomorphisme linéaire, et le théorème d'inversion locale nous dit qu'il existe des ouverts $W' \subseteq P$ et $V' \subseteq D$ incluant p tels que $W' \times V' \subseteq \iota^{-1}(U)$, $F(W' \times V')$ est ouvert et $F|_{W' \times V'} : W' \times V' \to F(W' \times V')$ est un C^k-difféomorphisme. Soit $g : W' \to D$ l'application donnée par $g(p+w) = \pi_D(F^{-1}(w))$, où $\pi_D : P \times D \to D$ est la projection canonique. C'est clair que g est classe C^k et $g(p) = p$. Finalement,

$$\begin{aligned}S \cap \iota(W' \times V') &= \Big\{\iota(p+w, p+\lambda v) : p + w \in W', p + \lambda v \in' V, f(p+w+\lambda v) = 0\Big\}\\ &= \Big\{\iota\big(p+w, g(p+w)\big) : p + w \in W'\Big\}.\end{aligned}$$

Finalement, on montrera que (S.4) implique (S.2). Soient $\bar{W}' = \{w : p + w \in W'\}$ et $\bar{V}' = \{\lambda v : p + \lambda v \in V'\}$. On pose $\bar{V} = \{w + \lambda v : w \in \bar{W}', v \in \bar{V}'\}$ et $\bar{\psi} : \bar{V} \to \mathbb{R}^3$ l'application de classe C^k donnée par $\bar{\psi}(w + \lambda v) = w + g(p+w) + \lambda v$, pour $w \in \bar{W}'$ et $\lambda v \in \bar{V}'$. Noter que $\bar{\psi}(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}) = g(p) = p$ et $\bar{\psi}$ est injectif, car $\bar{\psi}(w + \lambda v) = \bar{\psi}(w' + \lambda' v)$ implique que $w = w'$, vu que P et D sont orthogonaux, ce qui nous dit que $\lambda = \lambda'$. Par ailleurs, comme $d\bar{\psi}(w+\lambda v)$ est un isomorphisme pour tout $w \in \bar{W}'$ et $\lambda v \in \bar{V}'$, on conclut que $\bar{U} = \bar{\psi}(\bar{V})$ est un ouvert et $\bar{\psi}$ est un C^k-difféomorphisme. Comme $p \in \bar{U}$ et $\bar{U}$ est un ouvert, on peut choisir des voisinages ouverts $W'' \subseteq W'$ et $V'' \subseteq V'$ de p tels que $\iota(W'' \times V'') \subseteq \bar{U}$. On pose $U = \iota(W'' \times V'')$, $V = \bar{\psi}^{-1}(U)$ et $\phi : U \to V$ l'application réciproque de $\psi = \bar{\psi}|_V : V \to U$. Finalement, on voit bien que

$$\begin{aligned}S \cap U = S \cap \iota(W'' \times V'') &= \Big\{w + g(p+w) : p + w \in W''\Big\} = \Big\{\psi(w) : p + w \in W''\Big\}\\ &= \psi\Big(\big(\mathbb{R}^2 \times \{0\}\big) \cap V\Big),\end{aligned}$$

comme on voulait démontrer.

2. Soit $S \subseteq \mathbb{R}^3$ une surface de classe C^k. Soient $W \subseteq \mathbb{R}^2$ un ouvert et $\varphi : W \to \mathbb{R}^3$ une application injective de classe C^k telle que $d\varphi(q)$ est injective pour tout $q \in W$ et $\mathsf{Img}(\varphi) \subseteq S$. Montrer que $\varphi(W)$ est ouvert dans S et que $\varphi : W \to \varphi(W)$ est un homéomorphisme.

Solution. Il suffit de montrer que, étant donné $q \in W$, il existe un voisinage ouvert $W' \subseteq W$ de q tel que $\varphi(W')$ est un ouvert de S et $\varphi|_{W'} : W' \to \varphi(W')$ est un homéomorphisme. On écrit $p = \varphi(q)$. Comme S est une surface de classe C^k, il existe un voisinage ouvert $U \subseteq \mathbb{R}^3$ de p, $V \subseteq \mathbb{R}^3$ un voisinage ouvert de $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}$ et $\phi : U \to V$ un difféomorphisme de classe C^k avec $\phi(S \cap U) = (\mathbb{R}^2 \times \{0\}) \cap V$. En remplaçant W par $W \cap \varphi^{-1}(U)$, on peut supposer sans perte de généralité que $\varphi(W) \subseteq U$. Comme ϕ est de classe C^k, $\phi \circ \varphi$ aussi. Or, comme $\phi(S \cap U) = (\mathbb{R}^2 \times \{0\}) \cap V$, on conclut que $(\phi \circ \varphi)(W) \subseteq (\mathbb{R}^2 \times \{0\}) \cap V$. Comme $d\phi(p)$ et $d\varphi(q)$ sont applications injectives, $d(\phi \circ \varphi)(q)$ aussi. En conséquence $d(\phi \circ \varphi)(q)$ est un isomorphisme linéaire, car la dimension de l'espace vectoriel d'arrivée de $d(\phi \circ \varphi)(q)$ est égale à celle du domaine de définition. Le théorème d'inversion locale nous dit qu'il existe un voisinage ouvert $W' \subseteq W$ de q tel que $(\phi \circ \varphi)(W')$ est ouvert et $(\phi \circ \varphi)|_{W'} : W' \to (\phi \circ \varphi)(W')$ est un C^k-difféomorphisme, et en particulier un homéomorphisme. Comme ϕ est un homéomorphisme et $\phi(S \cap U) = (\mathbb{R}^2 \times \{0\}) \cap V$, on conclut que $\varphi(W')$ est un ouvert de S et $\varphi|_{W'} : W' \to \varphi(W')$ est un homéomorphisme, comme on voulait démontrer.

3. *Sphère et projection stéréographique.* Soit S^2 la sphère de rayon 1 centrée en l'origine dans $\mathbb{R}^3$.

(a) Soit $n_\pm = (0,0,\pm 1) \in S$. Étant donné $p \in \mathbb{R}^2$, soit $L_{p,\pm} \subseteq \mathbb{R}^3$ la seule droite qui contient $(p,0) \in \mathbb{R}^3$ et $n_\pm$. Montrer que, étant donné $p \in \mathbb{R}^2$, l'intersection de $L_{p,\pm}$ et $S^2 \setminus \{n_\pm\}$ comporte un seul point, que l'on dénotera $\varphi_\pm(p)$. Calculer $\varphi_\pm(p)$ de façon explicite pour tout $p \in \mathbb{R}^2$ et conclure que $\varphi_\pm : \mathbb{R}^2 \to S^2 \setminus \{n_\pm\}$ est un morphisme bijectif tel que $\varphi_\pm(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}) = n_\mp$.

(b) Calculer le changement de cartes $(\varphi_+^{-1} \circ \varphi_-)|_{\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}\}}$.

(c) Le changement de cartes $(\varphi_+^{-1} \circ \varphi_-)|_{\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}\}}$ préserve-t-il l'orientation ? S^2 est-elle orientable ?

