MAT4213 - GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

Deuxième semestre — 2020-2021

Fiche 2: Courbes, dérivées covariantes, champs de repères

Courbes planes

1. Soit $\alpha :]\,a,b\,[\to \mathbb{R}^2$ une courbe régulière paramétrée par longueur d'arc, que l'on écrira $\alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s))$. Soit $\mathbf{t} = \alpha' :]\,a,b\,[\to \mathbb{R}^2$ la courbe **tangente** de α et soit $\mathbf{n} :]\,a,b\,[\to \mathbb{R}^2$ la courbe **normale** de α, *i.e.* $\mathbf{n}(s)$ est le seul vecteur unitaire tel que $(\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s))$ est une base orthonormale orientée de $\mathbb{R}^2$ pour tout $s \in]\,a,b\,[$. On rappelle que la **courbure** de α en $s \in]\,a,b\,[$ est donné par $\kappa(s) \in \mathbb{R}$ tel que

$$\mathbf{t}'(s) = \kappa(s) \cdot \mathbf{n}(s). \tag{1}$$

(a) Montrer que la courbure de α en s coïncide avec l'aire (avec signe) du rectangle défini par $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{t}'(s)\}$. Calculer l'expression explicite de $\kappa(s)$ en fonction de α_1, α_2 et leurs dérivées.

(b) Montrer que les vecteurs $\mathbf{t}'(s)$ et $\mathbf{n}'(s)$ sont orthogonaux.

(c) Montrer que, étant donné $r > 0$, l'application $t \mapsto |\kappa(s)|$ est constante de valeur $1/r$ si et seulement si l'image de α est incluse dans un cercle de rayon r.

Noter en particulier que (1) implique que

$$\big|\kappa(s)\big| = \big\|\mathbf{t}'(s)\big\| = \big\|\alpha''(s)\big\|,$$

pour tout $s \in]\,a,b\,[$.

Solution. On remarque d'abord que, comme la courbe α est paramétrée par longueur d'arc, $\mathbf{t}(s) = (\alpha_1'(s), \alpha_2'(s))$, ce qui implique que $\mathbf{n}(s) = (-\alpha_2'(s), \alpha_1'(s))$.

(a) L'aire demandée est donnée par

$$\det\big(\mathbf{t}(s), \mathbf{t}'(s)\big) = \det\big(\mathbf{t}(s), \kappa(s)\mathbf{n}(s)\big) = \kappa(s)\det\big(\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s)\big) = \kappa(s),$$

vu que le choix de $\mathbf{n}(s)$ implique directement que $\det(\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s)) = 1$. On conclut alors que $\kappa(s) = \alpha_1'(s)\alpha_2''(s) - \alpha_2'(s)\alpha_1''(s)$, pour tout $s \in]\,a,b\,[$.

(b) Par définition de κ, on a que $\mathbf{t}'(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s)$, ce qui nous dit que $\alpha_1''(s) = -\kappa(s)\alpha_2'(s)$ et $\alpha_2''(s) = \kappa(s)\alpha_1'(s)$. En particulier,

$$\mathbf{n}'(s) = \big(-\alpha_2''(s), \alpha_1''(s)\big) = \big(-\kappa(s)\alpha_1'(s), -\kappa(s)\alpha_2'(s)\big) = -\kappa(s)\mathbf{t}(s) \tag{2}$$

pour tout $s \in]\,a,b\,[$. D'après (2), on voit bien que

$$\big\langle \mathbf{t}'(s), \mathbf{n}'(s)\big\rangle = \big\langle \kappa(s)\mathbf{n}(s), -\kappa(s)\mathbf{t}(s)\big\rangle = -\kappa(s)^2\big\langle \mathbf{n}(s), \mathbf{t}(s)\big\rangle = 0$$

pour tout $s \in]\,a,b\,[$.

(c) On suppose que $\kappa(s) = \varepsilon/r$ avec $\varepsilon \in \{\pm 1\}$, pour tout $s \in]a,b[$. Soit $p(s) = \alpha(s) - \varepsilon r \mathbf{n}(s)$, pour tout $s \in]a,b[$. Si l'on dérive cette expression on trouve que $p'(s) = \mathbf{t}(s) - \varepsilon r \mathbf{n}'(s) = (1 - \varepsilon r \kappa(s))\mathbf{t}(s) = 0$, ce qui nous dit que p est constant. En conséquence, $\|\alpha - p\| = r$, ce qui implique que l'image de α est incluse dans le cercle de centre p et rayon r. La réciproque est immédiate.

2. Soit $\beta :]a,b[\to \mathbb{R}^2$ une courbe régulière que l'on écrira $\beta(t) = (\beta_1(t), \beta_2(t))$. À partir de la règle de dérivation en chaîne et de l'expression

$$\kappa_\alpha(t) = \alpha_1'(t)\alpha_2''(t) - \alpha_2'(t)\alpha_1''(t)$$

pour tout $t \in]c,d[$ de la courbure κ_α d'une courbe $\alpha :]c,d[\to \mathbb{R}^2$ paramétrée par longueur d'arc obtenue dans l'exercice précédent, déduire que la courbure κ_β de β est

$$\kappa_\beta(t) = \frac{\beta_1'(t)\beta_2''(t) - \beta_2'(t)\beta_1''(t)}{[(\beta_1'(t))^2 + (\beta_2'(t))^2]^{3/2}},$$

pour tout $t \in]a,b[$.

Solution. On rappelle que, étant donné une courbe régulière $\beta :]a,b[\to \mathbb{R}^2$ et $t_0 \in]a,b[$, on définit l'application $s :]a,b[\to \mathbb{R}$ donnée par $s(t) = \int_{t_0}^{t} \|\beta'(v)\| dv$. C'est clair que s est différentiable et comme $s'(t) = \|\beta'(t)\| > 0$ pour tout $t \in]a,b[$, l'application s est strictement croissante, son image est forcément un intervalle ouvert de la forme $]c,d[$ et s admet une application réciproque $t :]c,d[\to]a,b[$. On remarque que

$$t'(u) = \frac{1}{s'(t(u))} = \frac{1}{\|\beta'(t(u))\|}.$$

pour tout $u \in]c,d[$.

Si l'on pose $\alpha = \beta \circ t :]c,d[\to \mathbb{R}^2$, on voit bien que $\alpha'(u) = \beta'(t(u))t'(u)) = 1$, pour tout $u \in]c,d[$, ce qui implique que α est régulière et est paramétrée par longueur d'arc. En outre,

$$\alpha_i'(u) = \beta_i'\big(t(u)\big)t'(u) \text{ et } \alpha_i''(u) = \beta_i''\big(t(u)\big)t'(u)^2 + \beta_i'\big(t(u)\big)t''(u),$$

pour tout $u \in]c,d[$. En conséquence,

$$\begin{aligned}
\kappa_\alpha(u) &= \alpha_1'(u)\alpha_2''(u) - \alpha_2'(u)\alpha_1''(u) \\
&= \beta_1'(t)t'(u)\big(t_2''(t)t'(u)^2 + \beta_2'(t)t''(u)\big) - \beta_2'(t)t'(u)\big(\beta_1''(t)t'(u)^2 + \beta_1'(t)t''(u)\big) \\
&= \beta_1'(t)\beta_2''(t)t'(u)^3 - \beta_2'(t)\beta_1''(t)t'(u)^3 + \beta_1'(t)t'(u)\beta_2'(t)t''(u) - \beta_2'(t)t'(u)\beta_1'(t)t''(u) \\
&= \frac{\beta_1'(t)\beta_2''(t) - \beta_2'(t)\beta_1''(t)}{\|\beta'(t)\|^3}
\end{aligned}$$

pour tout $u \in]c,d[$, où $t = t(u)$.

3. Soit $\alpha :]a,b[\to \mathbb{R}^2$ une courbe régulière paramétrée par longueur d'arc dont la courbure ne s'annule pas. Étant donné $s_0 \in]a,b[$, on rappelle que le **centre de courbure de α en s_0** est le point

$$x(s_0) = \alpha(s_0) + \frac{1}{\kappa(s_0)}\mathbf{n}(s_0),$$

et le **cercle osculateur à α en s_0** est le cercle de centre $x(s_0)$ et de **rayon de courbure** $\rho(s_0) = 1/|\kappa(s_0)| > 0$. Montrer que la courbe α et le cercle osculateur à α en s_0 admettent la même droite tangente et la même droite normale en $\alpha(s_0)$.

