MAT4213 - Géométrie différentielle
Deuxième semestre — 2020-2021

Fiche 1: Calcul différentiel sur $\mathbb{R}^n$

1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application différentiable.

(a) Rappeler ce que cela signifie.

(b) Dériver la fonction $u(x) = f(x, -x)$.

(c) Différentier la fonction $g(x, y) = f(y, x)$.

Solution.

(a) Étant donné une application $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, on rappelle que f est différentiable en $x_0 \in \mathbb{R}^n$ s'il existe une transformation linéaire $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ telle que

$$\lim_{h \to \mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0) - L(h)}{||h||} = 0,$$

où $||\ \ ||$ dénote la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$. En plus, l'application linéaire L est unique, elle est appelé la différentielle de f en x_0, et elle est notée $DF(x_0)$ ou $df(x_0)$. Si $m = 1$, étant donné $x \in \mathbb{R}^n$, il existe un unique vecteur $\nabla f(x) \in \mathbb{R}^n$ tel que $DF(x)(v) = \langle \nabla F(x), v \rangle$ pour tout $v \in \mathbb{R}^n$. Le vecteur $\nabla f(x)$ est appelé le gradient de f en x. On dit que F est différentiable si elle est différentiable en tout point $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

(b) Soit $i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ l'application donnée par $i(x) = (x, -x)$. C'est clair que i est différentiable et que $Di(x) = i$. Par ailleurs, le théorème de différentiation de composition de fonctions nous dit que $u = f \circ i$ est différentiable et que

$$Du(x) = Df\big(i(x)\big) \circ Di(x) = Df(x, -x) \circ i,$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(c) Soit $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application donnée par $G(x, y) = (y, x)$. C'est clair que G est différentiable et que $DG(x, y) = G$. Par ailleurs, le théorème de différentiation de composition de fonctions nous dit que $g = f \circ G$ est différentiable et que

$$Dg(x, y) = Df\big(G(x, y)\big) \circ DG(x, y) = Df(y, x) \circ G,$$

pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

2. Soient $p = (2, 0, -1) \in \mathbb{R}^3$, $v = (2, -1, 3) \in T_p\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^3$ et $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Calculer la différentielle de f au point p et dans la direction v dans les cas suivants :

(a) $f(x, y, z) = x + yz$,

(b) $f(x, y, z) = z^3 + x \cos(y)$.

Solution. On rappelle que le gradient $\nabla f(x,y,z)$ de f en $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ est le vecteur formé des dérivées partielles de f, *i.e.*

$$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\right),$$

pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. La différentielle de f en $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ s'écrit sous la forme

$$df(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)dy + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)dz,$$

pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, et $v_p[f] = df(p)(v)$.

(a) On voit bien que

$$df(x,y,z) = dx + zdy + ydz,$$

pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. En particulier,

$$df(p) = dx - dy \text{ et } v_p[f] = 2 - (-1) = 3.$$

(b) On voit bien que

$$df(x,y,z) = \cos(y)dx - x\sin(y)dy + 3z^2dz,$$

pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. En particulier,

$$df(p) = dx + 3z^2dz \text{ et } v_p[f] = 2 + 9 = 11.$$

3. (a) Soit U_i le i-ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ avec $1 \leq i \leq n$. Montrer que, pour toute fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$U_i[f] = \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Pour cette raison, on note souvent $U_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$.

(b) Soit $X = (X_1, \ldots, X_n)$ un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^n$. Montrer l'égalité :

$$X[f] = \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Solution. Étant donné $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}\}$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$, on considère la fonction $\iota_{x_0,v} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ donnée par $\iota_{x_0,v}(t) = x_0 + tv$, pour $t \in \mathbb{R}$. On rappelle que la dérivée directionnelle $v_{x_0}[F]$ de $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ en $x \in \mathbb{R}^n$ dans la direction du vecteur $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}\}$ est donnée par la dérivée en $t = 0$ de la fonction $F \circ \iota_{x_0,v} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$. D'après le théorème de différentiation de composition de fonctions, si F est différentiable, $F \circ \iota_{x_0,v}$ est aussi différentiable et

$$v_{x_0}[F] = D(F \circ \iota_{x_0,v})(0) = DF(x_0)(v).$$

On rappelle aussi que, étant donné un champ vectoriel $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ et une fonction différentiable $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, on considère la fonction $V[f] : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ donnée par $V[f](x) = V(x)_x[f]$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

(*a*) Si $m=1$, on conclut que

$$v_{x_0}[F] = \langle \nabla F(x_0), v\rangle.$$

En particulier, si $v = U_i$, on trouve que

$$(U_i)_x[f] = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x),$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

(*b*) On voit bien que

$$X(x)_x[f] = \langle \nabla F(x), X(x)\rangle = \sum_{i=1}^{n} X_i(x)\frac{\partial f}{\partial x_i}(x),$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

4. Soient $V(x,y,z) = (y^2, 0, -x)$, $f(x,y,z) = xy$ et $g(x,y,z) = z^3$. Calculer :

(*a*) $V[f]$,
(*b*) $V[g]$,
(*c*) $V[fg]$,
(*d*) $fV[g] - gV[f]$,
(*e*) $V[V[f]]$.