Solution.

(a) On voit bien que $L_{p,\pm} = \{(tp, \pm(1-t)) : t \in \mathbb{R}\}$. En conséquence, $x_\pm = (tp, \pm(1-t)) \in S^2$ si et seulement si $t^2\|p\|^2 + (1-t)^2 = 1$, *i.e.* $t^2(\|p\|^2+1) = 2t$. La solution $t = 0$ correspond à $x_\pm = n_\pm$, donc on ne va pas la considérer. On trouve que la seule solution de $x_\pm = (tp, \pm(1-t)) \in S^2 \setminus \{n_\pm\}$ est donnée par $t = 2/(\|p\|^2+1)$, *i.e.*

$$x_\pm = \left(\frac{2p}{\|p\|^2+1}, \pm\frac{\|p\|^2-1}{\|p\|^2+1}\right).$$

On définit alors

$$\varphi_\pm(p) = \left(\frac{2p}{\|p\|^2+1}, \pm\frac{\|p\|^2-1}{\|p\|^2+1}\right).$$

On voit bien que $\varphi_\pm(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}) = n_\mp$. En plus, on vérifie facilement que l'application $\psi_\pm : S^2 \setminus \{n_\pm\} \to \mathbb{R}^2$ donnée par $\psi_\pm(x,y,z) = (x/(1\mp z), y/(1\mp z))$ est la réciproque de $\varphi_\pm$.

(b) On voit bien que

$$(\varphi_+^{-1}\circ\varphi_-)(p) = \frac{\frac{2p}{\|p\|^2+1}}{1+\frac{\|p\|^2-1}{\|p\|^2+1}} = \frac{p}{\|p\|^2},$$

pour tout $p \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}\}$. On voit que S est une surface de classe C^∞.

(c) Non, car le déterminant de la matrice jacobienne de $(\varphi_+^{-1}\circ\varphi_-)|_{\mathbb{R}^2\setminus\{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}\}}$ est $-(x^2+y^2)^{-2} < 0$. Si l'on remplace φ_+ par $\varphi_+\circ\mathsf{inv}$, où $\mathsf{inv} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est l'application donnée par $\mathsf{inv}(x,y) = (y,x)$, on a un atlas orienté.

4. *Cône.* Soit $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}\} : x^2+y^2 = z^2\}$.

(a) Montrer que C est une surface avec deux composantes connexes.

(b) Recouvrir C par des cartes.

(c) Calculer le plan tangent en tout point $p_0 \in C$.

Solution.

(a) On note d'abord que $C_\pm = C \cap \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \pm z > 0\}$ est un ouvert de C et que $C = C_+ \sqcup C_-$. On considère l'application $\varphi_\pm : \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}\} \to \mathbb{R}^3$ donnée par $\varphi_\pm(x,y) = (x,y,\pm\sqrt{x^2+y^2})$. C'est clair que $\varphi_\pm$ est de classe C^∞ et injectif, $d\varphi_\pm$ est injectif et $\mathsf{Img}(\varphi_\pm) = C_\pm$. En plus $\varphi_\pm$ est un homémorphisme, vu que l'application réciproque est $\varphi_\pm^{-1} : C_\pm \to \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}\}$ est la restriction de la projection canonique $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ qui associe (x,y) à (x,y,z). En conséquence, C est une surface de classe C^∞. Comme $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}\}$ est connexe et $\varphi_\pm$ est continue, $C_\pm$ est aussi connexe. L'identité $C = C_+ \sqcup C_-$ nous dit que C_+ et C_- sont deux composantes connexes de C, vu qu'elles sont des parties ouvertes disjointes de C.

(b) Les cartes $(C_+, \pi|_{C_+})$ et $(C_-, \pi|_{C_-})$ forment un atlas de C.

(c) Soit $p_0 = \varphi_\pm(x_0,y_0) \in C_\pm$. Il suffit de calculer l'image de $d\varphi_\pm(x_0,y_0)$. On voit bien que

$$\frac{\partial\varphi_\pm}{\partial x}(x_0,y_0) = \left(1, 0, \frac{\pm x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}\right)$$

et

$$\frac{\partial\varphi_\pm}{\partial y}(x_0,y_0) = \left(0, 1, \frac{\pm y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}\right),$$

ce qui implique que un vecteur normal au plan tangent à C en p_0 est

$$\mp\sqrt{x_0^2+y_0^2}\,\frac{\partial\varphi_\pm}{\partial x}(x_0,y_0) \wedge \frac{\partial\varphi_\pm}{\partial y}(x_0,y_0) = \left(x_0, y_0, \mp\sqrt{x_0^2+y_0^2}\right),$$

et le plan tangent à C en p_0 est

$$xx_0 + yy_0 \mp z\sqrt{x_0^2+y_0^2} = 0.$$

5. *Tore.* Soient $0 < a < b$ et

$$S = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \big(\sqrt{x^2 + y^2} - b\big)^2 + z^2 = a^2\Big\}.$$

(a) Montrer que S est une surface.

(b) Recouvrir S par des cartes.

(c) Déterminer les **points critiques** de $h : S \to \mathbb{R}$ définie par $h(x, y, z) = x$, *i.e.* les points $p \in S$ tels que $dh(p)$ est la fonctionnelle linéaire nulle de T_pS.

Solution.

(a) Soit l'application $f : \mathbb{R}^3 \setminus (\{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}\} \times \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x, y, z) = \big(\sqrt{x^2 + y^2} - b\big)^2 + z^2 - a^2.$$

On voit bien que f est de classe C^∞. En plus, $S = f^{-1}(\{0\})$, vu que $S \cap (\{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}\} \times \mathbb{R}) = \emptyset$. On voit finalement que

$$\nabla f(x, y, z) = \left(2x \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - b}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 2y \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - b}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 2z\right) \neq \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3},$$

pour tout $(x, y, z) \in S$. D'après (S.3) on conclut que S est une surface de classe C^∞.

(b) On définit l'application $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ via

$$\varphi(\theta, \phi) = \Big(\cos(\theta)\big(b + a\cos(\phi)\big), \sin(\theta)\big(b + a\cos(\phi)\big), a\sin(\phi)\Big).$$

C'est clair que φ est de classe C^∞ et que $\mathrm{Img}(\varphi) = S$. En plus, soit $J =]0, \pi[$ et $I = [0, \pi]$. On voit bien que, étant donné $(\theta_0, \phi_0) \in \mathbb{R}^2$, les applications $\varphi_{\theta_0,\phi_0} = \varphi|_{(\theta_0+J)\times(\phi_0+J)} : (\theta_0 + J) \times (\psi_0 + J) \to \varphi((\theta_0 + J) \times (\phi_0 + J))$ et $\bar{\varphi}_{\theta_0,\phi_0} = \varphi|_{(\theta_0+I)\times(\phi_0+I)} : (\theta_0 + I) \times (\phi_0 + I) \to \varphi((\theta_0 + I) \times (\phi_0 + I))$ sont injectives et continues. Comme le domaine de définition de $\bar{\varphi}_{\theta_0,\phi_0}$ est compact, cette application est un homéomorphisme, ce qui implique que $\varphi_{\theta_0,\phi_0}$ est aussi un homéomorphisme. En plus, c'est facile à voir que S est la réunion des parties

$$\Big\{U_{\theta_0,\phi_0} = \varphi\big((\theta_0 + J) \times (\phi_0 + J)\big) : \theta_0, \phi_0 \in \{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2\}\Big\}.$$

On peut alors choisir l'atlas formé des cartes $(U_{\theta_0,\phi_0}, \varphi^{-1}_{\theta_0,\phi_0})$ pour les indices $\theta_0, \phi_0 \in \{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2\}$.