Solution. On remarque d'abord qu'il suffit de démontrer que les droites tangentes de α et du cercle osculateur à α en s_0 admettent la même droite tangente. On écrira $\mathbf{n}(s_0) = (\mathbf{n}_1(s_0), \mathbf{n}_2(s_0))$. On remarque par ailleurs que le cercle osculateur à α en s_0 est donné par la courbe $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$\sigma(\theta) = \alpha(s_0) + \frac{1}{\kappa(s_0)}\Big(\big(1+\cos(\theta)\big)\mathbf{n}_1(s_0) + \sin(\theta)\mathbf{n}_2(s_0), -\sin(\theta)\mathbf{n}_1(s_0) + \big(1+\cos(\theta)\big)\mathbf{n}_2(s_0)\Big)$$

pour $\theta \in \mathbb{R}$. Noter que $\sigma(\pi) = \alpha(s_0)$ et que

$$\sigma'(\pi) = \frac{1}{\kappa(s_0)}(n_2(s_0), -n_1(s_0)) = \frac{1}{\kappa(s_0)}\alpha'(s_0).$$

La droite tangente à σ en $\alpha(s_0)$ est alors la courbe $\tau : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ donnée par

$$\tau(t) = \sigma(\pi) + t\sigma'(\pi) = \alpha(s_0) + \frac{t}{\kappa(s_0)}\alpha'(s_0),$$

qui coïncide avec la droite tangente à α en $\alpha(s_0)$.

Courbes dans l'espace

4. *Les formules de Frenet-Serret.* Soit $\alpha : J \to \mathbb{R}^3$ une courbe birégulière de classe C^∞ paramétrée par longueur d'arc, où $J \subseteq \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert. Montrer que les identités

$$\begin{aligned} \mathbf{t}'(s) &= && \kappa(s)\mathbf{n}(s) && \\ \mathbf{n}'(s) &= -\kappa(s)\mathbf{t}(s) && && + \tau(s)\mathbf{b}(s) \\ \mathbf{b}'(s) &= && -\tau(s)\mathbf{n}(s) && \end{aligned} \tag{3}$$

peuvent se réécrire sous la forme

$$\begin{aligned} \mathbf{t}'(s) &= \omega(s) \wedge \mathbf{t}(s) \\ \mathbf{n}'(t) &= \omega(s) \wedge \mathbf{n}(s) \\ \mathbf{b}'(t) &= \omega(s) \wedge \mathbf{b}(s) \end{aligned}$$

où $\omega(s) = \tau(s)\mathbf{t}(s) + \kappa(s)\mathbf{b}(s)$.

Solution. On rappelle d'bord l'identité

$$u \wedge \big(v \wedge w\big) = v\langle u, w\rangle - w\langle u, v\rangle, \tag{4}$$

pour tous $u, v, w \in \mathbb{R}^3$. En particulier,

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(s) \wedge \mathbf{t}(s) &= \big(\mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}(s)\big) \wedge \mathbf{t}(s) = -\mathbf{t}(s) \wedge \big(\mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}(s)\big) = \mathbf{n}(s), \\ \mathbf{n}(s) \wedge \mathbf{b}(s) &= \mathbf{n}(s) \wedge \big(\mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}(s)\big) = \mathbf{t}(s), \end{aligned}$$

pour tout $t \in J$. En particulier,

$$\begin{aligned}
\mathbf{t}'(s) &= \kappa(s)\mathbf{n}(s) = \kappa(s)\mathbf{b}(s) \wedge \mathbf{t}(s) = \big(\tau(s)\mathbf{t}(s) + \kappa(s)\mathbf{b}(s)\big) \wedge \mathbf{t}(s) = \omega(s) \wedge \mathbf{t}(s),\\
\mathbf{n}'(s) &= -\kappa(s)\mathbf{t}(s) + \tau(s)\mathbf{b}(s) = \kappa(s)\mathbf{b}(s) \wedge \mathbf{n}(s) + \tau(s)\mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}(s)\\
&= \big(\tau(s)\mathbf{t}(s) + \kappa(s)\mathbf{b}(s)\big) \wedge \mathbf{n}(s) = \omega(s) \wedge \mathbf{n}(s),\\
\mathbf{b}'(s) &= -\tau(s)\mathbf{n}(s) = \tau(s)\mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{b}(s) = \big(\tau(s)\mathbf{t}(s) + \kappa(s)\mathbf{b}(s)\big) \wedge \mathbf{b}(s) = \omega(s) \wedge \mathbf{b}(s),
\end{aligned}$$

pour tout $t \in J$.

5. Soit $\alpha : J \to \mathbb{R}^3$ une courbe birégulière paramétrée par longueur d'arc, où $J \subseteq \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert, et soit $\kappa : J \to \mathbb{R}$ sa courbure. Montrer que la torsion de α en $s \in J$ est

$$\tau(s) = \frac{\big\langle \alpha'(s) \wedge \alpha''(s), \alpha'''(s)\big\rangle}{\kappa^2(s)}.$$

Solution. On rappelle que $\mathbf{t}(s) = \alpha'(s)$ et $\alpha''(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s)$ pour tout $s \in J$, vu que α est paramétrée par longueur d'arc. En outre, comme $\kappa(s) = \|\alpha''(s)\|$ pour tout $s \in J$, l'application $\kappa : J \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ est différentiable, vu que α est birégulière et l'application $\| \ \| : \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}\} \to \mathbb{R}_{>0}$ est différentiable. En particulier,

$$\alpha'''(s) = \kappa'(s)\mathbf{n}(s) + \kappa(s)\mathbf{n}'(s),$$

pour tout $s \in J$, et comme $\kappa(s) \neq 0$, on trouve que

$$\mathbf{n}'(s) = \frac{\alpha'''(s) - \kappa'(s)\mathbf{n}(s)}{\kappa(s)},$$

pour tout $s \in J$. En conséquence, $\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}(s) = \alpha'(s) \wedge \mathbf{n}(s)$ implique que

$$\mathbf{b}'(s) = \alpha''(s) \wedge \mathbf{n}(s) + \alpha'(s) \wedge \mathbf{n}'(s) = \frac{\alpha'(s) \wedge \alpha'''(s)}{\kappa(s)} - \kappa'(s)\frac{\alpha'(s) \wedge \mathbf{n}(s)}{\kappa(s)},$$

pour tout $s \in J$. En outre, $\mathbf{b}'(s) = -\tau(s)\mathbf{n}(s)$, nous dit que

$$\tau(s) = -\langle \mathbf{b}'(s), \mathbf{n}(s)\rangle = -\frac{\big\langle \alpha'(s) \wedge \alpha'''(s), \alpha''(s)\big\rangle}{\kappa^2(s)} = \frac{\big\langle \alpha'(s) \wedge \alpha''(s), \alpha'''(s)\big\rangle}{\kappa^2(s)},$$

pour tout $s \in J$, où l'on a utilisé que

$$\langle u \wedge v, w\rangle = \det(u, v, w) = -\det(u, w, v) = -\langle u \wedge w, v\rangle,$$

pour tous $u, v, w \in \mathbb{R}^3$.

6. Soit $\alpha : J \to \mathbb{R}^3$ une courbe birégulière de classe C^∞, où $J \subseteq \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert, et soit $s : J \to \mathbb{R}$ la fonction

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \big\|\alpha'(u)\big\| du$$

pour tout $t \in J$, où $t_0 \in J$ est un point fixe. Soit $J' = s(J)$, $t : J' \to J$ l'application réciproque de s et $\beta = \alpha \circ t : J' \to \mathbb{R}^3$. On note

$$\frac{d\alpha}{dt}(t) = \alpha'(t), \frac{d^2\alpha}{dt^2}(t) = \alpha''(t) \text{ et } \frac{d^3\alpha}{dt^3}(t) = \alpha'''(t).$$

(a) Montrer que

$$\frac{dt}{ds}(s) = \frac{1}{\left\|\alpha'\big(t(s)\big)\right\|} \text{ et } \frac{d^2t}{ds^2}(s) = -\frac{\Big\langle \alpha'\big(t(s)\big), \alpha''\big(t(s)\big)\Big\rangle}{\left\|\alpha'\big(t(s)\big)\right\|^4},$$

pour tout $s \in J'$.

(b) Montrer que la courbure de α en $t \in J$ est

$$\kappa_\alpha(t) = \frac{\left\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\right\|}{\left\|\alpha'(t)\right\|^3}.$$

(c) Montrer que la torsion de α en $t \in J$ est

$$\tau_\alpha(t) = \frac{\big\langle \alpha'(t) \wedge \alpha''(t), \alpha'''(t)\big\rangle}{\left\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\right\|^2}.$$

Solution.

