MAT4213 - GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
Deuxième semestre — 2020-2021

Fiche 1: Calcul différentiel sur $\mathbb{R}^n$

1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application différentiable.

(a) Rappeler ce que cela signifie.

(b) Dériver la fonction $u(x) = f(x, -x)$.

(c) Différentier la fonction $g(x, y) = f(y, x)$.

2. Soient $p = (2, 0, -1) \in \mathbb{R}^3$, $v = (2, -1, 3) \in T_p\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^3$ et $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Calculer la différentielle de f au point p et dans la direction v dans les cas suivants :

(a) $f(x, y, z) = x + yz$,

(b) $f(x, y, z) = z^3 + x\cos(y)$.

3. (a) Soit U_i le i-ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ avec $1 \le i \le n$. Montrer que, pour toute fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$U_i[f] = \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Pour cette raison, on note souvent $U_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$.

(b) Soit $X = (X_1, \ldots, X_n)$ un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^n$. Montrer l'égalité :

$$X[f] = \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

4. Soient $V(x, y, z) = (y^2, 0, -x)$, $f(x, y, z) = xy$ et $g(x, y, z) = z^3$. Calculer :

(a) $V[f]$,

(b) $V[g]$,

(c) $V[fg]$,

(d) $fV[g] - gV[f]$,

(e) $V[V[f]]$.

5. Soient V et W deux champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^n$ tels que pour toute fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on ait $V[f] = W[f]$. Montrer que $V = W$.

6. Si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, on note $\Lambda^k E^*$ l'espace vectoriel des formes k-linéaires alternées sur E.

(a) Soient $\phi \in \Lambda^k E^*$ et $\psi \in \Lambda^\ell E^*$. Donner la définition de $\phi \wedge \psi \in \Lambda^{k+\ell} E^*$.

(b) Quel est le lien entre $\phi \wedge \psi$ et $\psi \wedge \phi$?

(c) Considérer le cas où $k = \ell = 1$.

(d) Soient $\phi_1, \ldots, \phi_k \in \Lambda^1 E^*$. Calculer $\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_k$.

(e) On note $(U_1, \ldots, U_n) = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n})$ la base canonique de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ et $(U_1^*, \ldots, U_n^*) = (dx_1, \ldots, dx_n)$ sa base duale. Soit $\phi \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*$. Étant donné $\phi \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*$, montrer que

$$\phi = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} \phi(U_{i_1}, \ldots, U_{i_k}) U_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge U_{i_k}^*.$$

(f) Montrer que $(U_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge U_{i_k}^*)_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n}$ forme une base de $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)^*$ et en déduire sa dimension.

(g) Comment écrit-on communément $U_1^* \wedge \cdots \wedge U_n^*$?

7. Soient $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ deux fonctions différentiables. Montrer l'égalité :

$$df \wedge dg = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x} \right) dx \wedge dy.$$

8. Calculer $(xdx - ydy) \wedge (zdx + xdz)$.

9. (a) Rappeler la définition de $d\phi$ où ϕ est une k-forme différentiable sur $\mathbb{R}^n$.

(b) Soit $\phi = fdx + gdy + hdz$ une 1-forme sur $\mathbb{R}^3$. Exprimer $d\phi$.

10. Sur $\mathbb{R}^n$, on se donne une k-forme différentielle ω et une ℓ-forme différentielle ϕ. Démontrer les égalités :

(a) $d(\omega \wedge \phi) = d\omega \wedge \phi + (-1)^k \omega \wedge d\phi$,

(b) $d(d\omega) = 0$ si ω est de classe C^2.

11. Soient $\phi = yzdx$, $\psi = \sin(z)dx + \cos(z)dy$ et $\xi = dy + zdz$ des 1-formes sur $\mathbb{R}^3$. Calculer $\phi \wedge \psi$, $\psi \wedge \xi$, $\xi \wedge \phi$, $d\phi$, $d\psi$ et $d\xi$.

12. Montrer que les coordonnées polaires définissent un difféomorphisme entre deux ouverts de $\mathbb{R}^2$ à préciser.

13. Même question pour les coordonnées sphériques dans $\mathbb{R}^3$.

14. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application différentiable, que l'on écrira $f = (f_1, \ldots, f_m)$, et α et β des formes différentielles sur $\mathbb{R}^m$.

(a) Rappeler la définition de $f^*\alpha$.

(b) Démontrer l'égalité $f^*(\alpha \wedge \beta) = (f^*\alpha) \wedge (f^*\beta)$.

(c) Étant donné la forme différentielle $\alpha = \sum_{i=1}^m \alpha_i dy_i$, exprimer $f^*\alpha$.

(d) Soit $f(x, y, z) = (u, v) = (x^2, y^3 + \cos(z))$, $\alpha = udv + du$ et $\beta = du \wedge dv$, calculer $f^*\alpha$ et $f^*\beta$.

15. Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $\phi : U \to V$ un difféomorphisme, que l'on écrira $\phi(x) = (\phi_1(x), \ldots, \phi_n(x))$, pour $x \in U$. On écrira $(x_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ les coordonnées d'un élément de l'ouvert $U \subseteq \mathbb{R}^n$ et $(y_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ les coordonnées d'un élément de l'ouvert $V \subseteq \mathbb{R}^n$. Montrer que le (déterminant) jacobien $\mathrm{jac}(\phi) : U \to \mathbb{R}$ vérifie

$$\phi^*(dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n) = \mathrm{jac}(\phi) dx_1 \wedge \ldots dx_n.$$

Calculer le jacobien des coordonnées polaires et sphériques.

16. Soient $r > 0$ et $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ l'application définie par :

$$\phi(x) = \frac{x}{\sqrt{\|x\|^2 + r^2}},$$

où $\| \ \|$ désigne la norme euclidienne. Montrer que ϕ est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur un ouvert que l'on précisera. Déterminer l'image de la boule de centre $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}$ et de rayon $\rho > 0$ par ϕ.