1
2
3
4

MAT4213 - GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

Deuxième semestre — 2020-2021

Premier Contrôle Continu

1. Soit $\alpha : J \to \mathbb{R}^3$ une courbe régulière paramétrée par longueur d'arc, où $J \subseteq \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert. On appelle **indicatrice sphérique** de α la courbe $\beta = \alpha' : J \to \mathbb{R}^3$.

(a) Montrer que la longueur de β sur le segment $[s_0, s_1] \subseteq J$ est l'intégrale de la courbure κ_α de α sur $[s_0, s_1]$.

(b) Déterminer toutes les courbes α dont l'indicatrice sphérique est constante.

(c) Déterminer toutes les courbes α dont l'indicatrice sphérique est incluse dans un cercle de rayon strictement positif.

(d) On suppose que α est birégulière. Montrer que la courbure κ_β de β satisfait que

$$\kappa_\beta(t) = \sqrt{\frac{\kappa_\alpha(t)^2 + \tau_\alpha(t)^2}{\kappa_\alpha(t)^2}},$$

pour tout $t \in J$, où τ_α est la torsion de α.
Indication : utiliser que la courbure d'une courbe régulière $\beta : J \to \mathbb{R}^3$ est

$$\kappa_\beta(s) = \frac{\left\|\beta'(s) \wedge \beta''(s)\right\|}{\left\|\beta'(s)\right\|^3}.$$

Solution.

(a) Comme $\beta(s) = \alpha'(s) = \mathbf{t}_\alpha(s)$ pour tout $s \in J$, la définition de courbure nous dit que $\beta'(s) = \mathbf{t}'_\alpha(s) = \kappa_\alpha(s)\mathbf{n}_\alpha(s)$ pour tout $s \in J$, ce qui implique que la longueur $\ell(\beta, s_0, s_1)$ de β sur le segment $[s_0, s_1] \subseteq J$ est

$$\ell(\beta, s_0, s_1) = \int_{s_0}^{s_1} \|\beta'(s)\| ds = \int_{s_0}^{s_1} \kappa_\alpha(s) ds,$$

vu que $\mathbf{n}_\alpha(s)$ a norme 1.

(b) Soit S^2 la sphère unité de $\mathbb{R}^3$. C'est clair qu'il existe $v \in S^2$ tel que $\alpha'(s) = v$ pour tout $s \in J$ si et seulement s'il existe $w \in \mathbb{R}^3$ tel que $\alpha(s) = sv + w$ pour tout $s \in J$. En conséquence, l'indicatrice sphérique d'une courbe α est constante si et seulement si α est la paramétrisation d'un segment avec vitesse de norme 1.

(c) On affirme que l'indicatrice sphérique d'une courbe α est incluse dans un cercle de centre x_0 et rayon $r > 0$ si et seulement s'il existe une courbe $\gamma : J \to \mathbb{R}^3$

paramétrée par longueur d'arc incluse dans un plan affine telle que $\alpha(s) = sx_0 + r\gamma(s)$, pour tout $s \in J$. On remarque d'abord que l'indicatrice sphérique d'une courbe α est incluse dans un cercle si et seulement s'il existe $x_0 \in \mathbb{R}^3$, $u \in \mathbb{R}^3$ non nul et $r > 0$ tels que

$$\|\alpha'(s) - x_0\| = r \text{ et } \langle \alpha'(s) - x_0, u \rangle = 0, \tag{1}$$

pour tout $s \in J$. On pose $\gamma(s) = (\alpha(s) - sx_0)/r$, pour tout $s \in J$. Les conditions (1) sont équivalentes à

$$\|\gamma'(s)\| = 1 \text{ et } \langle \gamma'(s), u \rangle = 0, \tag{2}$$

pour tout $s \in J$. Par définition, γ satisfait (2) si et seulement si elle est paramétrée par longueur d'arc et elle incluse dans un plan affine $H \subseteq \mathbb{R}^3$. En effet, la deuxième condition dans (2) est équivalente à $\mathrm{Img}(\gamma)$ incluse dans un plan affine orthogonal à u. En conséquence, l'indicatrice sphérique d'une courbe α est incluse dans un cercle de centre x_0 et rayon $r > 0$ si et seulement s'il existe une courbe $\gamma : J \to \mathbb{R}^3$ paramétrée par longueur d'arc incluse dans un plan affine telle que $\alpha(s) = sx_0 + r\gamma(s)$, pour tout $s \in J$. On remarque que si $x_0 = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}$, la première condition dans (1) est vérifiée seulement pour $r = 1$.