(a) C'est clair que

$$s'(t) = \left\|\alpha'(t)\right\| \text{ et } s''(t) = \frac{\big\langle \alpha'(t), \alpha''(t)\big\rangle}{\left\|\alpha'(t)\right\|}, \tag{5}$$

pour tout $t \in J$, où l'on a utilisé la règle de dérivation en chaîne et que l'application $\| \ \| : \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}\} \to \mathbb{R}_{>0}$ est différentiable et sa différentielle est $d\| \ \|(x)(v) = \langle x, v\rangle / \|x\|$, pour tout $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}\}$ et $v \in \mathbb{R}^3$. D'après le théorème sur la différentiation d'applications réciproques et la première identité dans (5), on conclut que

$$\frac{dt}{ds}\big(s(t)\big) = \frac{1}{s'(t)} = \frac{1}{\left\|\alpha'(t)\right\|} \tag{6}$$

pour tout $t \in J$, ce qui nous dit que

$$\frac{dt}{ds}(s) = \frac{1}{\left\|\alpha'(t(s))\right\|},$$

pour tout $s \in J'$. En particulier, (6) et la deuxième identité dans (5) nous disent que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dt}{ds}\big(s(t)\big)\right) = -\frac{s''(t)}{s'(t)^2} = -\frac{\big\langle \alpha'(t), \alpha''(t)\big\rangle}{\left\|\alpha'(t)\right\|^3}, \tag{7}$$

pour tout $s \in J'$. Par ailleurs,

$$\frac{d}{dt}\Big(t'\big(s(t)\big)\Big) = \frac{d^2t}{ds^2}\big(s(t)\big)s'(t)$$

et (7) impliquent que

$$\frac{d^2t}{ds^2}(s(t)) = \frac{\frac{d^2t}{ds^2}\big(s(t)\big)}{s'(t)} = -\frac{\big\langle \alpha'(t), \alpha''(t)\big\rangle}{\big\|\alpha'(t)\big\|^4},$$

pour tout $t \in J$, qui nous dit que

$$\frac{d^2t}{ds^2}(s) = -\frac{\Big\langle \alpha'\big(t(s)\big), \alpha''\big(t(s)\big)\Big\rangle}{\Big\|\alpha'\big(t(s)\big)\Big\|^4},$$

pour tout $s \in J'$.

(b) On rappelle d'abord l'identité élémentaire

$$\|v \wedge w\|^2 = \|v\|^2\|w\|^2 - \langle u, w\rangle^2, \tag{8}$$

pour tous $v, w \in \mathbb{R}^3$. Par ailleurs, on rappelle que, par définition, la courbure $\kappa_\alpha(t)$ de α en $t \in J$ est donnée par la courbure $\kappa_\beta(s(t))$ de $\beta = \alpha \circ t$ en $s(t)$, *i.e.*

$$\kappa_\alpha(t) = \kappa_\beta\big(s(t)\big) = \left\|\frac{d^2\beta}{ds^2}\big(s(t)\big)\right\|. \tag{9}$$

Si l'on applique la règle de dérivation en chaîne à l'identité $\alpha = \beta \circ t$, on trouve que

$$\alpha'(t) = \frac{d\beta}{ds}\big(s(t)\big)s'(t) \tag{10}$$

et que

$$\alpha''(t) = \frac{d^2\beta}{ds^2}\big(s(t)\big)\big(s'(t)\big)^2 + \frac{d\beta}{ds}\big(s(t)\big)s''(t),$$

pour tout $t \in J$. En conséquence, (5) implique que

$$\frac{d^2\beta}{ds^2}\big(s(t)\big) = \frac{1}{\big\|\alpha'(t)\big\|^2}\left(\alpha''(t) - \alpha'(t)\frac{\big\langle \alpha'(t), \alpha''(t)\big\rangle}{\big\|\alpha'(t)\big\|^2}\right), \tag{11}$$

ce qui nous dit en particulier que

$$\left\|\frac{d^2\beta}{ds^2}\big(s(t)\big)\right\|^2 = \frac{1}{\big\|\alpha'(t)\big\|^4}\left(\big\|\alpha''(t)\big\|^2 - \frac{\big\langle \alpha'(t), \alpha''(t)\big\rangle^2}{\big\|\alpha'(t)\big\|^2}\right).$$

Cette égalité, avec les identités (9) et (8), implique que

$$\kappa_\alpha(t) = \frac{\big\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\big\|}{\big\|\alpha'(t)\big\|^3},$$

pour tout $t \in J$.

(c) Si l'on dérive la dernière identité dans (5) on trouve que

$$s'''(t) = \frac{\big\langle \alpha'(t), \alpha'''(t)\big\rangle + \big\|\alpha''(t)\big\|^2}{\big\|\alpha'(t)\big\|} - \frac{\big\langle \alpha'(t), \alpha''(t)\big\rangle^2}{\big\|\alpha'(t)\big\|^3}, \tag{12}$$

pour tout $t \in J$. Par ailleurs, on remarque d'abord que, si l'on règle de dérivation en chaîne à l'identité $\alpha = \beta \circ t$ on trouve que

$$\alpha'''(t) = \frac{d^3\beta}{ds^3}\big(s(t)\big)\big(s'(t)\big)^3 + 3\frac{d^2\beta}{ds^2}\big(s(t)\big)s'(t)s''(t) + \frac{d\beta}{ds}\big(s(t)\big)s'''(t),$$

pour tout $t \in J$. Cela nous dit que

$$\frac{d^3\beta}{ds^3}\big(s(t)\big) = \frac{1}{\|\alpha'(t)\|^3}\left(\alpha'''(t) - 3\alpha''(t)\frac{s''(t)}{\|\alpha'(t)\|} + \alpha'(t)\frac{3s''(t)^2 - s'''(t)\|\alpha'(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^2}\right), \tag{13}$$

où l'on a utilisé (10) et (11).

En plus, on rappelle que, par définition, la torsion $\tau_\alpha(t)$ de α en $t \in J$ est donnée par la torsion $\kappa_\beta(s(t))$ de $\beta = \alpha \circ t$ en $s(t)$, *i.e.*

$$\tau_\alpha(t) = \tau_\beta\big(s(t)\big) = \frac{\left\langle \frac{d\beta}{ds}\big(s(t)\big) \wedge \frac{d^2\beta}{ds^2}\big(s(t)\big), \frac{d^3\beta}{ds^3}\big(s(t)\big)\right\rangle}{\kappa_\alpha^2\big(s(t)\big)}, \tag{14}$$

pour tout $t \in J$, où l'on a utilisé l'exercice **5**. On remarque d'abord que (10) et (11) nous disent que

$$\frac{d\beta}{ds}\big(s(t)\big) \wedge \frac{d^2\beta}{ds^2}\big(s(t)\big) = \frac{\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)}{\|\alpha'(t)\|^3}.$$

En outre, (13) nous dit que

$$\left\langle \frac{d\beta}{ds}\big(s(t)\big) \wedge \frac{d^2\beta}{ds^2}\big(s(t)\big), \frac{d^3\beta}{ds^3}\big(s(t)\big)\right\rangle = \frac{\langle \alpha'(t) \times \alpha''(t), \alpha'''(t)\rangle}{\|\alpha'(t)\|^6},$$

pour tout $t \in J$. L'item précédent nous dit alors que

$$\tau_\alpha(t) = \frac{\langle \alpha'(t) \wedge \alpha''(t), \alpha'''(t)\rangle}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|^2},$$

pour tout $t \in J$.

7. Déterminer le domaine de définition maximal des expressions suivantes pour qu'elles donnent des courbes birégulières dans l'espace et calculer la courbure et la torsion respectives :

(*a*) $\alpha(u) = (u, u^2, u^3)$;
(*b*) $\alpha(u) = (u, (1+u)/u, (1-u^2)/u)$;
(*c*) $\alpha(u) = (u, f(u), g(u))$, où f et g sont deux fonctions de classe C^3 définies sur un intervalle $J \subseteq \mathbb{R}$;
(*d*) $\alpha(u) = (a(u - \sin(u)), a(u - \cos(u)), bu)$, avec $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
(*e*) $\alpha(u) = (a(3u - u^3), 3au^2, a(3u + u^3))$, avec $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Solution.

(a) C'est clair que le domaine de définition de la courbe α est $\mathbb{R}$. On voit aussi que

$$\alpha'(u) = (1, 2u, 3u^2) \neq \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}$$

pour tout $u \in \mathbb{R}$, ce qui nous dit que la courbe est régulière sur $\mathbb{R}$. En plus,

$$\alpha''(u) = (0, 2, 6u),$$

pour tout $u \in \mathbb{R}$. Comme

$$\alpha'(u) \wedge \alpha''(u) = (6u^2, -6u, 2) \neq \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}$$

pour tout $u \in \mathbb{R}$, la courbe est birégulière sur $\mathbb{R}$. D'après les expressions dans l'exercice **6**, on conclut que

$$\kappa(u) = \frac{(4+36u^2+36u^4)^{1/2}}{(1+4u^2+9u^4)^{3/2}} \text{ et } \tau(u) = \frac{12}{4+36u^2+36u^4},$$

pour tout $u \in \mathbb{R}$, vu que $\alpha'''(u) = (0, 0, 6)$.

