1
2
3
4

MAT4111

Premier Semestre — 2019-2020

Premier Contrôle Continu

Justifier toutes les réponses

---

1. Soit A un anneau (commutatif) intègre et $S \subseteq A$ une partie multiplicative (*i.e.* $st \in S$ si $s, t \in S$) telle que $1_A \in S$ et $0_A \notin S$.

(a) Montrer que la localisation $S^{-1}A$ est intègre et que le morphisme d'anneaux $j_S : A \to S^{-1}A$ qui associe $a/1_A$ à $a \in A$ est injectif.

(b) Pour $a \in A$, montrer que $j_S(a) \in (S^{-1}A)^\times$ si et seulement s'il existe $s \in S$ tel que a divise s dans A.

(c) On suppose désormais que A est factoriel. Soient $\mathsf{Irr}(A)$ l'ensemble d'éléments irréductibles de A,

$$D = \{a \in \mathsf{Irr}(A) : \text{ il existe } s \in S \text{ tel que } a \text{ divise } s\}$$

et $D' = \mathsf{Irr}(A) \setminus D$. Montrer que si $a \in D'$, alors $j_S(a) \in S^{-1}A$ est irréductible.

(d) Démontrer que $S^{-1}A$ est factoriel.

Solution.

(a) On remarque d'abord que par intégrité de A, $a/s = a'/s'$ si et seulement si $s'a = sa'$, pour $a, a' \in A$ et $s, s' \in S$. En particulier, pour $a \in A$ et $s \in S$, $a/s = 0_{S^{-1}A}$ si et seulement si $a = 0_A$, car $0_A \notin S$. Cela implique immédiatement que j_S est injectif. En outre, $(aa')/(ss') = (a/s)(a'/s') = 0_{S^{-1}A}$ implique que $aa' = 0_A$, ce qui dit que $a = 0_A$ ou $a' = 0_A$, par intégrité de A, et en conséquence $a/s = 0_{S^{-1}A}$ ou $a'/s' = 0_{S^{-1}A}$.

(b) On suppose d'abord que a divise $s \in S$, *i.e.* il existe $b \in A$ tel que $s = ab$. Alors $(a/1_A).(b/s) = 1_A/1_A = 1_{S^{-1}A}$, ce qui nous que $j_S(a) = a/1_A$ est un élément inversible de $S^{-1}A$. Réciproquement, on suppose que $j_S(a)$ est un élément inversible de $S^{-1}A$. Soit b/s l'inverse, avec $b \in A$ et $s \in S$. Cela nous dit que $(a/1_A).(b/s) = 1_A/1_A = 1_{S^{-1}A}$, ce qui implique que $ab = s$, *i.e.* a divise $s \in S$ dans A, comme on voulait démontrer.

(c) Soit $a \in D'$. L'item (a) nous dit que $a \neq 0_{S^{-1}A}$ et l'item (b) implique que $j_S(a)$ n'est pas inversible. On écrit $a/1_A = (b/s).(c/t)$, avec $b, c \in A$ et $s, t \in S$. Cela implique que $sta = bc$. Comme A est factoriel et a est irréductible, a est premier et donc a divise b ou a divise c dans A. Sans perte de généralité, on suppose que $b = ab'$, avec $b' \in A$. En conséquence, $b'c = st$, ce qui implique que $c/1_A$ est inversible dans $S^{-1}A$. On conclut que $c/t = (c/1_A)(1_A/t)$ est aussi inversible.

(d) On montre d'abord que $S^{-1}A$ est atomique. Soit $a/s \in$ non nul et non inversible, avec $a \in A$ et $s \in S$. Alors, d'après les items précédents, a est non nul et a ne divise aucun élément $s' \in S$ (dans A), ce qui dit *a fortiori* que a n'est pas inversible dans A. Soit $\bar{D} \subseteq D$ (resp., $\bar{D}' \subseteq D'$) une partie telle pour toute paire (p_1, p_2) dans $\bar{D} \times \bar{D}$ (resp., $\bar{D}' \times \bar{D}'$) p_1 et p_2 sont associés si et seulement si $p_1 = p_2$ et telle que pour tout p dans D (resp., D') il existe $\bar{p}$ dans $\bar{D}$ (resp., $\bar{D}'$) associé avec p. C'est facile à montrer que, pour tout $(p, p') \in D \times D'$, p et p' ne sont jamais associés. Soit

$$a = u \prod_{p \in \bar{D}} p^{n_p} \prod_{p' \in \bar{D}'} (p')^{n_{p'}},$$

une décomposition de a avec $u \in A$ inversible et $n_p \in \mathbb{N}$ pour tout $p \in \bar{D} \cup \bar{D}'$. Alors,

$$a/s = \underbrace{(u/s) \prod_{p \in \bar{D}} (p/1_A)^{n_p}}_{\in (S^{-1}A)^\times} \prod_{p' \in \bar{D}'} (p'/1_A)^{n_{p'}}.$$

L'item précédent nous dit que $p'/1_A$ est irréductible pour tout $\bar{D}'$, tandis que u/s et les $p/1_A$ sont inversibles pour tout $p \in \bar{D}$, d'après le deuxième item.