(d) D'après l'exercice 6 de la fiche 3, pour calculer la courbure de β on peut utiliser l'identité

$$\kappa_\beta(s) = \frac{\left\|\beta'(s) \wedge \beta''(s)\right\|}{\left\|\beta'(s)\right\|^3},$$

pour tout $s \in J$. Dans ce cas, $\beta'(s) = \mathbf{t}'_\alpha(s) = \kappa_\alpha(s)\mathbf{n}_\alpha(s)$, ce qui nous dit que

$$\begin{aligned}\beta''(s) &= \kappa'_\alpha(s)\mathbf{n}_\alpha(s) + \kappa_\alpha(s)\mathbf{n}'_\alpha(s) \\ &= \kappa'_\alpha(s)\mathbf{n}_\alpha(s) + \kappa_\alpha(s)\Big(-\kappa_\alpha(s)\mathbf{t}_\alpha(s) + \tau_\alpha(s)\mathbf{b}_\alpha(s)\Big).\end{aligned}$$

En conséquence,

$$\beta'(s) \wedge \beta''(s) = \kappa_\alpha(s)^3\mathbf{b}_\alpha(s) + \kappa_\alpha(s)^2\tau_\alpha(s)\mathbf{t}_\alpha(s),$$

pour tout $s \in J$, ce qui nous dit que

$$\kappa_\beta(s) = \frac{\sqrt{\kappa_\alpha(s)^6 + \kappa_\alpha(s)^4\tau_\alpha(s)^2}}{\kappa_\alpha(s)^3} = \sqrt{\frac{\kappa_\alpha(t)^2 + \tau_\alpha(t)^2}{\kappa_\alpha(t)^2}},$$

pour tout $s \in J$.

2. Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par

$$F(u, v) = (x, y) = (u^2 - v^2 + 2u, 2uv - 2v).$$

(a) Calculer le tiré en arrière par F de la 2-forme $\omega = dx \wedge dy$.

(b) Déterminer le lieu singulier C de F, c'est-à-dire l'ensemble des points (u, v)

où $d_{(u,v)}F$ n'est pas un isomorphisme.

(c) Donner un paramétrage par longueur d'arc de C.

(d) Déterminer les points singuliers de la courbe $F(C)$ et esquisser un dessin de $F(C)$.

Solution.

(a) On calcule :

$$\begin{aligned} F^*(dx \wedge dy) &= d(u^2 - v^2 + 2u) \wedge d(2uv - 2v) \\ &= (2udu - 2vdv + 2du) \wedge (2udv + 2vdu - 2dv) \\ &= 4(u+1)(u-1)du \wedge dv - 4v^2 dv \wedge du \\ &= 4(u^2 + v^2 - 1)du \wedge dv \end{aligned}$$

(b) On a $F^*(dx \wedge dy) = \det(dF) du \wedge dv$, donc le lieu singulier est le lieu d'annulation de $F^*(dx \wedge dy)$, c'est-à-dire le cercle unité (d'équation $u^2 + v^2 = 1$).

(c) On peut prendre $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t))$ qui vérifie bien $\|\alpha'(t)\| = 1$.

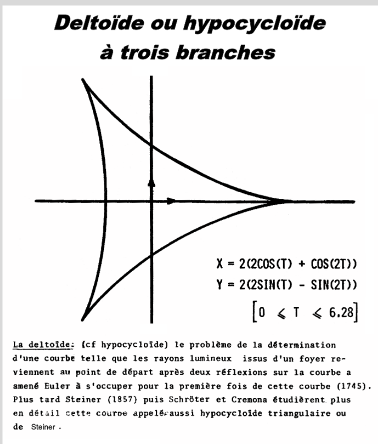
(d) La courbe $F(C)$ est paramétrée par

$$\begin{aligned} F(\alpha(t)) &= (\cos^2(t) - \sin^2(t) + 2\cos(t), 2\cos(t)\sin(t) - 2\sin(t)) \\ &= (\cos(2t) + 2\cos(t), \sin(2t) - 2\sin(t)). \end{aligned}$$

Les points singuliers sont donnés par les équations $\sin(2t) + \sin(t) = 0$ et $\cos(2t) - \cos(t) = 0$, c'est-à-dire $2t = t$ modulo 2π, ou encore $t = 0, \frac{2\pi}{3}$, ou $-\frac{2\pi}{3}$ modulo 2π.

Un développement limité en $t = 0$ donne $F(\alpha(t)) = (1 - 3t^2, -t^3) + o(t^3)$, c'est un point de rebroussement de première espèce. On a la même chose en $t = \pm 2\pi/3$.

Pour faire un dessin, on peut observer que $F \circ \alpha$ est le mouvement d'un point sur une roue de rayon 1 roulant à l'intérieur d'une roue de rayon 3. Une telle courbe porte le nom d'hypocycloïde à trois branches. Voici une illustration :



3. Soit S l'ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par l'équation $(x^2 + y^2 - 4)^2 + z^2 = 1$.

(*a*) Montrer que S est une surface de classe C^∞ (sous-variété de dimension 2).

(*b*) S est-elle compacte ? Justifier.

Solution.