Solution.

(*a*) C'est clair que

$$V[f](x,y,z) = y^2\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) - x\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = y^3,$$

pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

(*b*) On voit bien que

$$V[g](x,y,z) = y^2\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) - x\frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z) = -3xz^2,$$

pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

(*c*) C'est clair que

$$V[fg](x,y,z) = y^2\frac{\partial (fg)}{\partial x}(x,y,z) - x\frac{\partial (fg)}{\partial z}(x,y,z) = y^3z^3 - 3x^2yz^2,$$

pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

(*d*) On voit bien que

$$\begin{aligned}
&\big(fV[g] - gV[f]\big)(x,y,z)\\
&= f(x,y,z)\left(y^2\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) - x\frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z)\right)\\
&\quad - g(x,y,z)\left(y^2\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) - x\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\right)\\
&= -y^3z^3 - 3x^2yz^2,
\end{aligned}$$

pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

(e) C'est clair que

$$V[V[f]](x,y,z) = y^2 \frac{\partial V[f]}{\partial x}(x,y,z) - x \frac{\partial V[f]}{\partial z}(x,y,z) = 0,$$

pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

5. Soient V et W deux champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^n$ tels que pour toute fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on ait $V[f] = W[f]$. Montrer que $V = W$.

Solution. On va écrire $V(x) = (V_1(x), \dots, V_n(x))$ et $W(x) = (W_1(x), \dots, W_n(x))$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, où $V_i, W_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sont les fonctions coordonnées pour $i \in [\![1,n]\!]$. Étant donné $i \in [\![1,n]\!]$, soit $\pi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la projection sur la i-ème coordonnée. On voit bien que $V[\pi_i] = V_i$ et $W[\pi_i] = W_i$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, ce qui montre le résultat demandé.

6. Si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, on note $\Lambda^k E^*$ l'espace vectoriel des formes k-linéaires alternées sur E.

(a) Soient $\phi \in \Lambda^k E^*$ et $\psi \in \Lambda^\ell E^*$. Donner la définition de $\phi \wedge \psi \in \Lambda^{k+\ell} E^*$.

(b) Quel est le lien entre $\phi \wedge \psi$ et $\psi \wedge \phi$?

(c) Considérer le cas où $k = \ell = 1$.

(d) Soient $\phi_1, \dots, \phi_k \in \Lambda^1 E^*$. Calculer $\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_k$.

(e) On note $(U_1, \dots, U_n) = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n})$ la base canonique de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ et $(U_1^*, \dots, U_n^*) = (dx_1, \dots, dx_n)$ sa base duale. Soit $\phi \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*$. Étant donné $\phi \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*$, montrer que

$$\phi = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} \phi(U_{i_1}, \dots, U_{i_k}) U_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge U_{i_k}^*.$$

(f) Montrer que $(U_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge U_{i_k}^*)_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n}$ forme une base de $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*$ et en déduire sa dimension.

(g) Comment écrit-on communément $U_1^* \wedge \cdots \wedge U_n^*$?

Solution.

(a) On rappelle que

$$\big(\phi \wedge \psi\big)(v_1, \dots, v_{k+\ell}) = \frac{1}{k!\ell!} \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_{k+\ell}} \epsilon(\sigma) \phi(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \psi(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+\ell)}),$$

pour tous $v_1, \dots, v_{k+\ell} \in E$, où $\mathbb{S}_N$ est le groupe symétrique d'indice N et $\epsilon(\sigma)$ est le signe de la permutation σ.

Soit $\mathbb{S}_k \times \mathbb{S}_\ell \to \mathbb{S}_{k+\ell}$ le morphisme de groupes qui associe à $(\tau', \tau'') \in \mathbb{S}_k \times \mathbb{S}_\ell$ l'élément $\tau' \oplus \tau'' \in \mathbb{S}_{k+\ell}$ donné par

$$(\tau' \oplus \tau'')(i) = \begin{cases} \tau'(i), & \text{si } i \in [\![1,k]\!], \\ k + \tau''(i-k), & \text{si } i \in [\![k+1, k+\ell]\!]. \end{cases}$$

On peut considérer que $\mathbb{S}_k \times \mathbb{S}_\ell$ est un sous-groupe de $\mathbb{S}_{k+\ell}$ au moyen de l'inclusion précédente. Noter que $\epsilon(\tau' \oplus \tau'') = \epsilon(\tau')\epsilon(\tau'')$, pour tout $(\tau', \tau'') \in \mathbb{S}_k \times \mathbb{S}_\ell$.