(c) Par définition, étant donné $p = \varphi(\theta, \phi)$,

$$dh(p) = d(h \circ \varphi)(\theta, \phi) = -\sin(\theta)(b + a\cos(\phi))d\theta - a\cos(\theta)\sin(\phi)d\phi.$$

En conséquence, la différentielle est nulle si et seulement si

$$\sin(\theta)(b + a\cos(\phi)) = a\cos(\theta)\sin(\phi) = 0.$$

Comme $b + a\cos(\phi) > 0$ pour tout $\phi \in \mathbb{R}$ et $a > 0$, les annulations précédentes sont équivalentes à

$$\sin(\theta) = \cos(\theta)\sin(\phi) = 0,$$

i.e. $\theta, \phi \in \pi\mathbb{Z}$. Cela nous dit que les points critiques de h sont de la forme $(\pm(b+a), 0, 0)$ et $(\pm(b - a), 0, 0)$.

6. *Surfaces de niveau d'une forme quadratique.* Soient $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une forme quadratique non dégénérée, $a \in \mathbb{R}$ et

$$\Sigma_a = \{p \in \mathbb{R}^3 : q(p) = a\}.$$

(a) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que Σ_a soit non vide.

(b) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que Σ_a soit compact.

(c) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que Σ_a soit une surface régulière.

Solution.

(a) Après un changement de variables orthogonal, on peut supposer sans perte de généralité que $q(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^{3} \epsilon_i x_i^2$, avec $\epsilon_i \in \{\pm 1\}$ pour tout $i \in [\![1, 3]\!]$. Si $\epsilon_i = 1$ pour tout $i \in [\![1, 3]\!]$, on dit que la forme quadratique q est définie positive. Dans ce cas, $\Sigma_a \neq \emptyset$ si et seulement si $a \geq 0$. Si $\epsilon_i = -1$ pour tout $i \in [\![1, 3]\!]$, on dit que forme quadratique q est définie négative. Dans ce cas $\Sigma_a \neq \emptyset$ si et seulement si $a \leq 0$. On dira que forme quadratique q est définie si elle est définie positive ou définie négative. S'il existe $i \neq j$ tels que $\epsilon_i = -\epsilon_j$, on dit que forme quadratique q est indéfinie. Dans ce cas $\Sigma_a \neq \emptyset$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

(b) On voit bien que, si la forme quadratique q est définie, alors Σ_a est compact, vu que Σ_a est fermé et borné, car $\Sigma_a \subseteq \bar{B}(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}, |a|)$. Si la forme quadratique q est indéfinie, alors l'ensemble Σ_a n'est pas compact, vu qu'il inclut la courbe non bornée $x_i^2 - x_j^2 = \epsilon_i a$.

(c) On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x_1, x_2, x_3) = q(x_1, x_2, x_3) - a$. C'est clair que f est de classe C^∞ et $\Sigma_a = f^{-1}(\{0\})$. On note aussi que $df(p)$ pour tout $p \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}\}$. D'après (S.3), S est une surface de classe C^∞ si $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3} \notin \Sigma_a$, *i.e.* si $a \neq 0$. Si la forme quadratique q est définie, alors $\Sigma_0 = \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}\}$, qui n'est pas un surface. On affirme par ailleurs que si la forme quadratique q est indéfinie, alors Σ_0 n'est pas une surface régulière. Plus précisément, on va démontrer qu'il n'existe aucun voisinage ouvert de $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}$ dans dans Σ_0 homéomorphe à une boule ouverte de $\mathbb{R}^2$. On suppose alors que $U \subseteq \Sigma_0$ est un voisinage ouvert $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}$ et $\phi : U \to B(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}, 1)$ est un homéomorphisme. On supposera sans parte de généralité que $\phi(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}$. En conséquence, $\phi|_{U \setminus \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}\}} = B(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}, 1) \setminus \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}\}$ est aussi un homéomorphisme. D'après l'exercice **4**, $U \setminus \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}\}$ n'est pas connexe tandis que $B(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}, 1) \setminus \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}\}$ est connexe. L'absurde nous dit que qu'il n'existe aucun voisinage ouvert de $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}$ dans Σ_0 homéomorphe à une boule ouverte de $\mathbb{R}^2$.

7. *Hyperboloïdes.*

(a) On considère $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2 - 1\}$, qui est appelé **hyperboloïde à deux nappes**.

- (i) Montrer que H a exactement deux composantes connexes H_+ et H_-.
- (ii) Déterminer la nature géométrique de l'intersection de H avec un plan (suivant la position du plan).
- (iii) Déterminer le plan tangent de H en tout point $p_0 \in H$.
- (iv) Recouvrir H par des cartes.

(b) On considère $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2 + 1\}$, qui est appelé **hyperboloïde à une nappe**.

- (i) Montrer que Σ est connexe.
- (ii) Déterminer l'intersection de Σ avec un plan horizontal.

(iii) Déterminer l'intersection de Σ avec un plan contenant l'axe z.
(iv) Déterminer l'intersection de Σ avec son plan tangent.
(v) Recouvrir Σ par des cartes.

Solution.

(*a*) (i) On note d'abord que $H_\pm = H \cap \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \pm z > 0\}$ est un ouvert de H et que $H = H_+ \sqcup H_-$. On considère l'application $\varphi_\pm : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ donnée par $\varphi_\pm(x,y) = (x,y,\pm\sqrt{1+x^2+y^2})$. C'est clair que $\varphi_\pm$ est de classe C^∞ et injectif, $d\varphi_\pm$ est injectif et $\mathrm{Img}(\varphi_\pm) = H_\pm$. En plus $\varphi_\pm$ est un homémorphisme, vu que l'application réciproque est $\varphi_\pm^{-1} : H_\pm \to \mathbb{R}^2$ est la restriction de la projection canonique $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ qui associe (x,y) à (x,y,z). En conséquence, H est une surface de classe C^∞. Comme $\mathbb{R}^2$ est connexe et $\varphi_\pm$ est continue, $H_\pm$ est aussi connexe. L'identité $H = H_+ \sqcup H_-$ nous dit que H_+ et H_- sont deux composantes connexes de H, vu qu'elles sont des parties ouvertes disjointes de H.