Pour démontrer l'unicité, on écrit

$$a/s = (b/t) \prod_{p' \in \bar{D}'} (p'/1_A)^{n_{p'}} = (b'/t') \prod_{p' \in \bar{D}'} (p'/1_A)^{n'_{p'}},$$

avec $b/t, b'/t' \in S^{-1}A$ inversibles. On remarque la conséquence suivante du deuxième item : $b/t \in S^{-1}A$ est inversible si et seulement si $b/t = s/s'$, avec $s, s' \in S$. En conséquence, on peut supposer que $b, b' \in S$. On obtient

$$tt'a = st'b \prod_{p' \in \bar{D}'} (p')^{n_{p'}} = stb' \prod_{p' \in \bar{D}'} (p')^{n'_{p'}}.$$

Par définition de $\bar{D}'$ et le fait que A est factoriel on conclut que $n_{p'} = n'_{p'}$, pour tout $p' \in \bar{D}'$, ce qui implique que $st'b = stb'$, *i.e.* $b/t = b'/t'$, comme on voulait démontrer.

2. On considère les anneaux suivants $B_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}[X,Y]/(X^2+Y^2-1)$ et $B_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}[X,Y]/(X^2+Y^2-1)$. C'est clair que $B_{\mathbb{R}}$ s'identifie à un sous-anneau de $B_{\mathbb{C}}$.

(a) Soit $B'_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}[U,V]/(UV-1) = \mathbb{C}[U,U^{-1}]$. Montrer que le morphisme d'anneaux $\mathbb{C}$-linéaire $\mathbb{C}[X,Y] \to B'_{\mathbb{C}}$ qui envoie X dans $(U+V)/2$ et Y dans $i(V-U)/2$ induit un isomorphisme d'anneaux $\mathbb{C}$-linéaire $\varphi : B_{\mathbb{C}} \to B'_{\mathbb{C}}$.

(b) Montrer que l'anneau $B_{\mathbb{C}} \simeq \mathbb{C}[U,U^{-1}]$ est intègre et factoriel. En déduire que $B_{\mathbb{R}}$ est intègre aussi.
Indication : Montrer que $\mathbb{C}[U,U^{-1}]$ est la localisation de l'anneau intègre $\mathbb{C}[U]$ en la partie $S = \{U^n : n \in \mathbb{N}\}$ et utiliser l'exercice précédent.

(c) L'anneau $B_{\mathbb{R}}$ est-il atomique ?

(d) Par construction, pour tout $f \in B_{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\varphi(f) = \sum_{\ell \in [\![-n,n]\!]} c_\ell U^\ell, \tag{1}$$

avec $c_\ell \in \mathbb{C}$ pour tout $\ell \in [\![-n,n]\!]$ et $|c_n|^2 + |c_{-n}|^2 \neq 0$. On définit dans ce cas $\deg(f) = n$. Noter que l'expression précédente est unique et montrer que $c_\ell = \bar{c}_{-\ell}$, pour tout $\ell \in [\![-n,n]\!]$.

(e) Prouver que $\deg(fg) = \deg(f) + \deg(g)$, pour tous $f, g \in B_{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$.

(f) Montrer que $f \in B_{\mathbb{R}}$ est inversible si et seulement si $\deg(f) = 0$.

(g) Utiliser l'item (e) pour montrer que $1 \pm X$ et Y sont des éléments irréductibles non associés de $B_{\mathbb{R}}$.

(h) En déduire que l'anneau $B_{\mathbb{R}}$ n'est pas factoriel.

Solution.