D'ailleurs, on considère l'ensemble

$$\mathbb{S}_{k,\ell} = \big\{\sigma \in \mathbb{S}_{k+\ell} : \sigma(1) < \cdots < \sigma(k) \text{ et } \sigma(k+1) < \cdots < \sigma(k+\ell)\big\}.$$

C'est facile à voir que, étant donné un élément $\sigma \in \mathbb{S}_{k+\ell}$, il existe des uniques élément $\bar\sigma \in \mathbb{S}_{k,\ell}$ et $(\tau', \tau'') \in \mathbb{S}_k \times \mathbb{S}_\ell$ tels que $\sigma = \bar\sigma(\tau' \oplus \tau'')$. En effet, soient $I = \sigma(\llbracket 1, k \rrbracket)$ et $J = \sigma(\llbracket k+1, k+\ell \rrbracket)$. On note qu'il existe des uniques bijections $\rho' : I \to I$ et $\rho'' : I \to I$ tels que $(\rho' \sqcup \rho'') \circ \sigma \in \mathbb{S}_{k,\ell}$, où $\rho' \sqcup \rho'' \in \mathbb{S}_{k+\ell}$ est donné par

$$(\rho' \sqcup \rho'')(i) = \begin{cases} \rho'(i), & \text{si } i \in I, \\ \rho''(i), & \text{si } i \in J. \end{cases}$$

Soient $\sigma' = \sigma|_{\llbracket 1,k \rrbracket}$ et $\sigma'' = \sigma \circ \iota$, où $\iota : \llbracket 1, \ell \rrbracket \to \llbracket k+1, k+\ell \rrbracket$ est l'application donnée par $\iota(i) = k+i$. On pose alors $\bar\tau' = \sigma'^{-1} \circ \rho' \circ \sigma' \in \mathbb{S}_k$ et $\bar\tau'' = \sigma''^{-1} \circ \rho'' \circ \sigma'' \in \mathbb{S}_\ell$. Les définitions précédentes impliquent que $\bar\sigma = \sigma(\bar\tau' \oplus \bar\tau'') \in \mathbb{S}_{k,\ell}$, ce qui nous dit que $\sigma = \bar\sigma(\tau' \oplus \tau'')$, où $\tau' = \bar\tau'^{-1}$ et $\tau'' = \bar\tau''^{-1}$. L'unicité de l'expression précédente suit de l'unicité des bijections ρ' et ρ''.

On affirme alors que

$$\big(\phi \wedge \psi\big)(v_1, \dots, v_{k+\ell}) = \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_{k,\ell}} \epsilon(\sigma)\phi(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)})\psi(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+\ell)}),$$

pour tous $v_1, \dots, v_{k+\ell} \in E$. En effet,

$$\begin{aligned}\big(\phi \wedge \psi\big)(v_1, \dots, v_{k+\ell}) &= \frac{1}{k!\ell!} \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_{k+\ell}} \epsilon(\sigma)\phi(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)})\psi(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+\ell)}) \\ &= \sum_{(\sigma', \tau', \tau'') \in \mathbb{S}_{k,\ell} \times \mathbb{S}_k \times \mathbb{S}_\ell} \epsilon(\sigma')\epsilon(\tau')\epsilon(\tau'')\phi(v_{\sigma(\tau'(1))}, \dots, v_{\sigma(\tau'(k))})\psi(v_{\sigma(k+\tau''(1))}, \dots, v_{\sigma(k+\tau''(\ell))})\frac{1}{k!\ell!} \\ &= \sum_{\sigma' \in \mathbb{S}_{k,\ell}} \epsilon(\sigma')\phi(v_{\sigma'(1)}, \dots, v_{\sigma'(k)})\psi(v_{\sigma'(k+1)}, \dots, v_{\sigma'(k+\ell)}),\end{aligned}$$

où l'on a utilisé que

$$\phi(v_{\sigma'(1)}, \dots, v_{\sigma'(k)}) = \frac{1}{k!} \sum_{\tau' \in \mathbb{S}_k} \epsilon(\tau')\phi(v_{\sigma'(\tau'(1))}, \dots, v_{\sigma'(\tau'(k))})$$

et

$$\psi(v_{\sigma'(k+1)}, \dots, v_{\sigma'(k+\ell)}) = \frac{1}{\ell!} \sum_{\tau'' \in \mathbb{S}_\ell} \epsilon(\tau'')\psi(v_{\sigma'(k+\tau''(1))}, \dots, v_{\sigma'(k+\tau''(\ell))}),$$

vu que ϕ et ψ sont alternées et, en conséquence, anti-symétriques.