(ii) On suppose que l'intersection du plan Π et H n'est pas vide. Soient $p_0 = (x_0,y_0,z_0) \in H \cap \Pi$, et $v = (a,b,c)$ et $w = (a',b',c')$ deux vecteurs de norme 1, orthogonaux et parallèles au plan Π. Alors, $\Pi = \{(x_0+ta+sa', y_0+tb+sb', z_0+tc+sc') : t,s \in \mathbb{R}\}$, et l'intersection $\Pi \cap H$ est alors donnée par les points de la forme $p_0 + tv + sw$ tels que

$$(x_0+ta+sa')^2 + (y_0+tb+sb')^2 = (z_0+tc+sc')^2 - 1,$$

i.e.

$$t^2(a^2+b^2-c^2) + s^2(a'^2+b'^2-c'^2) + 2ts(aa'+bb'-cc') \\ + 2t(x_0a+y_0b-z_0c) + 2s(x_0a'+y_0b'-z_0c') = 0.$$

Cela nous dit que, si $H \cap \Pi$ est non vide, c'est une conique dans le plan Π.

(iii) Soit $p_0 = \varphi_\pm(x_0,y_0) \in H_\pm$. Il suffit de calculer l'image de $d\varphi_\pm(x_0,y_0)$. On voit bien que

$$\frac{\partial\varphi_\pm}{\partial x}(x_0,y_0) = \left(1, 0, \frac{\pm x_0}{\sqrt{1+x_0^2+y_0^2}}\right)$$

et

$$\frac{\partial\varphi_\pm}{\partial y}(x_0,y_0) = \left(0, 1, \frac{\pm y_0}{\sqrt{1+x_0^2+y_0^2}}\right),$$

ce qui implique que un vecteur normal au plan tangent à H en p_0 est

$$\mp\sqrt{1+x_0^2+y_0^2}\,\frac{\partial\varphi_\pm}{\partial x}(x_0,y_0) \wedge \frac{\partial\varphi_\pm}{\partial y}(x_0,y_0) = \left(x_0, y_0, \mp\sqrt{1+x_0^2+y_0^2}\right),$$

et le plan tangent à H en p_0 est

$$xx_0 + yy_0 \mp z\sqrt{1+x_0^2+y_0^2} + 1 = 0.$$

(iv) Les cartes $(H_+, \pi|_{H_+})$ et $(H_-, \pi|_{H_-})$ forment un atlas de H.

(*b*) (i) On considère l'application $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ donnée par

$$\varphi(\theta, z) = \left(\sqrt{1+z^2}\cos(\theta), \sqrt{1+z^2}\sin(\theta), z\right).$$

C'est clair que φ est de classe C^∞, donc *a fortiori* continue. En outre, on voit bien que $\mathrm{Img}(\varphi) = \Sigma$. Comme $\mathbb{R}^2$ est connexe, alors Σ aussi.

On remarque que la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2 - 1$ est de classe C^∞. En plus, $f^{-1}(\{0\}) = \Sigma$ et $df(x,y,z) \neq 0$ pour tout $(x,y,z) \in \Sigma$, vu que $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3} \notin \Sigma$. L'item (S.3) nous dit que Σ est une surface de classe C^∞. En outre, comme $d\varphi$ est injective, l'exercice **2** nous dit que $\varphi|_{J\times\mathbb{R}} : J \times \mathbb{R} \to \Sigma$ est un paramétrage local de Σ, pour tout $J \subseteq \mathbb{R}$ intervalle ouvert de longueur 2π.

(ii) Étant donné $z_0 \in \mathbb{R}$, soit Π_{z_0} le plan $z = z_0$. On voit bien que $\Pi_{z_0} \cap \Sigma = \{(x,y,z_0) : x^2+y^2 = 1+z_0^2\}$, *i.e.* un cercle horizontal de centre $(0,0,z_0)$ et de rayon $\sqrt{1+z_0^2}$.

(iii) Pour tout $(a,b) \in S^1$, on considère $\Pi_{a,b}$ le plan $bx = ay$. C'est clair que l'axe z est inclus dans $\Pi_{a,b}$ pour tout $(a,b) \in S^1$. Réciproquement, on voit bien que tout plan contenant l'axe z est de la forme $\Pi_{a,b}$, vu que $\Pi_{a,b}$ est le plan parallèle aux vecteurs $(0,0,1)$ et $(a,b,0)$ qui contient l'origine $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}$. En conséquence, tout élément de $\Pi_{a,b}$ s'écrit de forme unique comme (ta,tb,s), avec $t,s \in \mathbb{R}$. L'intersection $\Pi_{a,b} \cap \Sigma$ est donnée par les éléments (ta,tb,s) tels que $t^2(a^2+b^2) = s^2+1$, *i.e.* $t^2 = s^2+1$. En conséquence, $\Pi_{a,b} \cap \Sigma$ est formé de deux rames hyperboliques.

(iv) Soit $p_0 = \varphi(\theta_0,z_0) \in \Sigma$. Il suffit de calculer l'image de $d\varphi(\theta_0,z_0)$. On voit bien que

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}(\theta_0,z_0) = \Big(-\sqrt{1+z_0^2}\sin(\theta_0), \sqrt{1+z_0^2}\cos(\theta_0), 0\Big)$$

et

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}(\theta_0,z_0) = \left(\frac{z_0\cos(\theta_0)}{\sqrt{1+z_0^2}}, \frac{z_0\sin(\theta_0)}{\sqrt{1+z_0^2}}, 1\right),$$

ce qui implique que un vecteur normal au plan tangent à Σ en p_0 est

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}(\theta_0,z_0) \wedge \frac{\partial\varphi}{\partial z}(\theta_0,z_0) = \left(\sqrt{1+z_0^2}\cos(\theta_0), \sqrt{1+z_0^2}\sin(\theta_0), -z_0\right),$$

et le plan tangent à Σ en p_0 est

$$x\sqrt{1+z_0^2}\cos(\theta_0) + y\sqrt{1+z_0^2}\cos(\theta_0) - zz_0 - 1 = 0.$$

Un élément général (x,y,z) du plan tangent à Σ en p_0 est de la forme

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{1+z_0^2}\cos(\theta_0) - t\sin(\theta_0) + sz_0\cos(\theta_0), \\ y &= \sqrt{1+z_0^2}\sin(\theta_0) + t\cos(\theta_0) + sz_0\sin(\theta_0), \\ z &= z_0 + s\sqrt{1+z_0^2}, \end{aligned}$$

avec $s,t \in \mathbb{R}$. L'identité $x^2+y^2 = z^2+1$ (*i.e.* (x,y,z) est dans l'intersection de Σ et de son plan tangent en p_0) est dans ce cas équivalent à $t^2 = s^2$, *i.e.* $t = \pm s$.

(v) On voit bien que les cartes $(U_\pm, (\varphi|_{J_\pm\times\mathbb{R}})^{-1})$ forment un atlas de Σ, où $J_\pm$ est l'intervalle ouvert de centre $\pm\pi$ et de longueur 2π et $U_\pm = \varphi(J_\pm \times \mathbb{R})$.

8. *Discriminant.* Soit $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z^3 + xz + y = 0\}$.

(a) Montrer que Σ est une surface.

(b) Expliciter les points de Σ au voisinage desquels Σ est un graphe au dessus du plan $x = 0$.

