MAT4213 - Géométrie différentielle
Deuxième semestre — 2020-2021

Fiche 2: Courbes, dérivées covariantes, champs de repères

Courbes planes

1. Soit $\alpha :]\,a,b\,[\to \mathbb{R}^2$ une courbe régulière paramétrée par longueur d'arc, que l'on écrira $\alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s))$. Soit $\mathbf{t} = \alpha' :]\,a,b\,[\to \mathbb{R}^2$ la courbe **tangente** de α et soit $\mathbf{n} :]\,a,b\,[\to \mathbb{R}^2$ la courbe **normale** de α, *i.e.* $\mathbf{n}(s)$ est le seul vecteur unitaire tel que $(\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s))$ est une base orthonormale orientée de $\mathbb{R}^2$ pour tout $s \in]\,a,b\,[$. On rappelle que la **courbure** de α en $s \in]\,a,b\,[$ est donné par $\kappa(s) \in \mathbb{R}$ tel que

$$\mathbf{t}'(s) = \kappa(s) \cdot \mathbf{n}(s). \tag{1}$$

(a) Montrer que la courbure de α en s coïncide avec l'aire (avec signe) du rectangle défini par $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{t}'(s)\}$. Calculer l'expression explicite de $\kappa(s)$ en fonction de α_1, α_2 et leurs dérivées.

(b) Montrer que les vecteurs $\mathbf{t}'(s)$ et $\mathbf{n}'(s)$ sont orthogonaux.

(c) Montrer que, étant donné $r > 0$, l'application $t \mapsto |\kappa(s)|$ est constante de valeur $1/r$ si et seulement si l'image de α est incluse dans un cercle de rayon r.

Noter en particulier que (1) implique que

$$\left|\kappa(s)\right| = \left\|\mathbf{t}'(s)\right\| = \left\|\alpha''(s)\right\|,$$

pour tout $s \in]\,a,b\,[$.

2. Soit $\beta :]\,a,b\,[\to \mathbb{R}^2$ une courbe régulière que l'on écrira $\beta(t) = (\beta_1(t), \beta_2(t))$. À partir de la règle de dérivation en chaîne et de l'expression

$$\kappa_\alpha(t) = \alpha_1'(t)\alpha_2''(t) - \alpha_2'(t)\alpha_1''(t)$$

pour tout $t \in]\,c,d\,[$ de la courbure κ_α d'une courbe $\alpha :]\,c,d\,[\to \mathbb{R}^2$ paramétrée par longueur d'arc obtenue dans l'exercice précédent, déduire que la courbure κ_β de β est

$$\kappa_\beta(t) = \frac{\beta_1'(t)\beta_2''(t) - \beta_2'(t)\beta_1''(t)}{[(\beta_1'(t))^2 + (\beta_2'(t))^2]^{3/2}},$$

pour tout $t \in]\,a,b\,[$.

3. Soit $\alpha :]\,a,b\,[\to \mathbb{R}^2$ une courbe régulière paramétrée par longueur d'arc dont la courbure ne s'annule pas. Étant donné $s_0 \in]\,a,b\,[$, on rappelle que le **centre de courbure de α en s_0** est le point

$$x(s_0) = \alpha(s_0) + \frac{1}{\kappa(s_0)}\mathbf{n}(s_0),$$

et le **cercle osculateur à α en s_0** est le cercle de centre $x(s_0)$ et de **rayon de courbure** $\rho(s_0) = 1/|\kappa(s_0)| > 0$. Montrer que la courbe α et le cercle osculateur à α en s_0 admettent la même droite tangente et la même droite normale en $\alpha(s_0)$.

Courbes dans l'espace

4. *Les formules de Frenet-Serret.* Soit $\alpha : J \to \mathbb{R}^3$ une courbe birégulière de classe C^∞ paramétrée par longueur d'arc, où $J \subseteq \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert. Montrer que les identités

$$\begin{aligned} \mathbf{t}'(s) &= \qquad\qquad \kappa(s)\mathbf{n}(s) \\ \mathbf{n}'(s) &= -\kappa(s)\mathbf{t}(s) \qquad\qquad + \tau(s)\mathbf{b}(s) \\ \mathbf{b}'(s) &= \qquad\quad - \tau(s)\mathbf{n}(s) \end{aligned} \tag{2}$$

peuvent se réécrire sous la forme

$$\begin{aligned} \mathbf{t}'(s) &= \omega(s) \wedge \mathbf{t}(s) \\ \mathbf{n}'(t) &= \omega(s) \wedge \mathbf{n}(s) \\ \mathbf{b}'(t) &= \omega(s) \wedge \mathbf{b}(s) \end{aligned}$$

où $\omega(s) = \tau(s)\mathbf{t}(s) + \kappa(s)\mathbf{b}(s)$.