(b) C'est clair que le domaine de définition de la courbe α est $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. On voit aussi que

$$\alpha'(u) = (1, -u^{-2}, -1-u^{-2}) \neq \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}$$

pour tout $u \in \mathbb{R}$, ce qui nous dit que la courbe est régulière sur $\mathbb{R}$. En plus,

$$\alpha''(u) = (0, 2u^{-3}, 2u^{-3}),$$

pour tout $u \in \mathbb{R}$. Comme

$$\alpha'(u) \wedge \alpha''(u) = (2u^{-3}, -2u^{-3}, 2u^{-3}) \neq \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}$$

pour tout $u \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, la courbe est birégulière sur $\mathbb{R}$. D'après les expressions dans l'exercice **6**, on conclut que

$$\kappa(u) = \frac{\sqrt{3}|u|^3}{\sqrt{2}(1+u^2+u^4)^{3/2}} \text{ et } \tau(u) = -\frac{3}{u},$$

pour tout $u \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, vu que $\alpha'''(u) = (-6u^{-4}, 6u^{-4}, -6u^{-4})$.

(c) C'est clair que le domaine de définition de la courbe α est $J \subseteq \mathbb{R}$. On voit aussi que

$$\alpha'(u) = \big(1, f'(u), g'(u)\big) \neq \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}$$

pour tout $u \in J$, ce qui nous dit que la courbe est régulière sur $\mathbb{R}$. En plus,

$$\alpha''(u) = \big(0, f''(u), g''(u)\big),$$

pour tout $u \in J$. Comme

$$\alpha'(u) \wedge \alpha''(u) = \big(f'(u)g''(u) - f''(u)g'(u), -g''(u), f''(u)\big),$$

pour tout $u \in J$, la courbe est birégulière sur $J' = \{u \in J : \alpha'(u) \wedge \alpha''(u) \neq \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}\}$. D'après les expressions dans l'exercice **6**, on conclut que

$$\kappa(u) = \frac{\Big(\big(f'(u)g''(u) - f''(u)g'(u)\big)^2 + f''(u)^2 + g''(u)^2\Big)^{1/2}}{\big(1 + f'(u)^2 + g'(u)^2\big)^{3/2}}$$

et

$$\tau(u) = \frac{f''(u)g'''(u) - f'''(u)g''(u)}{\big(f'(u)g''(u) - f''(u)g'(u)\big)^2 + f''(u)^2 + g''(u)^2},$$

pour tout $u \in J'$, vu que $\alpha'''(u) = (0, f'''(u), g'''(u))$.

(*d*) C'est clair que le domaine de définition de la courbe α est $\mathbb{R}$. On voit aussi que

$$\alpha'(u) = \Big(a\big(1-\cos(u)\big), a\big(1+\sin(u)\big), b\Big) \neq \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}$$

pour tout $u \in \mathbb{R}$, ce qui nous dit que la courbe est régulière sur $\mathbb{R}$. En plus,

$$\alpha''(u) = \big(a\sin(u), a\cos(u), 0\big),$$

pour tout $u \in \mathbb{R}$. Comme

$$\alpha'(u) \wedge \alpha''(u) = \Big(-ab\cos(u), ab\sin(u), a^2\big(\cos(u)-\sin(u)-1\big)\Big) \neq \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}$$

pour tout $u \in \mathbb{R}$, la courbe est birégulière sur $\mathbb{R}$. D'après les expressions dans l'exercice **6**, on conclut que

$$\kappa(u) = \frac{|a|\Big(b^2+2a^2\big(1+\sin(u)\big)\big(1-\cos(u)\big)\Big)^{1/2}}{\Big(2a^2\big(1-\cos(u)+\sin(u)\big)+b^2\Big)^{3/2}}$$

et

$$\tau(u) = -\frac{a^2b}{a^2\Big(b^2+2a^2\big(1+\sin(u)\big)\big(1-\cos(u)\big)\Big)},$$

pour tout $u \in \mathbb{R}$, vu que $\alpha'''(u) = (a\cos(u), -a\sin(u), 0)$.

(*e*) C'est clair que le domaine de définition de la courbe α est $\mathbb{R}$. On voit aussi que

$$\alpha'(u) = \big(3a(1-u^2), 6au, 3a(1+u^2)\big) \neq \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}$$

pour tout $u \in \mathbb{R}$, ce qui nous dit que la courbe est régulière sur $\mathbb{R}$. En plus,

$$\alpha''(u) = (-6au, 6a, 6au),$$

pour tout $u \in \mathbb{R}$. Comme

$$\alpha'(u) \wedge \alpha''(u) = 18a^2(u^2-1, -2u, u^2+1) \neq \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}$$

pour tout $u \in \mathbb{R}$, la courbe est birégulière sur $\mathbb{R}$. D'après les expressions dans l'exercice **6**, on conclut que

$$\kappa(u) = \frac{1}{6|a|(u^2+1)^2} \text{ et } \tau(u) = \frac{1}{3a(u^2+1)^2},$$

pour tout $u \in \mathbb{R}$, vu que $\alpha'''(u) = (-6a, 0, 6a)$.

8. Une courbe birégulière $\alpha : J \to \mathbb{R}^3$, où $J \subseteq \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert, est appelée une **hélice** s'il existe $v \in \mathbb{R}^3$ non nul tel que l'application $t \mapsto \langle v, \mathbf{t}(t)\rangle$ définie sur J soit constante.

(*a*) On suppose que $\tau(t) \neq 0$ pour tout $t \in J$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(H.1) la courbe α est une hélice ;

(H.2) la fonction $t \mapsto \kappa(t)/\tau(t)$ définie sur J est constante ;

(H.3) il existe un plan $\Pi \subseteq \mathbb{R}^3$ tel que les droites normales de α, *i.e.* les droites de la forme $\{\alpha(t)+\mathbf{n}(t)s : s \in \mathbb{R}\}$, soient parallèles à Π ;

(H.4) il existe un vecteur non nul $w \in \mathbb{R}^3$ tel que l'application $t \mapsto \langle w, \mathbf{b}(t)\rangle$ définie sur J est constante.

(b) Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $c^2 = a^2 + b^2$ et $a, c \neq 0$. Montrer que la courbe $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ donnée par

$$\alpha(s) = \big(a\cos(s/c), a\sin(s/c), bs/c\big)$$

pour tout $s \in \mathbb{R}$ est une hélice paramétrée par longueur d'arc. Montrer en plus que $\kappa(s)/\tau(s) = |a|/b$, pour tout $s \in \mathbb{R}$, si $b \neq 0$.

Solution.

(a) On va supposer sans perte de généralité que α est paramétrée par longueur d'arc. On montre d'abord que la condition (H.1) est équivalente à la condition suivante, que l'on appellera (H.5) : il existe un vecteur non nul $v \in \mathbb{R}^3$ tel que $0 = \langle v, \mathbf{n}(t)\rangle$ pour tout $t \in J$. En effet, soit $v \in \mathbb{R}^3$ non nul tel que l'application $t \mapsto \langle v, \mathbf{t}(t)\rangle$ définie sur J soit constante. Cela nous dit que sa dérivée est nulle, *i.e.* $0 = \langle v, \mathbf{t}'(t)\rangle = \langle v, \mathbf{n}(t)\rangle\kappa(t)$ pour tout $t \in J$, ce qui implique que $0 = \langle v, \mathbf{n}(t)\rangle$ pour tout $t \in J$, car la courbure κ n'est nulle part nulle. La réciproque est immédiate.

Par ailleurs, on voit aussi que la condition (H.4) est équivalente à (H.5). En effet, soit $w \in \mathbb{R}^3$ non nul tel que l'application $t \mapsto \langle w, \mathbf{b}(t)\rangle$ définie sur J soit constante. Cela nous dit que sa dérivée est nulle, *i.e.* $0 = \langle w, \mathbf{b}'(t)\rangle = -\langle w, \mathbf{n}(t)\rangle\tau(t)$ pour tout $t \in J$, ce qui implique que $0 = \langle w, \mathbf{n}(t)\rangle$ pour tout $t \in J$, car la torsion τ n'est nulle part nulle. La réciproque est immédiate.

En outre, on note aussi que la condition (H.3) est équivalente à (H.5). En effet, soit $w \in \mathbb{R}^3$ non nul tel que $0 = \langle w, \mathbf{n}(t)\rangle$ pour tout $t \in J$ et soit $\Pi \subseteq \mathbb{R}^3$ le plan orthogonal à w. Cela nous dit que la droite normale $\{\alpha(t)+\mathbf{n}(t)s : s \in \mathbb{R}\}$ à α en $\alpha(t)$ est parallèle à Π. La réciproque est immédiate. En effet, soit $\Pi \subseteq \mathbb{R}^3$ un plan tel que la droite normale $\{\alpha(t)+\mathbf{n}(t)s : s \in \mathbb{R}\}$ à α en $\alpha(t)$ soit parallèle à Π, pour tout $t \in J$. Soit $w \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}\}$ un vecteur orthogonal à Π. Alors la condition précédente nous dit que $\langle w, \mathbf{n}(t)\rangle = 0$ pour tout $t \in J$, comme on voulait démontrer.