(c) Soit $C = \{p \in \Sigma : (0,0,1)$ est parallèle à $T_p\Sigma\}$. Montrer que C est une courbe régulière.

(d) Déterminer le nombre de solutions (réelles) de l'équation $z^3 + xz + y = 0$ en fonction de x, y.

(e) Soit $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par $\pi(x,y,z) = (x,y)$. Donner une équation pour $\pi(C)$.

Solution.

(a) On considère l'application $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ donnée par $\psi(x,z) = (x, -xz - z^3, z)$, pour $x, z \in \mathbb{R}$. C'est clair que ψ est injectif, $d\psi(x,z)$ est injectif pour tout $(x,z) \in \mathbb{R}^2$ et que $\mathsf{Img}(\psi) = \Sigma$. En plus, comme la projection $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ donnée par $(x,y,z) \mapsto (x,z)$ est continue et sa restriction à Σ est la réciproque de $\psi : \mathbb{R}^2 \to \Sigma$, on conclut que Σ est un surface. En particulier, $(\Sigma, \pi|_\Sigma)$ est un atlas de Σ.

(b) Soit $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ l'application de classe C^∞ donnée par $g(x,y,z) = z^3 + xz + y$. C'est clair que $\Sigma = g^{-1}(\{0\})$. On veut calculer les points $p = (x,y,z) \in \Sigma$ tels qu'il existe un ouvert $V \subseteq \mathbb{R}^3$ tel que $p \in V$ et une application différentiable $f : W \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ telle que $\Sigma \cap V = \{(f(y,z), y, z) : (y,z) \in W\}$. Le théorème des fonctions implicites nous dit que $p = (x,y,z)$ satisfait la condition précédente si $\partial g/\partial x(x,y,z) \neq 0$, *i.e.* $z \neq 0$. C'est donc le cas en dehors de la droite d'équation $y = z = 0$.

(c) On voit bien que

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}(x,z) = (1, -z, 0)$$

et

$$\frac{\partial \psi}{\partial z}(x,z) = \big(0, -x - 3z^2, 1\big),$$

ce qui implique que un vecteur normal n au plan tangent à Σ en $p = \psi(x,y)$ est

$$-\frac{\partial \psi}{\partial x}(x,z) \wedge \frac{\partial \psi}{\partial z}(x,z) = \big(z, 1, x + 3z^2\big).$$

C'est clair que $(0,0,1)$ est parallèle au plan tangent à Σ en p si et seulement si $(0,0,1)$ est orthogonal à vecteur normal n, *i.e.* $x + 3z^2 = 0$. En conséquence, les points $\{(x,y,z) \in \Sigma : (0,0,1)$ est parallèle à $T_{(x,y,z)}\Sigma\}$ sont précisément donnés par

$$\begin{cases} z^3 + xz + y = 0, \\ 3z^2 + x = 0, \end{cases}$$

i.e. $x = -3z^2$ et $y = -z^3 - xz = 2z^3$. Si l'on considère l'application $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ donnée par

$$\gamma(t) = \big(-3t^2, 2t^3, t\big),$$

on voit bien que $\gamma'(t) = (-6t, 6t^2, 1) \neq \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On conclut que $C = \mathsf{Img}(\gamma)$ est une courbe régulière.

(d) Comme la fonction continue $f(z) = z^3 + xz + y$ tend vers $\pm\infty$ quand z tend vers $\pm\infty$, le théorème des valeurs intermédiaires nous dit que f admet au moins une racine, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$. Par ailleurs, le discriminant $\Delta = (z_1 - z_2)^2(z_2 - z_3)^2(z_3 - z_1)^2$ de d'un polynôme cubique $P = X^3 + aX + b = \prod_{i=1}^3 (X - z_i)$ est $\Delta = -4a^3 - 27b^2$ (voir l'exercice 11 de la fiche 2 d'Algèbre M1). Par définition, le polynôme P admet une racine multiple si et seulement si $\Delta = 0$. Par ailleurs, on remarque aussi que, comme

f est différentiable, le théorème des accroissements finis nous dit que, si $z_1 < z_2$ sont deux racines de f, il existe un point critique $z \in [z_1, z_2]$ de f.

Si $x > 0$, on voit que $\Delta = -4x^3 - 27y^2 < 0$, ce qui nous dit que f n'a pas de racines multiples. En outre, comme $f'(z) = 3z^2 + x > 0$ pour tout $z \in \mathbb{R}$, f n'admet pas de points critiques. Cela implique que f admet une unique racine réelle simple.

Si $x = 0$ et $y \neq 0$, on conclut facilement que f possède une seule racine réelle (comptée aussi avec multiplicité), donnée par $-\sqrt[3]{y}$. Si $x = y = 0$, $z = 0$ est la seule racine réelle de f, qui possède multiplicité 3.

On suppose désormais $x < 0$. Alors, f possède une racine réelle simple et une racine réelle double si et seulement si $4x^3 + 27y^2 = 0$, vu que f est un polynôme à coefficients réels. On suppose désormais aussi $4x^3 + 27y^2 \neq 0$, *i.e.* toutes les racines de f sont simples. Dans ce cas, f possède deux points critiques, donnés par $\pm\sqrt{|x|/3}$. En plus, $z_- = -\sqrt{|x|/3}$ est un maximum local de f et $z_+ = \sqrt{|x|/3}$ est un minimum local de f. Comme les racines de f sont simples, $f(z_-) \neq 0$ et $f(z_+) \neq 0$. On voit bien que f admet une seule racine réelle (simple) si et seulement si $f(z_-) < 0$ ou $f(z_+) > 0$. Comme

$$f(z_\pm) = z_\pm(z_\pm^2 + x) + y = z_\pm \frac{2x}{3} + y = y \pm 2\frac{(-x)^3}{27},$$

f admet une seule racine réelle si et seulement si $4x^3 + 27y^2 > 0$. Finalement, f admet trois racines réelles simples si et seulement si $4x^3 + 27y^2 < 0$.

(e) On voit bien que tout point dans l'image de l'application γ dans le troisième item (*i.e.* C) satisfait $4x^3 + 27y^2 = 0$. En outre, étant donné $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $4x^3 + 27y^2 = 0$, alors $x \leq 0$. Si l'on choisit $z = \mathsf{sgn}(y)\sqrt{-3x}$, où $\mathsf{sgn}(y) \in \{\pm 1, 0\}$ est le signe de y, le point $(x, y, z) \in C$, ce qui implique que $(x, y) \in \pi(C)$. Cela nous dit que $\pi(C) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^3 + 27y^2 = 0\}$.

9. *Parapluie de Whitney.* Soit $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'application $\phi(u, v) = (uv, v, u^2)$ et soit $\bar{S} = \mathsf{Img}(\phi)$.

(a) Montrer que $\bar{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 = zy^2\}$.

(b) Montrer que ϕ est régulière sauf en l'origine et que $\phi(\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}\}) = \bar{S} \setminus \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}\}$.

(c) Montrer que la demi-droite $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = 0, z > 0\}$ est constitué de points doubles pour $\bar{S} \setminus \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}\}$.