5. Soit $\alpha : J \to \mathbb{R}^3$ une courbe birégulière paramétrée par longueur d'arc, où $J \subseteq \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert, et soit $\kappa : J \to \mathbb{R}$ sa courbure. Montrer que la torsion de α en $s \in J$ est

$$\tau(s) = \frac{\left\langle \alpha'(s) \wedge \alpha''(s), \alpha'''(s) \right\rangle}{\kappa^2(s)}.$$

6. Soit $\alpha : J \to \mathbb{R}^3$ une courbe birégulière de classe C^∞, où $J \subseteq \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert, et soit $s : J \to \mathbb{R}$ la fonction

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \left\| \alpha'(u) \right\| du$$

pour tout $t \in J$, où $t_0 \in J$ est un point fixe. Soit $J' = s(J)$, $t : J' \to J$ l'application réciproque de s et $\beta = \alpha \circ t : J' \to \mathbb{R}^3$. On note

$$\frac{d\alpha}{dt}(t) = \alpha'(t), \frac{d^2\alpha}{dt^2}(t) = \alpha''(t) \text{ et } \frac{d^3\alpha}{dt^3}(t) = \alpha'''(t).$$

(a) Montrer que

$$\frac{dt}{ds}(s) = \frac{1}{\left\| \alpha'\big(t(s)\big) \right\|} \text{ et } \frac{d^2t}{ds^2}(s) = -\frac{\left\langle \alpha'\big(t(s)\big), \alpha''\big(t(s)\big) \right\rangle}{\left\| \alpha'\big(t(s)\big) \right\|^4},$$

pour tout $s \in J'$.

(b) Montrer que la courbure de α en $t \in J$ est

$$\kappa_\alpha(t) = \frac{\left\| \alpha'(t) \wedge \alpha''(t) \right\|}{\left\| \alpha'(t) \right\|^3}.$$

(c) Montrer que la torsion de α en $t \in J$ est

$$\tau_\alpha(t) = \frac{\big\langle \alpha'(t) \wedge \alpha''(t), \alpha'''(t) \big\rangle}{\big\| \alpha'(t) \wedge \alpha''(t) \big\|^2}.$$

7. Déterminer le domaine de définition maximal des expressions suivantes pour qu'elles donnent des courbes birégulières dans l'espace et calculer la courbure et la torsion respectives :

(a) $\alpha(u) = (u, u^2, u^3)$;

(b) $\alpha(u) = (u, (1+u)/u, (1-u^2)/u)$;

(c) $\alpha(u) = (u, f(u), g(u))$, où f et g sont deux fonctions de classe C^3 définies sur un intervalle $J \subseteq \mathbb{R}$;

(d) $\alpha(u) = (a(u - \sin(u)), a(u - \cos(u)), bu)$, avec $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

(e) $\alpha(u) = (a(3u - u^3), 3au^2, a(3u + u^3))$, avec $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

8. Une courbe birégulière $\alpha : J \to \mathbb{R}^3$, où $J \subseteq \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert, est appelée une **hélice** s'il existe $v \in \mathbb{R}^3$ non nul tel que l'application $t \mapsto \langle v, \mathbf{t}(t) \rangle$ définie sur J soit constante.

(a) On suppose que $\tau(t) \neq 0$ pour tout $t \in J$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(H.1) la courbe α est une hélice ;

(H.2) la fonction $t \mapsto \kappa(t)/\tau(t)$ définie sur J est constante ;

(H.3) il existe un plan $\Pi \subseteq \mathbb{R}^3$ tel que les droites normales de α, *i.e.* les droites de la forme $\{\alpha(t) + \mathbf{n}(t)s : s \in \mathbb{R}\}$, soient parallèles à Π ;

(H.4) il existe un vecteur non nul $w \in \mathbb{R}^3$ tel que l'application $t \mapsto \langle w, \mathbf{b}(t) \rangle$ définie sur J est constante.