On va finalement démontrer que (H.2) est équivalente à (H.5). On va d'abord démontrer que, étant donné un vecteur non nul $v \in \mathbb{R}^3$, que l'on peut prendre sans perte de généralité tel que $\|v\| = 1$, l'application $t \mapsto \langle v, \alpha(t)\rangle$ ne peut pas être constante. En effet, si c'est le cas, alors $\langle v, \alpha'(t)\rangle = \langle v, \alpha''(t)\rangle = 0$, pour tout $t \in J$. Cela nous dit que, $\mathbf{b}(t) = \mathbf{t}(t) \wedge \mathbf{n}(t)$ doit être un multiple scalaire non nul de v, et *a fortiori* $\mathbf{b}(t) \in \{\pm v\}$, pour tout $t \in J$. Comme l'application $t \mapsto \langle \mathbf{b}(t), v\rangle \in \{\pm 1\}$ est continue, elle est constante. On va alors prendre $v = \mathbf{b}(t)$, pour $t \in J$. Or, cela impliquerait que $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3} = \mathbf{b}'(t) = -\tau(t)\mathbf{n}(t)$ pour tout $t \in J$, ce qui est absurde, car la torsion n'est nulle part nulle.

On suppose d'abord que la condition (H.5) est vérifiée, *i.e.* il existe un vecteur non nul $v \in \mathbb{R}^3$ tel que $0 = \langle v, \mathbf{n}(t)\rangle$ pour tout $t \in J$. On rappelle que $t \mapsto \langle v, \mathbf{t}(t)\rangle$ et $t \mapsto \langle v, \mathbf{b}(t)\rangle$ sont des constantes $a \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$, et $a \neq 0$, d'après les arguments dans le paragraphe précédent. Si l'on dérive l'expression $0 = \langle v, \mathbf{n}(t)\rangle$, on voit que $0 = \langle v, \mathbf{n}'(t)\rangle$ pour tout $t \in J$, *i.e.*

$$0 = \langle v, \mathbf{n}'(t)\rangle = \langle v, -\kappa(t)\mathbf{t}(t) + \tau(t)\mathbf{b}(t)\rangle = -\kappa(t)a + \tau(t)c,$$

pour tout $t \in J$, ce qui nous dit que $\kappa(t)/\tau(t) = c/a$, pour tout $t \in J$, *i.e.* la condition (H.2) est vérifiée.

Réciproquement, on suppose que la condition (H.2) est vérifiée, *i.e.* il existe $d \in \mathbb{R}$ tel que $\kappa(t)/\tau(t) = d$, pour tout $t \in J$ On va démontrer (H.5). Comme $\mathbf{t}'(t) = \kappa(t)\mathbf{n}(t)$

et $\mathbf{b}'(t) = -\tau(t)\mathbf{n}(t)$, on conclut que $\mathbf{t}'(t) = -d\mathbf{b}'(t)$ pour tout $t \in J$, *i.e.* $(\mathbf{t}+d\mathbf{b})'(t) = 0$ pour tout $t \in J$, ce qui nous dit que l'application $t \mapsto \mathbf{t}(t)+d\mathbf{b}(t)$ est constante. Comme $\mathbf{t}(t)$ et $\mathbf{b}(t)$ sont orthogonaux, c'est clair que $\mathbf{t}(t) + d\mathbf{b}(t) \neq \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}$ pour tout $t \in J$. Soit $v = \mathbf{t}(t) + d\mathbf{b}(t)$, pour $t \in J$. C'est clair que $\langle v, \mathbf{n}(t)\rangle = 0$, pour tout $t \in J$, vu que $\mathbf{n}(t)$ est orthogonal à $\mathbf{t}(t)$ et $\mathbf{b}(t)$. Cela montre (H.5), comme on voulait démontrer.

(b) C'est clair que

$$\alpha'(s) = \big(-a\sin(s/c)/c, a\cos(s/c)/c, b/c\big) \neq \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}$$

pour tout $s \in \mathbb{R}$, ce qui nous dit que la courbe est régulière sur $\mathbb{R}$. En plus,

$$\big\|\alpha'(s)\big\|^2 = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1,$$

pour tout $s \in \mathbb{R}$, ce qui nous dit que α est paramétrée par longueur d'arc. En outre,

$$\alpha''(s) = \big(-a\cos(s/c)/c^2, -a\sin(s/c)/c^2, 0\big),$$

pour tout $s \in \mathbb{R}$. Comme

$$\alpha'(s) \wedge \alpha''(s) = \big(ab\sin(s/c)/c^3, -ab\cos(s/c)/c^3, a^2/c^3\big) \neq \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}$$

pour tout $s \in \mathbb{R}$, la courbe est birégulière sur $\mathbb{R}$. Si l'on prend $v = (0,0,1) \in \mathbb{R}^3$, $\langle \alpha'(s), v\rangle = b/c$, pour tout $s \in \mathbb{R}$. ce qui nous dit que α est une hélice. D'après l'identité $\kappa(s) = \|\alpha''(s)\|$ et l'exercice **5**, on conclut que

$$\kappa(s) = \frac{|a|}{c^2} \text{ et } \tau(s) = \frac{b}{c^2},$$

pour tout $s \in \mathbb{R}$, vu que $\alpha'''(s) = (a\sin(s/c)/c^3, -a\cos(s/c)/c^3, 0)$. En particulier, $\kappa(s)/\tau(s) = |a|/b$, pour tout $s \in \mathbb{R}$, si $b \neq 0$.

Dérivées covariantes et champs de repères

9. Soit $v = (1,-1,2)$ et $p = (1,3,-1)$. Calculer $\nabla_v W$ où

(a) $W = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}$

(b) $W = x \frac{\partial}{\partial x} + x^2 \frac{\partial}{\partial y} - z^2 \frac{\partial}{\partial z}$.

Solution. On rappelle que, étant donné un champ vectoriel $W : U \to \mathbb{R}^n$ différentiable, où $U \subseteq \mathbb{R}^n$ est une partie ouverte, $\nabla_v W(p) = dW(p)(v) \in \mathbb{R}^n$, pour tout $p \in U$ et $v \in \mathbb{R}^n$. Si l'on utilise la notation $V = \sum_{i=1}^n f_i \partial/\partial x_i$, avec $f_i : U \to \mathbb{R}$ différentiable pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, et $v = \sum_{j=1}^n v_j \partial/\partial x_j$ pour le vecteur $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, alors

$$\nabla_v V(p) = \sum_{i=1}^n \Big(\sum_{j=1}^n v_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p)\Big)\frac{\partial}{\partial x_i},$$

pour tout $p \in U$.

(a) On voit bien que $W(x,y,z)=(x^2,y,0)$ pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ et

$$dW(x,y,z)=\begin{pmatrix}2x & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

ce qui nous dit que $\nabla_v W(p) = dW(p)(v) = (2,-1,0)$, pour $v=(1,-1,2)$ et $p=(1,3,-1)$.

(b) On voit bien que $W(x,y,z)=(x,x^2,-z^2)$ pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ et

$$dW(x,y,z)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2x & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2z\end{pmatrix},$$

ce qui nous dit que $\nabla_v W(p) = dW(p)(v) = (1,2,4)$, pour $v=(1,-1,2)$ et $p=(1,3,-1)$.

10. Soit $V=-y\frac{\partial}{\partial x}+x\frac{\partial}{\partial z}$ et $W=\cos(x)\frac{\partial}{\partial x}+\sin(x)\frac{\partial}{\partial y}$. Calculer

(a) $\nabla_V W$;

(b) $\nabla_V(z^2W)$;

(c) $\nabla_V(\nabla_V W)$;

(d) $\nabla_V V$;

(e) $\nabla_W V$;

(f) $\nabla_V(xV-zW)$.

Solution. On rappelle que, étant donné deux champs vectoriels $V=\sum_{i=1}^n f_i\partial/\partial x_i$ et $W=\sum_{j=1}^n g_j\partial/\partial x_j$, avec $f_i,g_j : U\to\mathbb{R}$ et g_j différentiable pour tous $i,j\in[\![1,n]\!]$, on peut écrire

$$\nabla_W V(p)=\sum_{i=1}^n\Big(\sum_{j=1}^n g_j\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p)\Big)\frac{\partial}{\partial x_i},$$

pour tout $p\in U$.