(d) Calculer un vecteur normal unitaire à $\bar{S} \setminus \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}\}$ et montrer que celui-ci ne se prolonge pas en l'origine.

(e) Trouver la partie $S \subseteq \bar{S} \setminus \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}\}$ formé des points où $\bar{S} \setminus \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}\}$ est une surface.

Solution.

(a) C'est clair que $\mathsf{Img}(\phi) \subseteq \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 = zy^2\}$, vu que $(uv)^2 = u^2v^2$. Réciproquement, soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x^2 = zy^2$. On remarque d'abord que $z \geq 0$. Soit $\epsilon = \mathsf{sgn}(xy) \in \{-1, 1\}$ le signe de xy si $xy \neq 0$ et $\epsilon = 1$ si $xy = 0$. Alors, $\phi(\epsilon\sqrt{z}, y) = (x, y, z)$.

(b) On voit bien que

$$\frac{\partial \phi}{\partial u}(u, v) = (v, 0, 2u) \text{ et } \frac{\partial \phi}{\partial v}(u, v) = (u, 1, 0),$$

ce qui nous dit que

$$\frac{\partial \phi}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial \phi}{\partial v}(u,v) = (-2u, 2u^2, v) \neq \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}$$

si et seulement si $(u,v) \neq \mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}$. La dernière égalité dans l'énoncé est immédiate.

(*c*) On voit bien que $\phi(u,0) = (0,0,u^2)$, pour tout $u \in \mathbb{R}$, ce qui implique que tout point $(0,0,z)$ avec $z > 0$ est l'image par ϕ de deux points différents dans le domaine de ϕ.

(*d*) Le vecteur unitaire à $\bar{S} \setminus \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}\}$ (à multiplication par ± 1 près) est

$$\frac{\frac{\partial \phi}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial \phi}{\partial v}(u,v)}{\left\| \frac{\partial \phi}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial \phi}{\partial v}(u,v) \right\|} = \frac{(-2u, 2u^2, v)}{\sqrt{4u^2 + 4u^4 + v^2}}.$$

On va montrer que la limite

$$\lim_{(u,v) \to \mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}} \frac{(-2u, 2u^2, v)}{\sqrt{4u^2 + 4u^4 + v^2}}$$

n'existe pas. En effet, si elle existe, alors elle coïncide avec

$$\lim_{v \to 0\pm} \frac{(0,0,v)}{|v|} = (0,0,\pm 1).$$

Comme $(0,0,1) \neq (0,0,-1)$ on conclut que la limite demandée n'existe pas.

(*e*) Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ l'application donnée par $f(x,y,z) = x^2 - zy^2$. C'est clair que f est de classe C^∞ et que $\bar{S} = f^{-1}(\{0\})$. En outre,

$$df = 2x dx - 2yz dy - y^2 dz$$

nous dit que df ne s'annule pas sur les points $(x,y,z) \in \bar{S}$ tels que $(x,y) \neq (0,0)$. En conséquence, $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus (\{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}\} \times \mathbb{R}_{\geq 0}) : x^2 = zy^2\}$ est une surface de classe C^∞. C'est facile à voir que $S = \phi(\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R} \times \{0\}))$.

On affirme par ailleurs que $\bar{S}$ n'est pas une surface en n'importe quel point de $(\{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}\} \times \mathbb{R}_{\geq 0}) \subseteq \bar{S}$. Soit $p_0 = (0,0,z_0)$ avec $z_0 \geq 0$. On suppose d'abord $z_0 > 0$. On considère les courbes $\alpha_\pm : \mathbb{R} \to \bar{S}$ données par $\alpha_\pm(t) = (\pm\sqrt{z_0}t, t, \sqrt{z_0})$, pour $t \in \mathbb{R}$, et $\beta : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \bar{S}$ donnée par $\beta(t) = (0,0,t)$, pour $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Noter que $\alpha_\pm(0) = p_0$ et $\beta(\sqrt{z_0}) = p_0$. Si $\bar{S}$ est une surface en p_0, alors $\alpha'_\pm(0) = (\pm\sqrt{z_0}, 1, 0) \in T_{p_0}\bar{S}$ et $\beta'(\sqrt{z_0}) = (0,0,1) \in T_{p_0}\bar{S}$. Cela impliquerait que $T_{p_0}\bar{S}$ a dimension 3 ce qui est absurde. Si $z_0 = 0$, l'item précédent nous dit que $\bar{S}$ n'est pas une surface en $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}$, comme on voulait démontrer.

10. *Conoïde de Plücker.* Soit $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z(x^2 + y^2) = xy\}$.

(*a*) Déterminer les points où S est une surface.

(*b*) Montrer que cette surface est réglée, c'est-à-dire réunion de droites affines.

Solution.

(*a*) Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par $f(x,y,z) = z(x^2 + y^2) - xy$. Noter que $S = f^{-1}(\{0\})$. C'est clair que f est de classe C^∞ et

$$df(x,y,z) = (2zx - y)dx + (2yz - x)dy + (x^2 + y^2)dz \neq 0$$

pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $(x,y) \neq \mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}$. D'après (S.3), $S \setminus (\{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}\} \times \mathbb{R})$ est une surface de classe C^∞.

Montrons enfin que S n'est pas une surface en chaque point de type $(0,0,z_0)$, avec $z_0 \in \mathbb{R}$. On suppose d'abord que $|z_0| \geq 1/2$ et soit $V \subseteq \mathbb{R}^3$ un voisinage ouvert de $(0,0,z_0)$ et $\psi : B(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2},1) \to S \cap V$ un homéomorphisme, où $B(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2},1) \subseteq \mathbb{R}^2$ est la boule unité ouverte. On voit bien qu'il existe $(0,0,z_0') \in V$ avec $|z_0'| > 1/2$ et que $(S \cap V) \setminus \{(0,0,z_0')\}$ possède (au moins) deux composantes connexes. Par ailleurs, $B(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2},1) \setminus \{\psi^{-1}(0,0,z_0')\}$ est connexe et homéomorphe à $(S \cap V) \setminus \{(0,0,z_0')\}$, ce qui est absurde.

On suppose désormais $|z_0| < 1/2$. En coordonnées cylindriques, l'équation de $S \cap \{(x,y,z) : x^2 + y^2 \neq 0\}$ s'écrit $z = \sin(2\theta)/2$. On trouve deux valeurs de θ dans $[0,2\pi[$ non congrues modulo π avec $z_0 = \sin(2\theta)/2$. Ainsi Σ contient 2 droites distinctes dans le plan $z = z_0$. Comme elle contient aussi la droite $x = y = 0$ l'espace tangent à S serait de dimension trois ce qui est impossible.