(b) Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $c^2 = a^2 + b^2$ et $a, c \neq 0$. Montrer que la courbe $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ donnée par

$$\alpha(s) = \big(a \cos(s/c), a \sin(s/c), bs/c\big)$$

pour tout $s \in \mathbb{R}$ est une hélice paramétrée par longueur d'arc. Montrer en plus que $\kappa(s)/\tau(s) = |a|/b$, pour tout $s \in \mathbb{R}$, si $b \neq 0$.

Dérivées covariantes et champs de repères

9. Soit $v = (1, -1, 2)$ et $p = (1, 3, -1)$. Calculer $\nabla_v W$ où

(a) $W = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}$

(b) $W = x \frac{\partial}{\partial x} + x^2 \frac{\partial}{\partial y} - z^2 \frac{\partial}{\partial z}$.

10. Soit $V = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial z}$ et $W = \cos(x) \frac{\partial}{\partial x} + \sin(x) \frac{\partial}{\partial y}$. Calculer

(a) $\nabla_V W$;

(b) $\nabla_V (z^2 W)$;

(c) $\nabla_V (\nabla_V W)$;

(d) $\nabla_V V$;

(e) $\nabla_W V$;

(f) $\nabla_V(xV - zW)$.

11. Soit $X = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}$. Montrer que pour tout champ de vecteurs V sur $\mathbb{R}^3$, on a

$$\nabla_V X = V.$$

12. Montrer que si W est un champ de vecteurs différentiable avec $\|W\|$ constant alors $\nabla_V W$ est orthogonal à W pour tout champ de vecteurs V.

13. Étant donnés deux champs de vecteurs différentiables X, Y sur $\mathbb{R}^3$, on définit le champ de vecteurs

$$[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X,$$

appelé le **crochet** des champs X et Y. Montrer les identités :

(a) $[X, Y][f] = X[Y[f]] - Y[X[f]]$, pour $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ fonction de classe C^2 ;

(b) $[X, Y] = -[Y, X]$;

(c) $[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0$, si X, Y, Z sont de classe C^2 ;

(d) $[fX, gY] = fX[g]Y - gY[f]X + fg[X, Y]$, pour $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ fonctions différentiables.

14. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. On définit trois champs de vecteurs

$$E_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sin(f)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} - \cos(f)\frac{\partial}{\partial z}\right),$$
$$E_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sin(f)\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} - \cos(f)\frac{\partial}{\partial z}\right),$$
$$E_3 = \cos(f)\frac{\partial}{\partial x} + \sin(f)\frac{\partial}{\partial z}.$$

(a) Montrer que (E_1, E_2, E_3) est un champ de repères (orthonormés).

(b) Calculer ses formes de connexions.

15. Compléter le champ de vecteurs suivant en un champ de repères (E_1, E_2, E_3) de $\mathbb{R}^3$:

$$E_1 = \cos(x)\frac{\partial}{\partial x} + \sin(x)\cos(z)\frac{\partial}{\partial y} + \sin(x)\sin(z)\frac{\partial}{\partial z},$$

puis calculer ses formes de connexions.

16. Soit (E_1, E_2, E_3) le champ de repères cylindrique défini sur $\mathbb{R}^3$ privé de l'axe z.

(a) Écrire (E_1, E_2, E_3) dans les coordonnées (x, y, z).

(b) Calculer ses formes de connexions.

(c) Calculer les formes $(\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3)$ duales de (E_1, E_2, E_3).

(d) Vérifier les équations structurelles de Cartan

$$d\Theta_i = \sum_{j=1}^{3} \omega_{ij} \wedge \Theta_j, \quad d\omega_{ij} = \sum_{k=1}^{3} \omega_{ik} \wedge \omega_{kj}$$

17. Mêmes questions que l'exercice précédent avec le champ de repères sphérique.

18. Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ une courbe birégulière définie sur une intervalle ouvert I paramétrée par longueur d'arc et soit et (E_1, E_2, E_3) un champ de repères sur $\mathbb{R}^3$ qui prolonge le repère de Frénet $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ de γ.

(a) Montrer que les formes de connexion de (E_1, E_2, E_3) vérifient :

$$\omega_{12}(\mathbf{t}) = \kappa, \quad \omega_{13}(\mathbf{t}) = 0, \quad \omega_{23}(\mathbf{t}) = \tau.$$

(b) Déduire les formules de Frénet des équations de connexion.