(a) Si l'on applique l'identité précédente, on voit bien que

$$\nabla_V W = y\sin(x)\frac{\partial}{\partial x}-y\cos(x)\frac{\partial}{\partial y}.$$

(b) C'est clair que

$$\nabla_V(z^2W)=\big(yz^2\sin(x)+2xz\cos(x)\big)\frac{\partial}{\partial x}+\big(-yz^2\cos(x)+2xz\sin(x)\big)\frac{\partial}{\partial y}.$$

(c) Si l'on utilise le premier item, on voit bien que

$$\nabla_V\big(\nabla_V W\big)=-y^2\cos(x)\frac{\partial}{\partial x}-y^2\sin(x)\frac{\partial}{\partial y}.$$

(d) C'est clair que

$$\nabla_V V=-y\frac{\partial}{\partial z}.$$

(*e*) On voit bien que

$$\nabla_W V = -\sin(x)\frac{\partial}{\partial x} + \cos(x)\frac{\partial}{\partial z}.$$

(*f*) C'est clair que

$$\nabla_V(xV - zW) = \big(y^2 - yz\sin(x) - x\cos(x)\big)\frac{\partial}{\partial x} + \big(yz\cos(x) - x\sin(x)\big)\frac{\partial}{\partial y} - 2xy\frac{\partial}{\partial z}.$$

11. Soit $X = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}$. Montrer que pour tout champ de vecteurs V sur $\mathbb{R}^3$, on a

$$\nabla_V X = V.$$

Solution. On écrit $V = f\partial/\partial x + g\partial/\partial y + h\partial/\partial z$ avec $f, g, h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Alors,

$$\nabla_V X = f\frac{\partial x}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} + g\frac{\partial y}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y} + h\frac{\partial z}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z} = f\frac{\partial}{\partial x} + g\frac{\partial}{\partial y} + h\frac{\partial}{\partial z} = V.$$

12. Montrer que si W est un champ de vecteurs différentiable avec $||W||$ constant alors $\nabla_V W$ est orthogonal à W pour tout champ de vecteurs V.

Solution. Si $W : U \to \mathbb{R}^n$, avec $U \subseteq \mathbb{R}^n$ une partie ouverte, on considère l'application $f : U \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = ||W(x)||^2$. Comme f est constante, sa dérivée est zéro, ce qui nous dit que

$$\begin{aligned} 0 = df(x)(v) &= \langle dW(x)(v), W(x)\rangle + \langle W(x), dW(x)(v)\rangle = 2\langle dW(x)(v), W(x)\rangle \\ &= 2\langle \nabla_v W(x), W(x)\rangle, \end{aligned}$$

pour tout $x \in U$ et $v \in \mathbb{R}^n$. En conséquence, $\langle \nabla_V W(x), W(x)\rangle = 0$, pour tout champ vectoriel V sur U.

13. Étant donnés deux champs de vecteurs différentiables X, Y sur $\mathbb{R}^3$, on définit le champ de vecteurs

$$[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X,$$

appelé le **crochet** des champs X et Y. Montrer les identités :

(*a*) $[X, Y][f] = X[Y[f]] - Y[X[f]]$, pour $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ fonction de classe C^2 ;

(*b*) $[X, Y] = -[Y, X]$;

(*c*) $[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0$, si X, Y, Z sont de classe C^2 ;

(*d*) $[fX, gY] = fX[g]Y - gY[f]X + fg[X, Y]$, pour $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ fonctions différentiables.

Solution. On écrira $X = \sum_{i=1}^n X_i \partial/\partial x_i$, $Y = \sum_{j=1}^n Y_j \partial/\partial x_j$ et $Z = \sum_{j=1}^n Z_k \partial/\partial x_k$, avec $X_i, Y_j, Z_k : U \to \mathbb{R}$ différentiable pour tous $i, j, k \in [\![1, n]\!]$.

(a) On voit bien que

$$\begin{aligned}
X[Y[f]] - Y[X[f]] &= \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\sum_{j=1}^n Y_j \frac{\partial f}{\partial x_j}\Big) - \sum_{j=1}^n Y_j \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big) \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_i \frac{\partial Y_j}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_i Y_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \\
&\quad - \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n Y_j \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n Y_j X_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \\
&= \sum_{i=1}^n \Big(\sum_{j=1}^n X_i \frac{\partial Y_j}{\partial x_i}\Big) \frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{j=1}^n \Big(\sum_{i=1}^n Y_j \frac{\partial X_i}{\partial x_j}\Big) \frac{\partial f}{\partial x_i} \\
&= \Big(\sum_{j=1}^n \Big(\sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial Y_j}{\partial x_i}\Big) \frac{\partial}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^n \Big(\sum_{j=1}^n Y_j \frac{\partial X_i}{\partial x_j}\Big) \frac{\partial}{\partial x_i}\Big)[f] \\
&= [X, Y][f].
\end{aligned}$$

(b) L'anticommutativité du crochet est une conséquence immédiate de la définition, vu que $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X = -(\nabla_Y X - \nabla_X Y) = -[X, Y]$.

(c) On remarque d'abord que

$$\begin{aligned}
[X, [Y, Z]] &= \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\sum_{j,k=1}^n Y_j \frac{\partial Z_k}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_k} - \sum_{j,k=1}^n Z_k \frac{\partial Y_j}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_j}\Big) \\
&\quad - \sum_{i=1}^n \Big(\sum_{j,k=1}^n Y_j \frac{\partial Z_k}{\partial x_j} \frac{\partial X_i}{\partial x_k} - \sum_{j,k=1}^n Z_k \frac{\partial Y_j}{\partial x_k} \frac{\partial X_i}{\partial x_j}\Big) \frac{\partial}{\partial x_i} \\
&= \sum_{i,j,k=1}^n \Big(X_i \frac{\partial Y_j}{\partial x_i} \frac{\partial Z_k}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_k} + X_i Y_j \frac{\partial^2 Z_k}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_k} - X_i \frac{\partial Z_k}{\partial x_i} \frac{\partial Y_j}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_j} - X_i Z_k \frac{\partial^2 Y_j}{\partial x_i \partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_j}\Big) \\
&\quad - \sum_{i,j,k=1}^n \Big(Y_j \frac{\partial Z_k}{\partial x_j} \frac{\partial X_i}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_i} - Z_k \frac{\partial Y_j}{\partial x_k} \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big).
\end{aligned}$$

De la même façon,

$$\begin{aligned}
&[Y, [Z, X]] \\
&= \sum_{i,j,k=1}^n \Big(Y_i \frac{\partial Z_j}{\partial x_i} \frac{\partial X_k}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_k} + Y_i Z_j \frac{\partial^2 X_k}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_k} - Y_i \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \frac{\partial Z_j}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_j} - Y_i X_k \frac{\partial^2 Z_j}{\partial x_i \partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_j}\Big) \\
&\quad - \sum_{i,j,k=1}^n \Big(Z_j \frac{\partial X_k}{\partial x_j} \frac{\partial Y_i}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_i} - X_k \frac{\partial Z_j}{\partial x_k} \frac{\partial Y_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big),
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&[Z, [X, Y]] \\
&= \sum_{i,j,k=1}^n \Big(Z_i \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \frac{\partial Y_k}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_k} + Z_i X_j \frac{\partial^2 Y_k}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_k} - Z_i \frac{\partial Y_k}{\partial x_i} \frac{\partial X_j}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_j} - Z_i Y_k \frac{\partial^2 X_j}{\partial x_i \partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_j}\Big) \\
&\quad - \sum_{i,j,k=1}^n \Big(X_j \frac{\partial Y_k}{\partial x_j} \frac{\partial Z_i}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_i} - Y_k \frac{\partial X_j}{\partial x_k} \frac{\partial Z_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big),.
\end{aligned}$$

À partir de ces expression on conclut que $[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0$.

(*d*) On va démontrer d'abord que $[X,gY] = X[g]Y + g[X,Y]$, pour tout fonction différentiable $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. En effet,

$$\begin{aligned}[X,gY] &= \sum_{i=1}^n \Big(\sum_{j=1}^n X_i \frac{\partial (gY_j)}{\partial x_i} \Big) \frac{\partial}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^n \Big(\sum_{j=1}^n gY_j \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \Big) \frac{\partial}{\partial x_i} \\ &= g \sum_{i=1}^n \Big(\sum_{j=1}^n X_i \frac{\partial Y_j}{\partial x_i} \Big) \frac{\partial}{\partial x_j} + \Big(\sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial g}{\partial x_i} \Big) \sum_{j=1}^n Y_j \frac{\partial}{\partial x_j} - g \sum_{i=1}^n \Big(\sum_{j=1}^n Y_j \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \Big) \frac{\partial}{\partial x_i} \\ &= X[g]Y + g[X,Y].\end{aligned}$$

On affirme maintenant que cela implique le cas général. En effet, on note d'abord que $(fX)[g] = fX[g]$ et en plus

$$\begin{aligned}[fX,gY] &= (fX)[g]Y + g[fX,Y] = fX[g]Y - g[Y,fX] \\ &= fX[g]Y - gY[f]X - gf[Y,X] = fX[g]Y - gY[f]X + gf[X,Y].\end{aligned}$$

14. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. On définit trois champs de vecteurs

$$\begin{aligned}E_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \Big(\sin(f) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} - \cos(f) \frac{\partial}{\partial z} \Big), \\ E_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \Big(\sin(f) \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} - \cos(f) \frac{\partial}{\partial z} \Big), \\ E_3 &= \cos(f) \frac{\partial}{\partial x} + \sin(f) \frac{\partial}{\partial z}.\end{aligned}$$

(*a*) Montrer que (E_1, E_2, E_3) est un champ de repères (orthonormés).
(*b*) Calculer ses formes de connexions.

Solution.