(b) Soit $\sigma_{k,\ell} \in \mathbb{S}_{k+\ell}$ la permutation donnée par

$$\sigma_{k,\ell}(i) = \begin{cases} \ell + i, & \text{si } i \in \llbracket 1, k \rrbracket, \\ i - k, & \text{si } i \in \llbracket k+1, k+\ell \rrbracket. \end{cases}$$

Noter que $\epsilon(\sigma_{k,\ell}) = (-1)^{k\ell}$. Soit $\mathsf{R}_{\sigma_{k,\ell}} : \mathbb{S}_{k+\ell} \to \mathbb{S}_{k+\ell}$ l'application bijective donnée par

$\mathsf{R}_{\sigma_{k,\ell}}(\sigma) = \sigma\sigma_{k,\ell}$, pour $\sigma \in \mathbb{S}_{k+\ell}$. On voit bien que $\mathsf{R}_{\sigma_{k,\ell}}(\mathbb{S}_{\ell,k}) = \mathbb{S}_{k,\ell}$. Cela nous dit que

$$\begin{aligned}
\big(\phi \wedge \psi\big)(v_1, \dots, v_{k+\ell}) &= \sum_{\sigma' \in \mathbb{S}_{k,\ell}} \epsilon(\sigma')\phi(v_{\sigma'(1)}, \dots, v_{\sigma'(k)})\psi(v_{\sigma'(k+1)}, \dots, v_{\sigma'(k+\ell)}) \\
&= \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_{\ell,k}} \epsilon(\sigma\sigma_{k,\ell})\phi(v_{\sigma(\sigma_{k,\ell}(1))}, \dots, v_{\sigma(\sigma_{k,\ell}(k))})\psi(v_{\sigma(\sigma_{k,\ell}(k+1))}, \dots, v_{\sigma(\sigma_{k,\ell}(k+\ell))}) \\
&= \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_{\ell,k}} \epsilon(\sigma)\epsilon(\sigma_{k,\ell})\phi(v_{\sigma(\ell+1)}, \dots, v_{\sigma(k+\ell)})\psi(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(\ell)}) \\
&= (-1)^{k\ell} \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_{\ell,k}} \epsilon(\sigma)\psi(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(\ell)})\phi(v_{\sigma(\ell+1)}, \dots, v_{\sigma(k+\ell)}) \\
&= (-1)^{k\ell}\big(\psi \wedge \phi\big)(v_1, \dots, v_{k+\ell}).
\end{aligned}$$

En conséquence,

$$\phi \wedge \psi = (-1)^{k\ell}\psi \wedge \phi.$$

(c) L'item précédent nous dit que dans ce cas

$$\phi \wedge \psi = -\psi \wedge \phi.$$

(d) On affirme que

$$(\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_k)(v_1, \dots, v_k) = \det\Big(\big(\phi_i(v_j)\big)_{i,j \in [\![1,k]\!]}\Big), \tag{1}$$

pour tous $v_1, \dots, v_k \in E$. On va démontrer (1) par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$, le cas $k = 1$ étant trivial. On suppose que l'identité (1) est vérifiée pour $k-1$, avec $k \geq 2$. Soient $\phi_1, \dots, \phi_k \in \Lambda^1 E^*$ et $\phi = \phi_2 \wedge \cdots \wedge \phi_k$. On note d'abord que l'application $\mathbb{S}_{1,k-1} \to [\![1,k]\!]$ donnée par $\sigma \mapsto \sigma(1)$ est une bijection telle que $\epsilon(\sigma) = (-1)^{1+\sigma(1)}$. On voit bien que

$$\begin{aligned}
(\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_k)(v_1, \dots, v_k) &= \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_{1,k-1}} \epsilon(\sigma)\phi_1(v_{\sigma(1)})\phi(v_{\sigma(2)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \\
&= \sum_{p=1}^{k} (-1)^{p+1}\phi_1(v_p)\det\Big(\big(\phi_i(v_j)\big)_{i \in [\![2,k]\!], j \in [\![1,k]\!] \setminus \{p\}}\Big) \\
&= \det\Big(\big(\phi_i(v_j)\big)_{i,j \in [\![1,k]\!]}\Big),
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé la définition récurrente du déterminant dans la dernière égalité.