(*a*) On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x,y,z) = (x^2+y^2-4)^2+z^2$. C'est clair que f est une application de classe C^∞, vu qu'il s'agit d'un polynôme, et que $S = f^{-1}(\{1\})$. On voit bien que

$$df(x,y,z) = 4(x^2+y^2-4)x dx + 4(x^2+y^2-4)y dy + 2z dz \neq 0$$

pour tout $(x,y,z) \in S$. En effet, le résultat est clair si $z \neq 0$. Si $z = 0$, on conclut que $x^2+y^2 \in \{3,5\}$, ce qui implique que $df(x,y,z) = 4(x^2+y^2-4)(x dx + y dy)$, qui s'annule si et seulement si $(x,y) = (0,0)$. Comme $x^2+y^2 \in \{3,5\}$, ce dernier cas est impossible. D'après la condition (S.3) dans l'exercice 1 de la fiche 3, on conclut que S est une surface de classe C^∞.

(*b*) S est une surface compacte. On note d'abord que S est une partie fermée de $\mathbb{R}^3$, vu que f est continue et $\{1\}$ est fermé. Il suffit de montrer que S est une partie bornée de $\mathbb{R}^3$. Pour le démontrer on remarque d'abord que $(x,y,z) \in S$ implique que $z^2 \leq 1$ et $(x^2+y^2-4)^2 \leq 1$, car $(x^2+y^2-4)^2 \geq 0$ et $z^2 \geq 0$. Par ailleurs, $(x^2+y^2-4)^2 \leq 1$ équivaut à $3 \leq x^2+y^2 \leq 5$, ce qui implique que $x^2+y^2 \leq 5$. En conséquence, $(x,y,z) \in S$ implique que $x^2+y^2+z^2 \leq 7$, *i.e.* $S \subseteq \bar{B}(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}, \sqrt{7})$. Comme S est fermé et borné dans $\mathbb{R}^3$, il est compact.

4. Soit α la 1-forme différentielle sur $\mathbb{R}^3$ définie par $\alpha = x dy - y dx + dz$.

(*a*) Montrer que $\alpha \wedge d\alpha$ est une 3-forme partout non nulle.

(*b*) Soit $r > 0$ et S_r la sphère de centre $(0,0,0)$ et de rayon r. Déterminer le lieu Σ_r des points p de S_r où la forme α_p s'annule sur le sous-espace vectoriel T_pS de $T_p\mathbb{R}^3$ (*i.e.* la composée $T_pS \xrightarrow{\text{inclusion}} T_p\mathbb{R}^3 \xrightarrow{\alpha_p} \mathbb{R}$ est nulle).

(*c*) Soit $\Sigma = \{(0,0,0)\} \cup \bigcup_{r>0} \Sigma_r$. Déterminer un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^3 \setminus \Sigma$ qui, en chaque point p engendre l'intersection de $\mathsf{Ker}(\alpha_p)$ et de l'espace tangent à S_r (avec $r = \|p\|$).

Solution.

(*a*) Soit α la 1-forme différentielle sur $\mathbb{R}^3$ définie par $\alpha = x dy - y dx + dz$. On calcule :

$$\begin{aligned} \alpha \wedge d\alpha &= (x dy - y dx + dz) \wedge (dx \wedge dy - dy \wedge dx) \\ &= 2dz \wedge dx \wedge dy \\ &= 2dx \wedge dy \wedge dz. \end{aligned}$$

Donc $\alpha \wedge d\alpha$ est partout non nulle.

(*b*) L'espace tangent (vectoriel) à S_r en (x,y,z) est le noyau de la forme différentielle $x dx + y dy + z dz$. Cette dernière est proportionnelle à α si et seulement $z(x dy -$

$y dx + dz) = x dx + y dy + z dz$, c'est-à-dire $zx = y$, $zy = -x$. On obtient alors $z^2 x = zy = -x$ et $z^2 y = -zx = -y$, ce qui impose $x = y = 0$. Réciproquement, les deux points $(0,0,\pm r)$ conviennent : le noyau de α y est horizontal ($z = 0$) tout comme l'espace tangent à S_r.

(c) On a $\Sigma = \{(0,0)\} \times \mathbb{R}$, l'axe des z. Sur $\mathbb{R}^3 \setminus \Sigma$, le champ de vecteurs $E_1 = (x, y, z)$ est orthogonal à S_r et le champ de vecteurs $E_2 = (-y, x, 1)$ est orthogonal au noyau de α. Ainsi le produit vectoriel $E_3 = E_1 \wedge E_2$ appartient à la fois au noyau de α et à l'espace tangent à S_r. On calcule :

$$E_3 = (y - xz, -zy - x, x^2 + y^2).$$

Pour être sûr, on peut vérifier :

$$\alpha(E_3) = x(-zy - x) - y(y - xz) + x^2 + y^2 = 0$$

et

$$(x dx + y dy + z dz)(E_3) = x(y - xz) + y(-zy - x) + z(x^2 + y^2) = 0.$$