(*a*) On voit bien que

$$\begin{aligned}||E_1||^2 = ||E_2||^2 &= \frac{1}{2} \Big(\sin^2(f) + 1 + \cos^2(f) \Big) = 1, \\ ||E_3||^2 &= \sin^2(f) + \cos^2(f) = 1, \\ \langle E_1, E_2 \rangle &= \frac{1}{2} \Big(\sin^2(f) - 1 + \cos^2(f) \Big) = 0, \\ \langle E_1, E_3 \rangle = \langle E_2, E_3 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \Big(\sin(f)\cos(f) - \cos(f)\sin(f) \Big) = 0,\end{aligned}$$

ce qui nous dit que (E_1, E_2, E_3) est un champ de repères (orthonormés).

(*b*) On rappelle que, pour $i, j \in [\![1,3]\!]$, la 1-forme de connexion ω_{ij} associée au repère (E_1, E_2, E_3) défini sur une partie ouverte $U \subseteq \mathbb{R}^3$ est donnée par

$$\omega_{ij}(p)(v) = \big\langle E_j(p), \nabla_v E_i(p) \big\rangle,$$

pour $p \in U$ et $v \in \mathbb{R}^3$. De façon équivalente, on peut écrire

$$\nabla_v E_i(p) = \sum_{j=1}^3 \omega_{ij}(p)(v) E_j(p), \tag{15}$$

pour $p \in U$ et $v \in \mathbb{R}^3$. On remarque que $\omega_{ii} = 0$ et $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$, pour tous $i, j \in [\![1,3]\!]$. Noter que, si l'on écrit $\omega_{ij} = \sum_{k=1}^{3} f_{ij}^k dx_k$, alors f_{ij}^k est la k-ième coordonnée du vecteur (horizontal) donné par le produit matriciel $E_j \cdot J_{E_i}$, où J_F est la matrice jacobienne d'un champ vectoriel $F : U \to \mathbb{R}^n$. Dans ce cas,

$$\begin{aligned}
&\langle E_1, \nabla_? E_3 \rangle = \langle E_2, \nabla_? E_3 \rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz\Big),\\
&\langle E_1, \nabla_? E_2 \rangle = 0.
\end{aligned}$$

On conclut que $\omega_{12} = \omega_{21} = 0$, et

$$\omega_{31} = -\omega_{13} = \omega_{32} = -\omega_{23} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz\Big).$$

15. Compléter le champ de vecteurs suivant en un champ de repères (E_1, E_2, E_3) de $\mathbb{R}^3$:

$$E_1 = \cos(x)\frac{\partial}{\partial x} + \sin(x)\cos(z)\frac{\partial}{\partial y} + \sin(x)\sin(z)\frac{\partial}{\partial z},$$

puis calculer ses formes de connexions.

Solution. On voit bien que

$$\|E_1\|^2 = \cos^2(x) + \sin^2(x)\cos^2(z) + \sin^2(x)\sin^2(z) = 1.$$

On définit les champs de vecteurs

$$\begin{aligned}
&E_2 = -\sin(x)\frac{\partial}{\partial x} + \cos(x)\cos(z)\frac{\partial}{\partial y} + \cos(x)\sin(z)\frac{\partial}{\partial z},\\
&E_3 = -\sin(z)\frac{\partial}{\partial y} + \cos(z)\frac{\partial}{\partial z}.
\end{aligned}$$

C'est clair que

$$\begin{aligned}
\|E_2\|^2 &= \sin^2(x) + \cos^2(x)\cos^2(z) + \cos^2(x)\sin^2(z) = 1,\\
\|E_3\|^2 &= \sin^2(z) + \cos^2(z) = 1,\\
\langle E_1, E_2 \rangle &= -\sin(x)\cos(x) + \sin(x)\cos(x)\cos^2(z) + \sin(x)\cos(x)\sin^2(z) = 0,\\
\langle E_1, E_3 \rangle &= -\sin(x)\sin(z)\cos(z) + \sin(x)\sin(z)\cos(z) = 0,\\
\langle E_2, E_3 \rangle &= -\cos(x)\sin(z)\cos(z) + \cos(x)\sin(z)\cos(z) = 0.
\end{aligned}$$

En conséquence, (E_1, E_2, E_3) est un champ de repères (orthonormés). En outre,

$$\begin{aligned}
\langle E_1, \nabla_? E_3 \rangle &= \big(-\sin(x)\cos^2(z) - \sin(x)\sin^2(z)\big)dz = -\sin(x)dz,\\
\langle E_2, \nabla_? E_3 \rangle &= \big(-\cos(x)\cos^2(z) - \cos(x)\sin^2(z)\big)dz = -\cos(x)dz,\\
\langle E_1, \nabla_? E_2 \rangle &= \big(\sin^2(x) + \cos^2(x)\cos^2(z) + \cos^2(x)\sin^2(z)\big)dx.
\end{aligned}$$

On conclut que $\omega_{21} = -\omega_{12} = dx$, $\omega_{31} = -\omega_{13} = -\sin(x)dz$ et $\omega_{32} = -\omega_{23} = -\cos(x)dz$.

16. Soit (E_1, E_2, E_3) le champ de repères cylindrique défini sur $\mathbb{R}^3$ privé de l'axe z.

(a) Écrire (E_1, E_2, E_3) dans les coordonnées (x, y, z).
(b) Calculer ses formes de connexions.
(c) Calculer les formes $(\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3)$ duales de (E_1, E_2, E_3).
(d) Vérifier les équations structurelles de Cartan

$$d\Theta_i = \sum_{j=1}^{3} \omega_{ij} \wedge \Theta_j, \quad d\omega_{ij} = \sum_{k=1}^{3} \omega_{ik} \wedge \omega_{kj}$$

Solution.

(a) On rappelle que

$$E_1 = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right),$$
$$E_2 = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(-y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}\right),$$
$$E_3 = \frac{\partial}{\partial z},$$

pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus (\{(0,0)\} \times \mathbb{R})$.

(b) Pour simplifier les calculs on utilisera l'application $\rho : \mathbb{R}^3 \setminus (\{(0,0)\} \times \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par $\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2+y^2}$ et la forme $\eta : \mathbb{R}^3 \setminus (\{(0,0)\} \times \mathbb{R}) \to (\mathbb{R}^3)^*$ donnée par

$$\eta = \frac{ydx - xdy}{x^2+y^2}.$$

Un calcul élémentaire nous dit que

$$d\eta = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} dy \wedge dx - \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} dx \wedge dy = 0. \tag{16}$$

Par ailleurs, on voit bien que

$$\langle E_1, \nabla_? E_3 \rangle = \langle E_2, \nabla_? E_3 \rangle = 0,$$
$$\langle E_1, \nabla_? E_2 \rangle = \frac{ydx - xdy}{x^2+y^2}.$$

En conséquence, on trouve que $\omega_{21} = -\omega_{12} = \eta$ et $\omega_{31} = -\omega_{13} = \omega_{32} = -\omega_{23} = 0$.

(c) C'est facile à voir que les formes $(\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3)$ duales de (E_1, E_2, E_3) sont données par

$$\Theta_1 = \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2+y^2}},$$
$$\Theta_2 = \frac{-ydx + xdy}{\sqrt{x^2+y^2}},$$
$$\Theta_3 = dz,$$

pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus (\{(0,0)\} \times \mathbb{R})$. Noter que $\Theta_1 = d\rho$ et $\Theta_2 = -\rho\eta$.

(d) On voit bien que

$$d\Theta_1 = d\big(d\rho\big) = 0 = \omega_{12} \wedge \Theta_2 = \sum_{j=1}^{3} \omega_{1j} \wedge \Theta_j,$$

$$d\Theta_2 = -d\big(\rho\eta\big) = -d\rho \wedge \eta = \eta \wedge d\rho = \omega_{21} \wedge \Theta_1 = \sum_{j=1}^{3} \omega_{2j} \wedge \Theta_j,$$

$$d\Theta_3 = d\big(dz\big) = 0 = \sum_{j=1}^{3} \omega_{3j} \wedge \Theta_j,$$

et que

$$d\omega_{12} = 0 = \sum_{k=1}^{3} \omega_{1k} \wedge \omega_{k2},$$

$$d\omega_{23} = 0 = \sum_{k=1}^{3} \omega_{2k} \wedge \omega_{k3},$$

$$d\omega_{31} = 0 = \sum_{k=1}^{3} \omega_{3k} \wedge \omega_{k1},$$

où l'on a utilisé (16).

17. Mêmes questions que l'exercice précédent avec le champ de repères sphérique.

Solution.

(a) On rappelle que

$$E_1 = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\Big(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\Big),$$
$$E_2 = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\Big(-y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}\Big),$$
$$E_3 = \frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2)(x^2+y^2+z^2)}}\Big(-zx\frac{\partial}{\partial x} - zy\frac{\partial}{\partial y} + (x^2+y^2)\frac{\partial}{\partial z}\Big),$$

pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus (\{(0,0)\} \times \mathbb{R})$.