(e) On voit bien que $v = \sum_{i=1}^n U_i^*(v)U_i$ pour tout $v \in \mathbb{R}^n$. En particulier,

$$\begin{aligned}
\phi(v_1, \dots, v_k) &= \phi\Big(\sum_{i_1=1}^{n} U_{i_1}^*(v_1)U_{i_1}, \dots, \sum_{i_k=1}^{n} U_{i_k}^*(v_k)U_{i_k}\Big) \\
&= \sum_{(i_1,\dots,i_k) \in [\![1,n]\!]^k} \phi(U_{i_1}, \dots, U_{i_k})U_{i_1}^*(v_1)\dots U_{i_k}^*(v_k) \\
&= \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \phi(U_{i_1}, \dots, U_{i_k}) \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_k} \epsilon(\sigma)U_{i_1}^*(v_{\sigma(1)})\dots U_{i_k}^*(v_{\sigma(k)}) \\
&= \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \phi(U_{i_1}, \dots, U_{i_k})\big(U_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge U_{i_n}^*\big)(v_1, \dots, v_k),
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé l'item précédent dans la dernière égalité.

(*f*) L'item précédent nous dit précisément que $(U_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge U_{i_k}^*)_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n}$ forme une base de $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*$. En particulier,

$$\mathsf{dim}_{\mathbb{R}}\left(\Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*\right) = \binom{n}{k}$$

pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, et la dimension est zéro sinon.

(*g*) On écrit normalement $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ au lieu de $U_1^* \wedge \cdots \wedge U_n^*$. D'après l'item (d), on voit bien que

$$(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n)(v_1, \ldots, v_n) = \mathsf{det}(v_1, \ldots, v_n).$$

7. Soient $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ deux fonctions différentiables. Montrer l'égalité :

$$df \wedge dg = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}\right) dx \wedge dy.$$

Solution. On voit bien que

$$\begin{aligned} df \wedge dg &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}y\right) \wedge \left(\frac{\partial g}{\partial x}dx + \frac{\partial g}{\partial y}y\right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial x}dx \wedge dx + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y}dx \wedge dy + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}dy \wedge dx + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial y}dy \wedge dy \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}\right) dx \wedge dy, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé que $dx \wedge dx = dy \wedge dy = 0$ et $dx \wedge dy = -dy \wedge dx$.

8. Calculer $(xdx - ydy) \wedge (zdx + xdz)$.

Solution. On voit bien que

$$\begin{aligned} (xdx - ydy) \wedge (zdx + xdz) &= xzdx \wedge dx + x^2 dx \wedge dz - yzdy \wedge dx - yxdy \wedge dz \\ &= yzdx \wedge dy - xydy \wedge dz - x^2 dz \wedge dx. \end{aligned}$$

9. (*a*) Rappeler la définition de $d\phi$ où ϕ est une k-forme différentiable sur $\mathbb{R}^n$.

(*b*) Soit $\phi = f dx + g dy + h dz$ une 1-forme sur $\mathbb{R}^3$. Exprimer $d\phi$.

Solution.

(*a*) Étant donné une k-forme différentielle

$$\phi = \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n} f_{i_1,\ldots,i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k},$$

on rappelle que $d\phi$ est une $(k+1)$-forme différentielle donnée par

$$d\phi = \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n} df_{i_1,\ldots,i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}.$$

(*b*) On voit bien que

$$\begin{aligned} d\phi &= df \wedge dx + dg \wedge dy + dh \wedge dz \\ &= \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx \wedge dy + \left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x}\right) dz \wedge dx. \end{aligned}$$

10. Sur $\mathbb{R}^n$, on se donne une k-forme différentielle ω et une ℓ-forme différentielle ϕ. Démontrer les égalités :

(*a*) $d(\omega \wedge \phi) = d\omega \wedge \phi + (-1)^k \omega \wedge d\phi$,

(*b*) $d(d\omega) = 0$ si ω est de classe C^2.

Solution.

(*a*) On écrira

$$\omega = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} f_{i_1,\ldots,i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

et

$$\phi = \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_\ell \le n} g_{j_1,\ldots,j_k} dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_\ell}.$$

En conséquence,

$$\omega \wedge \phi = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_\ell \le n} f_{i_1,\ldots,i_k} g_{j_1,\ldots,j_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_\ell}.$$

En conséquence,

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \phi) &= \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_\ell \le n} d\big(f_{i_1,\ldots,i_k} g_{j_1,\ldots,j_\ell}\big) \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_\ell} \\ &= \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_\ell \le n} g_{j_1,\ldots,j_\ell} df_{i_1,\ldots,i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_\ell} \\ &+ \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_\ell \le n} f_{i_1,\ldots,i_k} dg_{j_1,\ldots,j_\ell} \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_\ell} \\ &= \Big(\sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} df_{i_1,\ldots,i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}\Big) \wedge \Big(\sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_\ell \le n} g_{j_1,\ldots,j_\ell} dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_\ell}\Big) \\ &+ (-1)^k \Big(\sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} f_{i_1,\ldots,i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}\Big) \wedge \Big(\sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_\ell \le n} dg_{j_1,\ldots,j_\ell} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_\ell}\Big) \\ &= d\omega \wedge \phi + (-1)^k \omega \wedge d\phi. \end{aligned}$$