(b) Soit $(x_0,y_0,z_0) \in S$. On va montrer qu'il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ non nul tel que $(x,y,z) = (x_0 + \lambda a, y_0 + \lambda b, z_0 + \lambda c) \in S$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. La condition $(x,y,z) = (x_0 + \lambda a, y_0 + \lambda b, z_0 + \lambda c) \in S$ équivaut à

$$\lambda^3 c(a^2+b^2) + \lambda^2\big(z_0(a^2+b^2) + 2c(ax_0 + by_0) - ab\big) + \lambda\big(2z_0(ax_0+by_0) + c(x_0^2+y_0^2) - (ay_0 + bx_0)\big) = 0.$$

Comme cette égalité est valable pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la condition demandée sur (a,b,c) est équivalente au système

$$\begin{cases} c(a^2+b^2) = 0, \\ z_0(a^2+b^2) + 2c(ax_0+by_0) - ab = 0, \\ 2z_0(ax_0+by_0) + c(x_0^2+y_0^2) - (ay_0+bx_0) = 0. \end{cases}$$

Si $(x_0,y_0) \neq \mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}$, on voit que $a = x_0$, $b = y_0$ et $c = 0$ est une solution. Si $(x_0,y_0) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}$, on voit bien que $a = b = 0$ et $c = 1$ est une solution.

11. *Une surface.* Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et soit

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_{\neq 0} : z = xf\left(\frac{y}{z}\right)\right\}.$$

(a) Montrer que S est une surface de $\mathbb{R}^3$.

(b) Montrer que tous les plans tangents à S contiennent l'origine.

Solution.

(a) Noter d'abord que $(x,y,z) \in S$ implique $x \neq 0$. Soit $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par $g(x,y,z) = z - xf(y/z)$. Noter que $S = g^{-1}(\{0\})$. C'est clair que g est de classe C^1 et

$$dg(x,y,z) = -f(y/z)dx - \frac{xf'(y/z)}{z}dy + \frac{z^2 + xf'(y/z)}{z^2}dz \neq 0$$

pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. D'après (S.3), S est une surface de classe C^1.

(b) Un vecteur normal au plan tangent à S en $p_0 = (x_0,y_0,z_0) \in S$ est

$$\left(-f(y_0/z_0), -\frac{x_0 f'(y_0/z_0)}{z_0}, \frac{z_0^2 + x_0 y_0 f'(y_0/z_0)}{z_0^2}\right),$$

et le plan tangent à S en p_0 est

$$-(x-x_0)f(y_0/z_0)-(y-y_0)\frac{x_0f'(y_0/z_0)}{z_0}+(z-z_0)\frac{z_0^2+x_0y_0f'(y_0/z_0)}{z_0^2}=0.$$

En conséquence, $(0,0,0)\in T_{p_0}S$ si et seulement si

$$-x_0f(y_0/z_0)-y_0\frac{x_0f'(y_0/z_0)}{z_0}+z_0\frac{z_0^2+x_0y_0f'(y_0/z_0)}{z_0^2}=0,$$

qui suit directement de $z_0=x_0f(y_0/z_0)$.

12. *Plan tangent.* Soit S une surface de $\mathbb{R}^3$ et P un plan affine qui rencontre S en un unique point p.

(a) Montrer que P est le plan tangent à S en p.

(b) La réciproque est-elle vraie ?

Solution.

(a) On peut supposer sans perte de généralité, après avoir appliqué une symétrie rigide de l'espace, que $p=\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}$ et que P est le plan $z=0$. Soit $\psi: B(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2},1)\to\psi(B(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2},1))$ une application telle que $\psi(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2})=p$, $d\psi(q)$ est injectif pour tout $q\in B(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2},1)$, $U=\psi(\psi(B(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2},1)))$ est un ouvert de S et ψ est un homéomorphisme. Par hypothèse, $U\cap\{(x,y,0):x,y\in\mathbb{R}\}=\{p\}$, et comme $B(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2},1)\setminus\{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}\}$ est connexe, on conclut que $U\setminus\{p\}\subseteq\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}_{>0}$ ou $U\setminus\{p\}\subseteq\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}_{<0}$. On suppose que sans perte de généralité que $U\setminus\{p\}\subseteq\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}_{>0}$.

Soit $v\in\mathbb{R}^3$ un vecteur tangent à S en p, *i.e.* il existe une courbe $\gamma: J\to\mathbb{R}^3$ de classe C^1 avec J un intervalle incluant 0, $\gamma(J)\subseteq S$, $\gamma(0)=p$ et $\gamma'(0)=v$. On écrit alors $\gamma(t)=(x(t),y(t),z(t))$, pour $t\in J$. Cela nous dit que $t\mapsto z(t)$ admet un minimum en $t=0$, ce qui implique que $z'(0)=0$. En conséquence, la coordonnée z de v est nulle. Comme tout vecteur tangent à S en p est inclut dans P, le plan tangent à S en p coïncide avec P.

(b) Non. Prendre par exemple la surface S déterminée par l'application $\psi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ donnée par $\psi(x,y)=(x,y,(x^2+y^2-1)(x^2+y^2-2))$. Le plan tangent P de S en $p=(0,0,2)$ est donné par $z=2$, mais $P\cap S=\{p\}\cup\{(x,y,2):x^2+y^2=3\}$.

13. *Sous-surface.* Soit U un sous-ensemble d'une surface S de $\mathbb{R}^3$. Montrer que U est une surface si et seulement si U est un ouvert de S.

Solution. Montrons d'abord que si U est un ouvert de S, alors U est une surface. On prend $p\in U$ et on applique la définition (par paramétrage) du fait que S est une surface au point p. On trouve alors W ouvert de $\mathbb{R}^2$, $w\in W$ et $\psi:W\to S$ immersion avec $\psi(w)=p$, $\psi(W)$ ouvert de S et ψ homéomorphisme sur son image. On pose alors $W'=\psi^{-1}(U)$ qui est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ car U est un ouvert de S. De plus $\psi(W')=U\cap\psi(W)$ est un ouvert de U car intersection d'un ouvert de S avec U. Ainsi $\psi'=\psi_{|W'}:W'\to U$ a toutes les propriétés requises et U est une surface en p.

Réciproquement, supposons que U soit une surface en p et montrons que U est alors un voisinage ouvert de p dans S. On commence par le cas où S est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ lui même vu comme $\mathbb{R}^2 \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^3$. On applique alors la définition (par paramétrage) du fait que U est une surface en p. On trouve $\psi : W \to U \subseteq \mathbb{R}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ immersion avec W ouvert de $\mathbb{R}^2$, $w \in W$ et $\psi(w) = p$. La différentielle de ψ en w induit un isomorphisme $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, et donc par le théorème d'inversion locale, $\psi(W)$ est un voisinage ouvert de p dans $\mathbb{R}^2$. Donc U est un voisinage ouvert de p dans S. Pour le cas général, on applique d'abord la définition par redressement du fait que S est une surface en p pour se ramener au cas où S est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ (on a le droit de remplacer S par un ouvert de S pour ce que l'on veut montrer).

14. *Stokes I.* Soient $\gamma : [-1,1] \to \mathbb{R}^2$ la courbe définie par $\gamma(t) = (t, t^2)$ et la 1-forme donnée par $\alpha = y^2 dx + 2xy dy \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$.

(*a*) Calculer $\int_\gamma \alpha$.