(b) Pour simplifier les calculs on utilisera les définitions dans le deuxième item de l'exercice **16**. En plus, on considérera l'application $r : \mathbb{R}^3 \setminus (\{(0,0)\} \times \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par $r(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ et la forme $\zeta : \mathbb{R}^3 \setminus (\{(0,0)\} \times \mathbb{R}) \to (\mathbb{R}^3)^*$ donnée par

$$\zeta = r\frac{d(z/r)}{\rho}.$$

On affirme que

$$\zeta = \rho^2\frac{d(z/\rho)}{r^2}.$$

En effet, comme $r^2 = \rho^2 + z^2$, on a $rdr = \rho d\rho + zdz$, ce qui implique que $r^2dz - rzdr = \rho^2dz + z^2dz - \rho zd\rho - z^2dz = \rho^2dz - \rho zd\rho$. En conséquence,

$$\zeta = r\frac{d(z/r)}{\rho} = \frac{r^2dz - rzdr}{r^2\rho} = \frac{\rho^2dz - \rho zd\rho}{r^2\rho} = \rho^2\frac{d(z/\rho)}{r^2}.$$

Par ailleurs, l'identité générale $zd(\rho/r) = \rho d(z/r) - \rho^2 d(z/\rho)/r$ nous dit que

$$zd(\rho/r) = \left(\frac{\rho^2}{r} - r\right)\zeta = -\frac{z^2}{r}\zeta,$$

qui implique par continuité

$$d(\rho/r) = -\frac{z}{r}\zeta.$$

On remarque aussi le résultat suivant. Soient $U \subseteq \mathbb{R}^n$ une partie ouverte et $J \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, et soient $g : U \to \mathbb{R}$ et $h : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions différentiables, telles que $\mathsf{Img}(g) \subseteq J$. On pose $f = h \circ g$. Alors,

$$df \wedge dg = \Big(\big(h' \circ g\big)dg\Big) \wedge dg = 0. \tag{17}$$

En particulier, si l'on choisit $f = r/\rho$ et $g = z/r$ on voit bien que $f = (1 - g^2)^{-1/2}$, ce qui implique que $df \wedge dg = 0$. Avec ces définitions, on voit bien que $\zeta = f\,dg$, ce qui implique que $d\zeta = df \wedge dg = 0$.

On voit bien que

$$\langle E_3, \nabla_? E_1\rangle = \frac{-zxdx - yzdy + (x^2+y^2)dz}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{-zrdr + r^2dz}{\rho r^2} = r\frac{d(z/r)}{\rho} = \zeta,$$

$$\langle E_1, \nabla_? E_2\rangle = \frac{ydx - xdy}{\sqrt{(x^2+y^2)(x^2+y^2+z^2)}} = \frac{\rho\eta}{r},$$

$$\langle E_3, \nabla_? E_2\rangle = -\frac{z}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(ydx - xdy) = -\frac{z\eta}{r}.$$

En conséquence, on a que

$$\omega_{21} = -\omega_{12} = \frac{\rho\eta}{r},$$

$$\omega_{32} = -\omega_{23} = \frac{z\eta}{r},$$

$$\omega_{31} = -\omega_{13} = -\zeta.$$

(c) C'est facile à voir que les formes $(\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3)$ duales de (E_1, E_2, E_3) sont données par

$$\Theta_1 = \frac{xdx + ydy + zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = dr,$$

$$\Theta_2 = \frac{-ydx + xdy}{\sqrt{x^2+y^2}} = -\rho\eta,$$

$$\Theta_3 = \frac{-zxdx - yzdy + (x^2+y^2)dz}{\sqrt{(x^2+y^2)(x^2+y^2+z^2)}} = r^2\frac{d(z/r)}{\rho} = r\zeta,$$

pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus (\{(0,0)\} \times \mathbb{R})$.

(d) On voit bien que

$$d\Theta_1 = d\big(dr\big) = 0 = \sum_{j=1}^{3} \omega_{1j} \wedge \Theta_j,$$

$$\begin{aligned} d\Theta_2 &= -dr \wedge (\rho/r)\eta - d(\rho/r) \wedge r\eta = (\rho\eta/r) \wedge dr - (z\eta/r) \wedge r\zeta \\ &= \omega_{21} \wedge \Theta_1 + \omega_{23} \wedge \Theta_3 = \sum_{j=1}^{3} \omega_{2j} \wedge \Theta_j, \end{aligned}$$

$$d\Theta_3 = dr \wedge \zeta = -\zeta \wedge dr = \omega_{31} \wedge \Theta_1 = \sum_{j=1}^{3} \omega_{3j} \wedge \Theta_j,$$

et

$$d\omega_{12} = -d(\rho/r) \wedge \eta = (z/r)\zeta \wedge \eta = \omega_{13} \wedge \omega_{32} = \sum_{k=1}^{3} \omega_{1k} \wedge \omega_{k2},$$

$$d\omega_{23} = -d(z/r) \wedge \eta = \eta \wedge d(z/r) = \omega_{21} \wedge \omega_{13} = \sum_{k=1}^{3} \omega_{2k} \wedge \omega_{k3},$$

$$d\omega_{31} = 0 = \omega_{32} \wedge \omega_{21} = \sum_{k=1}^{3} \omega_{3k} \wedge \omega_{k1},$$

où l'on a utilisé que $\omega_{12} \wedge \Theta_2 = \omega_{13} \wedge \Theta_3 = \omega_{32} \wedge \Theta_2 = \omega_{32} \wedge \omega_{21} = 0$.

18. Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ une courbe birégulière définie sur une intervalle ouvert I paramétrée par longueur d'arc et soit et (E_1, E_2, E_3) un champ de repères sur $\mathbb{R}^3$ qui prolonge le repère de Frénet $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ de γ.

(a) Montrer que les formes de connexion de (E_1, E_2, E_3) vérifient :

$$\omega_{12}(\mathbf{t}) = \kappa, \quad \omega_{13}(\mathbf{t}) = 0, \quad \omega_{23}(\mathbf{t}) = \tau.$$

(b) Déduire les formules de Frénet des équations de connexion.

Solution.

(a) Comme $E_1(\gamma(t)) = \mathbf{t}(t)$, pour tout $t \in I$, on conclut que $\nabla_{\mathbf{t}(t)} E_1(\gamma(t)) = \mathbf{t}'(t)$. De la même façon, $E_2(\gamma(t)) = \mathbf{n}(t)$ et $E_3(\gamma(t)) = \mathbf{b}(t)$ pour tout $t \in I$, ce qui implique que $\nabla_{\mathbf{t}(t)} E_2(\gamma(t)) = \mathbf{n}'(t)$ et $\nabla_{\mathbf{t}(t)} E_3(\gamma(t)) = \mathbf{b}'(t)$. Cela nous dit en particulier que

$$\omega_{12}(\mathbf{t}(t)) = \left\langle \mathbf{n}(t), \nabla_{\mathbf{t}(t)} E_1(\gamma(t)) \right\rangle = \left\langle \mathbf{n}(t), \mathbf{t}'(t) \right\rangle = \kappa(t)$$

et

$$\omega_{13}(\mathbf{t}(t)) = \left\langle \mathbf{b}(t), \nabla_{\mathbf{t}(t)} E_1(\gamma(t)) \right\rangle = \left\langle \mathbf{b}(t), \mathbf{t}'(t) \right\rangle = 0,$$

vu que, par définition, $\mathbf{t}'(t) = \kappa(t)\mathbf{n}(t)$, pour tout $t \in I$. De la même façon, comme $\mathbf{b}'(t) = -\tau(t)\mathbf{n}(t)$,

$$\omega_{32}(\mathbf{t}(t)) = \left\langle \mathbf{n}(t), \nabla_{\mathbf{t}(t)} E_3(\gamma(t)) \right\rangle = \left\langle \mathbf{n}(t), \mathbf{b}'(t) \right\rangle = -\tau(t),$$

pour tout $t \in I$. En conséquence, $\omega_{23}(\mathbf{t}(t)) = -\omega_{32}(\mathbf{t}(t)) = \tau(t)$, pour tout $t \in I$.

(b) Les autres identités dans (3) sont une conséquence du fait que $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$ et de l'identité (15), vu que

$$\omega_{21}(\mathbf{t}(t)) = \left\langle \mathbf{t}(t), \nabla_{\mathbf{t}(t)} E_2(\gamma(t)) \right\rangle = \left\langle \mathbf{t}(t), \mathbf{n}'(t) \right\rangle,$$

$$\omega_{31}(\mathbf{t}(t)) = \left\langle \mathbf{t}(t), \nabla_{\mathbf{t}(t)} E_3(\gamma(t)) \right\rangle = \left\langle \mathbf{t}(t), \mathbf{b}'(t) \right\rangle,$$

et

$$\omega_{23}(\mathbf{t}(t)) = \left\langle \mathbf{b}(t), \nabla_{\mathbf{t}(t)} E_2(\gamma(t)) \right\rangle = \left\langle \mathbf{b}(t), \mathbf{n}'(t) \right\rangle,$$

pour tout $t \in I$.