(*b*) On écrira

$$\omega = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} f_{i_1,\ldots,i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}.$$

Alors, on voit bien que

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} df_{i_1,\ldots,i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \\ &= \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_{i_1,\ldots,i_k}}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}, \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned}
d(d\omega) &= \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f_{i_1,\dots,i_k}}{\partial x_j\partial x_i}dx_j\wedge dx_i\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}\\
&= \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}\sum_{1\le i<j\le n}\frac{\partial^2 f_{i_1,\dots,i_k}}{\partial x_j\partial x_i}dx_j\wedge dx_i\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}\\
&\quad+\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}\sum_{1\le j<i\le n}\frac{\partial^2 f_{i_1,\dots,i_k}}{\partial x_j\partial x_i}dx_j\wedge dx_i\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}\\
&= \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}\sum_{1\le i<j\le n}\frac{\partial^2 f_{i_1,\dots,i_k}}{\partial x_j\partial x_i}dx_j\wedge dx_i\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}\\
&\quad-\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}\sum_{1\le j<i\le n}\frac{\partial^2 f_{i_1,\dots,i_k}}{\partial x_i\partial x_j}dx_i\wedge dx_j\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}=0,
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé que

$$\frac{\partial^2 f_{i_1,\dots,i_k}}{\partial x_j\partial x_i}=\frac{\partial^2 f_{i_1,\dots,i_k}}{\partial x_i\partial x_j},$$

pour tous $i,j\in [\![1,n]\!]$.

11. Soient $\phi = yzdx$, $\psi=\sin(z)dx+\cos(z)dy$ et $\xi = dy+zdz$ des 1-formes sur $\mathbb{R}^3$. Calculer $\phi\wedge\psi$, $\psi\wedge\xi$, $\xi\wedge\phi$, $d\phi$, $d\psi$ et $d\xi$.

Solution. On voit bien que

$$\phi\wedge\psi = yz\cos(z)dx\wedge dy,\quad \psi\wedge\xi=\sin(z)dx\wedge dy+z\cos(z)dy\wedge dz-z\sin(z)dz\wedge dx$$

et

$$\xi\wedge\phi=-yzdx\wedge dy+yz^2dz\wedge dx.$$

En outre,

$$d\phi=-zdx\wedge dy+ydz\wedge dx,\quad d\psi=\sin(z)dy\wedge dz+\cos(z)dz\wedge dx$$

et $d\xi=0$.

12. Montrer que les coordonnées polaires définissent un difféomorphisme entre deux ouverts de $\mathbb{R}^2$ à préciser.

Solution. Soit $F:\mathbb{R}_{\ge 0}\times[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2$ l'application donnée par $F(r,\theta)=(r\cos(\theta),r\sin(\theta))$. C'est clair que F est de classe C^∞ et surjective, et $\mathrm{jac}(F)(r,\theta)=r$. Soit $U=\mathbb{R}_{>0}\times\,]0,2\pi[$. On note que l'application $F|_U$ est injective et que $F(U)=\mathbb{R}^2\setminus(\mathbb{R}_{\ge0}\times\{0\})$. D'après le théorème d'inversion locale on conclut que $F|_U$ détermine un C^∞-difféomorphisme entre les ouverts U et $F(U)$.

13. Même question pour les coordonnées sphériques dans $\mathbb{R}^3$.

Solution. Soit $G : \mathbb{R}_{\geq 0} \times [0, 2\pi] \times [0, \pi] \to \mathbb{R}^3$ l'application donnée par

$$G(r, \theta, \phi) = \big(r \sin(\theta) \sin(\phi), r \cos(\theta) \sin(\phi), r \cos(\phi)\big).$$

C'est clair que G est de classe C^∞ et surjective, et $\operatorname{jac}(G)(r, \theta, \phi) = r^2 \sin(\phi)$. Soit $U = \mathbb{R}_{>0} \times \,]0, 2\pi[\, \times \,]0, \pi[$. On note que l'application $G|_U : U \to \mathbb{R}^3$ est injective et que $G(U) = \mathbb{R}^3 \setminus (\mathbb{R}_{\geq 0} \times \{0\} \times \mathbb{R})$. D'après le théorème d'inversion locale on conclut que $G|_U$ détermine un C^∞-difféomorphisme entre les ouverts U et $G(U)$.

14. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application différentiable, que l'on écrira $f = (f_1, \dots, f_m)$, et α et β des formes différentielles sur $\mathbb{R}^m$.

(a) Rappeler la définition de $f^*\alpha$.

(b) Démontrer l'égalité $f^*(\alpha \wedge \beta) = (f^*\alpha) \wedge (f^*\beta)$.

(c) Étant donné la forme différentielle $\alpha = \sum_{i=1}^m \alpha_i dy_i$, exprimer $f^*\alpha$.

(d) Soit $f(x, y, z) = (u, v) = (x^2, y^3 + \cos(z))$, $\alpha = udv + du$ et $\beta = du \wedge dv$, calculer $f^*\alpha$ et $f^*\beta$.

Solution.

(a) On rappelle que $f^*\alpha$ est la k-forme différentielle sur $\mathbb{R}^n$ donnée par

$$(f^*\alpha)(x)(v_1, \dots, v_k) = \alpha\big(f(x)\big)\big(df(x)(v_1), \dots, df(x)(v_k)\big),$$

pour tous $x, v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$.

(b) On voit bien que

$$\begin{aligned}
&f^*(\alpha \wedge \beta)(x)(v_1, \dots, v_{k+\ell}) = (\alpha \wedge \beta)\big(f(x)\big)\big(df(x)(v_1), \dots, df(x)(v_{k+\ell})\big) \\
&= \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_{k,\ell}} \epsilon(\sigma) \alpha\big(f(x)\big)\big(df(x)(v_{\sigma(1)}), \dots, df(x)(v_{\sigma(k)})\big) \\
&\qquad\qquad \beta\big(f(x)\big)\big(df(x)(v_{\sigma(k+1)}), \dots, df(x)(v_{\sigma(k+\ell)})\big) \\
&= \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_{k,\ell}} \epsilon(\sigma) f^*\alpha(x)(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) f^*\beta(x)(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+\ell)}) \\
&= \big((f^*\alpha) \wedge (f^*\beta)\big)(x)(v_1, \dots, v_{k+\ell}),
\end{aligned}$$

pour tous $x, v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$.

(c) On écrira $(x_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ les coordonnées d'un élément de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$. C'est clair que

$$\begin{aligned}
f^*\alpha(x)(v) = \alpha\big(f(x)\big)\big(df(x)(v)\big) &= \sum_{i=1}^m \alpha_i\big(f(x)\big) dy_i\big(df(x)(v)\big) \\
&= \sum_{i=1}^m (\alpha_i \circ f)(x) df_i(x)(v) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (\alpha_i \circ f)(x) \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) dx_j(v) \\
&= \sum_{j=1}^n \bigg(\sum_{i=1}^m (\alpha_i \circ f)(x) \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \bigg) dx_j(v),
\end{aligned}$$

pour tous $x, v \in \mathbb{R}^n$, ce qui nous dit que

$$f^*\alpha = \sum_{j=1}^n \bigg(\sum_{i=1}^m (\alpha_i \circ f) \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \bigg) dx_j.$$

(*d*) Les items précédents nous disent que

$$f^*\alpha = 2xdx + 3x^2y^2dy - x^2\sin(z)dz$$

et

$$f^*\beta = (f^*du)\wedge(f^*dv) = (2xdx)\wedge(3y^2dy - \sin(z)dz) = 6xy^2dx\wedge dy + 2x\sin(z)dz\wedge dx.$$

15. Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $\phi : U \to V$ un difféomorphisme, que l'on écrira $\phi(x) = (\phi_1(x), \ldots, \phi_n(x))$, pour $x \in U$. On écrira $(x_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ les coordonnées d'un élément de l'ouvert $U \subseteq \mathbb{R}^n$ et $(y_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ les coordonnées d'un élément de l'ouvert $V \subseteq \mathbb{R}^n$. Montrer que le (déterminant) jacobien $\mathrm{jac}(\phi)\colon U \to \mathbb{R}$ vérifie

$$\phi^*(dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n) = \mathrm{jac}(\phi)dx_1 \wedge \ldots dx_n.$$

Calculer le jacobien des coordonnées polaires et sphériques.