(*b*) Trouver une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $\alpha = df$ et vérifier la formule de Stokes

$$\int_\gamma \alpha = f\big(\gamma(1)\big) - f\big(\gamma(-1)\big).$$

Solution.

(*a*) On voit bien que

$$\gamma^*\alpha(t) = t^4 dt + 2t^3 2t dt = 5t^4 dt,$$

ce qui nous dit que

$$\int_\gamma \alpha = \int_{-1}^1 \gamma^*\alpha = \int_{-1}^1 5t^4 dt = [t^5]_{-1}^1 = 2.$$

(*b*) On voit bien que $\alpha = df$ pour $f(x,y) = xy^2$. Par ailleurs, on a

$$\int_\gamma \alpha = 2 = f(1,1) - f(-1,1) = f\big(\gamma(1)\big) - f\big(\gamma(-1)\big).$$

15. *Angle.* Soit $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ une application de classe C^1 telle que $\gamma(0) = \gamma(1)$ et soit

$$\alpha = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} \in \Omega^1\big(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}\big).$$

(*a*) Montrer que $\int_\gamma \alpha/2\pi$ est un entier.

(*b*) La 1-forme α est-elle fermée ? exacte ?

Solution.

(*a*) En employant l'identification $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ donnée par $(x,y) \mapsto x + iy$, on écrira $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, pour $t \in [0,1]$. En outre, on affirme qu'il existe deux applications $r : [0,1] \to \mathbb{R}_{>0}$ et $\theta : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telles que $x(t) = r(t)\cos(\theta(t))$ et

$y(t) = r(t)\sin(\theta(t))$. En effet, on définit d'abord $r(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$. En outre, on pose $\eta(t) = \gamma(t)/r(t) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et

$$\theta(t) = \theta(0) - i \int_0^t \frac{\eta'(u)}{\eta(u)} du,$$

avec $\theta(0) \in [0, 2\pi[$ unique tel que $e^{i\theta(0)} = \eta(0)$. On voit bien que θ est une application de classe C^1 et

$$\left(\frac{e^{i\theta(t)}}{\eta(t)}\right)' = e^{i\theta(t)} \frac{i\theta'(t)\eta(t) - \eta'(t)}{\eta(t)^2} = 0$$

pour tout $t \in]0,1[$, car $\theta'(t) = -\eta'(t)/\eta(t)$, ce qui implique qu'il existe $C \in \mathbb{C}$ tel que $e^{i\theta(t)} = C\eta(t)$, pour tout $t \in [0,1]$. En évaluant en $t = 0$ on trouve que $\eta(t) = e^{i\theta(t)}$, pour tout $t \in [0,1]$, comme on voulait démontrer. Noter que $\eta(1) = \eta(0)$, car la courbe γ est fermée, ce qui nous dit que $\theta(1) - \theta(0)$ est un multiple entier de 2π.

Finalement,

$$\int_\gamma \alpha = \int_0^1 \gamma^*\alpha(t)dt = \int_0^1 \frac{x(t)y'(t) - y(t)x'(t)}{x(t)^2 + y(t)^2} dt = \int_0^1 \theta'(t)dt = \theta(1) - \theta(0) \in 2\pi\mathbb{Z},$$

où l'on a utilisé que

$$x'(t) = r'(t)\cos(\theta(t)) - r(t)\sin(\theta(t))\theta'(t)$$

et

$$y'(t) = r'(t)\sin(\theta(t)) + r(t)\sin(\theta(t))\theta'(t).$$

(b) Un calcul élémentaire montre que $d\alpha = 0$, *i.e.* la 1-forme α est fermée. Par contre α n'est pas exacte, car dans ce dernier cas

$$\int_\gamma \alpha = 0,$$

mais si $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ est donné par $\gamma(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$, alors

$$\gamma^*\alpha(t) = 2\pi dt,$$

ce qui nous dit que

$$\int_\gamma \alpha = 2\pi \int_0^1 dt = 2\pi.$$

16. *Stokes II.* Soient S^2 la sphère unité de $\mathbb{R}^3$ et la 2-forme différentielle donnée par $\alpha = x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$.

(a) Calculer $d\alpha$.

(b) Montrer que α est non-nulle sur chaque espace tangent à S^2. En déduire que S^2 est orientable.

(c) Calculer $\int_{S^2} \alpha$.

(d) En utilisant les paramétrages $z = \pm\sqrt{1 - x^2 - y^2}$, recalculer $\int_{S^2} \alpha$.

Solution.

(*a*) On voit bien que $d\alpha = 3dx \wedge dy \wedge dz$.

(*b*) On voit que α ne s'annule pas car c'est le produit intérieur de $dx \wedge dy \wedge dz$ par le champ de vecteur radial $x\partial/\partial x + y\partial/\partial y + z\partial/\partial z$. En conséquence, α est une forme volume sur S^2 ce qui montre à nouveau que S^2 est orientable.

(*c*) Comme $S^2 = \partial\bar{B}$, où $\bar{B}$ est la boule unité fermée, le théorème de Stokes nous dit que

$$\int_{S^2} \alpha = \int_{\partial\bar{B}} \alpha = \int_{\bar{B}} d\alpha = 3\int_{\bar{B}} dxdydz = 3\,\mathsf{Vol}(\bar{B}) = 4\pi.$$

(*d*) Soit $\psi_\pm : B(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}, 1) \to \mathbb{R}^3$ l'application $\psi_\pm(x,y) = (x, y, \pm\sqrt{1-x^2-y^2})$. C'est facile à vérifier que $\psi_\pm$ donne un paramétrage local de S^2, dont l'image est $S^2_\pm = S^2 \cap \{(x,y,z) : \pm z > 0\}$. Comme $S^2 \cap \{(x,y,z) : z = 0\}$ a mesure nulle, on conclut que

$$\int_{S^2} \alpha = \int_{S^2_+} \alpha + \int_{S^2_-} \alpha.$$

Noter par ailleurs que ψ_+ et ψ_- ont des orientations contraires. En effet, le vecteur normal induit par $\psi_\pm$ est

$$n_\pm(x,y) = \frac{\partial\psi_\pm}{\partial x}(x,y) \wedge \frac{\partial\psi_\pm}{\partial y}(x,y) = \left(\pm\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \pm\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, 1\right),$$

pour tout $(x,y) \in B(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}, 1)$, ce qui implique que $n_+(x,y)$ est extérieur à la sphère S^2 tandis que $n_-(x,y)$ est intérieur à S^2. En particulier, on a

$$\int_{S^2_\pm} \alpha = \pm\int_{B(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2},1)} \psi_\pm^*\alpha.$$

Comme

$$\psi_\pm^*\alpha = \pm\frac{dx \wedge dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}.$$

on voit bien que

$$\int_{S^2_\pm} \alpha = \int_{B(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2},1)} \frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = \int_0^1\int_0^{2\pi} \frac{rdrd\theta}{\sqrt{1-r^2}} = -2\pi\Big[\sqrt{1-r^2}\Big]_0^1 = 2\pi.$$

On trouve alors

$$\int_{S^2} \alpha = 4\pi.$$