MAT4213 - Géométrie différentielle

Deuxième semestre — 2020-2021

Fiche 3: Calcul différentiel sur les surfaces de $\mathbb{R}^3$

1. *Définition des surfaces.* Soient $S \subseteq \mathbb{R}^3$, $p \in S$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer l'équivalence entre les assertions suivantes :

(S.1) (**Paramétrage**) il existe un voisinage ouvert $W \subseteq \mathbb{R}^2$ de $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}$ et une application $\psi : W \to \mathbb{R}^3$ de classe C^k telle que $d\psi(w)$ est injective pour tout $w \in W$, $\psi(W) \subseteq S$, $\psi(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}) = p$, $\psi : W \to \psi(W)$ est un homéomorphisme et $\psi(W)$ est un ouvert de S ;

(S.2) (**Redressement**) il existe un voisinage ouvert $U \subseteq \mathbb{R}^3$ de p, $V \subseteq \mathbb{R}^3$ un voisinage ouvert de $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}$ et $\phi : U \to V$ un difféomorphisme de classe C^k tel que $\phi(p) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}$ et $\phi(S \cap U) = (\mathbb{R}^2 \times \{0\}) \cap V$;

(S.3) (**Équation**) il existe un voisinage ouvert $U \subseteq \mathbb{R}^3$ de p et une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^k telle que $f(p) = 0$, $df(p) \neq 0$ et $f^{-1}(\{0\}) = S \cap U$;

(S.4) (**Graphe**) il existe un plan $P \subseteq \mathbb{R}^3$ et une droite $D \subseteq \mathbb{R}^3$ se coupant transversalement en p, $W' \subseteq P$ un voisinage ouvert de p, $V' \subseteq D$ un voisinage ouvert de p et $g : W' \to D$ une application de classe C^k telle que $g(p) = p$ et

$$S \cap \iota(W' \times V') = \Big\{\iota\big(x, g(x)\big) : x \in W'\Big\}, \tag{1}$$

où $\iota : P \times D \to \mathbb{R}^3$ est l'isomorphisme donné par $\iota(y,z) = y + z - p$.

On dit que S est une **surface de classe C^k** (plongée dans $\mathbb{R}^3$) si elle vérifie l'une des assertions ci-dessus en chacun de ses points.

2. Soit $S \subseteq \mathbb{R}^3$ une surface de classe C^k. Soient $W \subseteq \mathbb{R}^2$ un ouvert et $\varphi : W \to \mathbb{R}^3$ une application injective de classe C^k telle que $d\varphi(q)$ est injective pour tout $q \in W$ et $\mathrm{Img}(\varphi) \subseteq S$. Montrer que $\varphi(W)$ est ouvert dans S et que $\varphi : W \to \varphi(W)$ est un homéomorphisme.

3. *Sphère et projection stéréographique.* Soit S^2 la sphère de rayon 1 centrée en l'origine dans $\mathbb{R}^3$.

(a) Soit $n_\pm = (0,0,\pm 1) \in S$. Étant donné $p \in \mathbb{R}^2$, soit $L_{p,\pm} \subseteq \mathbb{R}^3$ la seule droite qui contient $(p,0) \in \mathbb{R}^3$ et $n_\pm$. Montrer que, étant donné $p \in \mathbb{R}^2$, l'intersection de $L_{p,\pm}$ et $S^2 \setminus \{n_\pm\}$ comporte un seul point, que l'on dénotera $\varphi_\pm(p)$. Calculer $\varphi_\pm(p)$ de façon explicite pour tout $p \in \mathbb{R}^2$ et conclure que $\varphi_\pm : \mathbb{R}^2 \to S^2 \setminus \{n_\pm\}$ est un morphisme bijectif tel que $\varphi_\pm(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}) = n_\mp$.

(b) Calculer le changement de cartes $(\varphi_+^{-1} \circ \varphi_-)|_{\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}\}}$.

(c) Le changement de cartes $(\varphi_+^{-1} \circ \varphi_-)|_{\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}\}}$ préserve-t-il l'orientation ? S^2 est-elle orientable ?

4. *Cône.* Soit $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}\} : x^2 + y^2 = z^2\}$.

(a) Montrer que C est une surface avec deux composantes connexes.

(b) Recouvrir C par des cartes.

(c) Calculer le plan tangent en tout point $p_0 \in C$.

5. *Tore.* Soient $0 < a < b$ et

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \left(\sqrt{x^2+y^2} - b\right)^2 + z^2 = a^2\right\}.$$

(a) Montrer que S est une surface.

(b) Recouvrir S par des cartes.

(c) Déterminer les **points critiques** de $h : S \to \mathbb{R}$ définie par $h(x,y,z) = x$, *i.e.* les points $p \in S$ tels que $dh(p)$ est la fonctionnelle linéaire nulle de T_pS.