Solution. D'après l'exercice précédent, on voit bien que

$$\begin{aligned}
\phi^*(dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n) = \phi^*(dy_1) \wedge \cdots \wedge \phi^*(dy_n) &= \left(\sum_{i_1=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial x_{i_1}} dx_{i_1}\right) \wedge \cdots \wedge \left(\sum_{i_n=1}^{n} \frac{\partial f_n}{\partial x_{i_n}} dx_{i_n}\right) \\
&= \sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in[\![1,n]\!]^n} \frac{\partial f_1}{\partial x_{i_1}} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_{i_n}} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_n} \\
&= \sum_{\sigma\in\mathbb{S}_n} \frac{\partial f_1}{\partial x_{\sigma(1)}} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_{\sigma(n)}} dx_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge dx_{\sigma(n)} \\
&= \sum_{\sigma\in\mathbb{S}_n} \frac{\partial f_1}{\partial x_{\sigma(1)}} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_{\sigma(n)}} \epsilon(\sigma) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \\
&= \mathrm{jac}(\phi)dx_1 \wedge \ldots dx_n.
\end{aligned}$$

On a calculé le jacobien des coordonnées polaires dans l'exercice **12** et le jacobien des coordonnées sphériques dans l'exercice **13**.

16. Soient $r > 0$ et $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ l'application définie par :

$$\phi(x) = \frac{x}{\sqrt{\|x\|^2 + r^2}},$$

où $\| \ \|$ désigne la norme euclidienne. Montrer que ϕ est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur un ouvert que l'on précisera. Déterminer l'image de la boule de centre $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}$ et de rayon $\rho > 0$ par ϕ.

Solution. On note d'abord que

$$\left\|\phi(x)\right\| = \frac{\|x\|}{\sqrt{\|x\|^2 + r^2}} < 1$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, *i.e.* l'image $\mathsf{Img}(\phi)$ de ϕ est incluse dans la boule unité ouverte $B(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}, 1)$. On considère désormais que l'ensemble de d'arrivée de l'application ϕ est $B(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}, 1)$, *i.e.* on écrira $\phi : \mathbb{R}^n \to B(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}, 1)$.

Par ailleurs, on définit l'application $\psi : B(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}, 1) \to \mathbb{R}^n$ via

$$\psi(y) = \frac{ry}{\sqrt{1 - \|y\|^2}}.$$

C'est clair que les applications ϕ et ψ sont de classe C^∞, vu qu'elles s'écrivent comme des quotients de fonctions de classe C^∞ avec dénominateur non nul. Un calcul direct nous montre que

$$\psi\big(\phi(x)\big) = \psi\left(\frac{x}{\sqrt{\|x\|^2 + r^2}}\right) = \frac{\frac{rx}{\sqrt{\|x\|^2+r^2}}}{\sqrt{1 - \frac{\|x\|^2}{\|x\|^2+r^2}}} = x$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, et

$$\phi\big(\psi(y)\big) = \phi\left(\frac{ry}{\sqrt{1 - \|y\|^2}}\right) = \frac{\frac{ry}{\sqrt{1-\|y\|^2}}}{\sqrt{\frac{r^2\|y\|^2}{1-\|y\|^2} + r^2}} = y$$

pour tout $y \in B(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}, 1)$, *i.e.* $\psi \circ \phi = \mathsf{id}_{\mathbb{R}^n}$ et $\phi \circ \psi = \mathsf{id}_{B(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n},1)}$. En conséquence, ϕ détermine un C^∞-difféomorphisme entre $\mathbb{R}^n$ et $B(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}, 1)$.

Par ailleurs, on considère l'application $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par

$$\varphi(s) = \frac{s}{\sqrt{s^2 + r^2}}.$$

C'est clair que les applications φ est de classe C^∞, vu qu'elle s'écrit comme un quotient de fonctions de classe C^∞ avec dénominateur non nul. En outre,

$$\varphi'(s) = \frac{r^2}{(s^2 + r^2)^{3/2}} > 0,$$

pour tout $s \in \mathbb{R}$, ce qui implique que φ est strictement croissant. En particulier, $\varphi([0, \rho\,[\,) = [0, \varphi(\rho)\,[$, pour tout $\rho > 0$. Soit $\partial\bar{B}(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}, \rho)$ la sphère de centre $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}$ et de rayon $\rho \geq 0$. On voit bien que $\phi(\partial\bar{B}(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}, \rho)) = \partial\bar{B}(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}, \varphi(\rho))$, pour tout $\rho \geq 0$. En conséquence,

$$\begin{aligned}\phi\big(B(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}, \rho)\big) &= \phi\Bigg(\bigcup_{\rho' \in [0,\rho[} \partial\bar{B}(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}, \rho')\Bigg) = \bigcup_{\rho' \in [0,\rho[} \phi\big(\partial\bar{B}(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}, \rho')\big) \\ &= \bigcup_{\rho' \in [0,\rho[} \partial\bar{B}(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}, \varphi(\rho')) = \bigcup_{\rho'' \in [0,\varphi(\rho)[} \partial\bar{B}(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}, \rho'') = B\big(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}, \varphi(\rho)\big).\end{aligned}$$