6. *Surfaces de niveau d'une forme quadratique.* Soient $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une forme quadratique non dégénérée, $a \in \mathbb{R}$ et

$$\Sigma_a = \left\{p \in \mathbb{R}^3 : q(p) = a\right\}.$$

(a) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que Σ_a soit non vide.

(b) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que Σ_a soit compact.

(c) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que Σ_a soit une surface régulière.

7. *Hyperboloïdes.*

(a) On considère $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2 - 1\}$, qui est appelé **hyperboloïde à deux nappes**.

- (i) Montrer que H a exactement deux composantes connexes H_+ et H_-.
- (ii) Déterminer la nature géométrique de l'intersection de H avec un plan (suivant la position du plan).
- (iii) Déterminer le plan tangent de H en tout point $p_0 \in H$.
- (iv) Recouvrir H par des cartes.

(b) On considère $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2 + 1\}$, qui est appelé **hyperboloïde à une nappe**.

- (i) Montrer que Σ est connexe.
- (ii) Déterminer l'intersection de Σ avec un plan horizontal.
- (iii) Déterminer l'intersection de Σ avec un plan contenant l'axe z.
- (iv) Déterminer l'intersection de Σ avec son plan tangent.
- (v) Recouvrir Σ par des cartes.

8. *Discriminant.* Soit $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z^3 + xz + y = 0\}$.

(a) Montrer que Σ est une surface.

(b) Expliciter les points de Σ au voisinage desquels Σ est un graphe au dessus du plan $x = 0$.

(c) Soit $C = \{p \in \Sigma : (0,0,1) \text{ est parallèle à } T_p\Sigma\}$. Montrer que C est une courbe régulière.

(d) Déterminer le nombre de solutions (réelles) de l'équation $z^3 + xz + y = 0$ en fonction de x, y.

(e) Soit $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par $\pi(x,y,z) = (x,y)$. Donner une équation pour $\pi(C)$.

9. *Parapluie de Whitney.* Soit $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'application $\phi(u,v) = (uv, v, u^2)$ et soit $\bar{S} = \mathsf{Img}(\phi)$.

(a) Montrer que $\bar{S} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 = zy^2\}$.
(b) Montrer que ϕ est régulière sauf en l'origine et que $\phi(\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}\}) = \bar{S} \setminus \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}\}$.
(c) Montrer que la demi-droite $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = 0, z > 0\}$ est constitué de points doubles pour $\bar{S} \setminus \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}\}$.
(d) Calculer un vecteur normal unitaire à $\bar{S} \setminus \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}\}$ et montrer que celui-ci ne se prolonge pas en l'origine.
(e) Trouver la partie $S \subseteq \bar{S} \setminus \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}\}$ formé des points où $\bar{S} \setminus \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}\}$ est une surface.

10. *Conoïde de Plücker.* Soit $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z(x^2+y^2) = xy\}$.
(a) Déterminer les points où S est une surface.
(b) Montrer que cette surface est réglée, c'est-à-dire réunion de droites affines.

11. *Une surface.* Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et soit

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_{\neq 0} : z = xf\left(\frac{y}{z}\right)\right\}.$$

(a) Montrer que S est une surface de $\mathbb{R}^3$.
(b) Montrer que tous les plans tangents à S contiennent l'origine.

12. *Plan tangent.* Soit S une surface de $\mathbb{R}^3$ et P un plan affine qui rencontre S en un unique point p.
(a) Montrer que P est le plan tangent à S en p.
(b) La réciproque est-elle vraie ?

13. *Sous-surface.* Soit U un sous-ensemble d'une surface S de $\mathbb{R}^3$. Montrer que U est une surface si et seulement si U est un ouvert de S.

14. *Stokes I.* Soient $\gamma : [-1,1] \to \mathbb{R}^2$ la courbe définie par $\gamma(t) = (t,t^2)$ et la 1-forme donnée par $\alpha = y^2dx + 2xydy \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$.
(a) Calculer $\int_\gamma \alpha$.
(b) Trouver une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $\alpha = df$ et vérifier la formule de Stokes

$$\int_\gamma \alpha = f\big(\gamma(1)\big) - f\big(\gamma(-1)\big).$$

15. *Angle.* Soit $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ une application de classe C^1 telle que $\gamma(0) = \gamma(1)$ et soit

$$\alpha = \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2} \in \Omega^1\big(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}\big).$$

(a) Montrer que $\int_\gamma \alpha/2\pi$ est un entier.
(b) La 1-forme α est-elle fermée ? exacte ?

16. *Stokes II.* Soient S^2 la sphère unité de $\mathbb{R}^3$ et la 2-forme différentielle donnée par $\alpha = xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$.
(a) Calculer $d\alpha$.
(b) Montrer que α est non-nulle sur chaque espace tangent à S^2. En déduire que S^2 est orientable.
(c) Calculer $\int_{S^2} \alpha$.
(d) En utilisant les paramétrages $z = \pm\sqrt{1-x^2-y^2}$, recalculer $\int_{S^2} \alpha$.