(a) C'est clair que le seul morphisme d'anneaux $\mathbb{C}$-linéaire $\bar{\varphi} : \mathbb{C}[X,Y] \to B'_{\mathbb{C}}$, qui envoie X dans $(U+V)/2$ et Y dans $i(V-U)/2$, satisfait que

$$\bar{\varphi}(X^2+Y^2-1) = \left(\frac{U+V}{2}\right)^2 - \left(\frac{V-U}{2}\right)^2 - 1 = UV - 1 = 0,$$

i.e. $\bar{\varphi}$ induit un morphisme d'anneaux $\mathbb{C}$-linéaire $\varphi : B_{\mathbb{C}} \to B'_{\mathbb{C}}$. Soit $\bar{\psi}$ le seul morphisme d'anneaux $\mathbb{C}$-linéaire $\mathbb{C}[U,V] \to B_{\mathbb{C}}$, qui envoie U dans $X+iY$ et V dans $X-iY$. Alors,

$$\bar{\psi}(UV-1) = (X+iY)(X-iY) - 1 = X^2+Y^2-1 = 0,$$

i.e. $\bar{\psi}$ induit un morphisme d'anneaux $\mathbb{C}$-linéaire $\psi : B'_{\mathbb{C}} \to B_{\mathbb{C}}$. On laisse à la lectrice/au lecteur la vérification immédiate du fait que $\psi \circ \phi = \mathrm{id}_{B_{\mathbb{C}}}$ et que $\phi \circ \psi = \mathrm{id}_{B'_{\mathbb{C}}}$.

(b) On affirme que $\mathbb{C}[U,U^{-1}]$ est la localisation de $\mathbb{C}[U]$ en $\{U^n : n \in \mathbb{N}\}$. Pour le démontrer, il suffit de montrer que l'inclusion $i : \mathbb{C}[U] \to \mathbb{C}[U^{\pm 1}]$ satisfait la propriété universelle de la localisation. Noter que i coïncide avec la composition de l'inclusion $\iota : \mathbb{C}[U] \to \mathbb{C}[U,V]$ et la projection canonique $\pi : \mathbb{C}[U,V] \to \mathbb{C}[U,V]/(UV-1) = \mathbb{C}[U^{\pm 1}]$. Soit $f : \mathbb{C}[U] \to C$ un morphisme d'anneaux tel que $f(U)$ soit inversible dans C. Soit $g : \mathbb{C}[U,V] \to C$ le seul morphisme d'anneaux $\mathbb{C}$-linéaire tel que $g(U) = f(U) \in C$ et $g(V) = f(U)^{-1} \in C$. C'est clair que

$$g(UV-1) = g(U)g(V) - g(1) = f(U)f(U)^{-1} - 1 = 0,$$

ce qui implique que g induit un unique morphisme d'anneaux $\mathbb{C}$-linéaire $\bar{g} : \mathbb{C}[U,V]/(UV-1) \to C$ tel que $\bar{g} \circ \pi = g$. Par définition $g \circ \iota = f$, ce qui dit que $\bar{g} \circ i = f$. L'unicité de $\bar{g}$ est trivial.

Or, l'exercice précédent nous dit que l'anneau $B_{\mathbb{C}} \simeq \mathbb{C}[U,U^{-1}]$ est intègre et factoriel. En plus, comme $B_{\mathbb{R}}$ est un sous-anneau de $B_{\mathbb{C}}$, qui est intègre, $B_{\mathbb{R}}$ l'est aussi.

(c) Comme $B_{\mathbb{R}}$ est le quotient d'un anneau noethérien, il est noethérien, donc atomique.

(d) L'existence et unicité de l'écriture (1) est une conséquence de l'inclusion $B_{\mathbb{R}} \subseteq B_{\mathbb{C}} \simeq B'_{\mathbb{C}}$. On considère l'application $\mathbb{R}$-linéaire $\mathrm{inv} : \mathbb{C}[X,Y] \to \mathbb{C}[X,Y]$ donnée par $cX^nY^m \mapsto \bar{c}X^nY^m$, pour tout $n,m \in \mathbb{N}$ et $c \in \mathbb{C}$, où $\bar{c}$ est le complexe conjugué de c. Il s'agit d'une involution. C'est facile à vérifier que inv préserve l'idéal engendré par X^2+Y^2-1, et en particulier induit une involution $\mathbb{R}$-linéaire sur $B_{\mathbb{C}}$, telle que $B_{\mathbb{R}}$ est fixe par inv. En outre, on voit bien que $\mathrm{inv}' = \varphi \circ \mathrm{inv} \circ \psi$ est l'application $\mathbb{R}$-linéaire qui envoie cU^ℓ dans $\bar{c}U^{-\ell}$, pour tout $c \in \mathbb{C}$ et $\ell \in \mathbb{Z}$. Soit $f \in B_{\mathbb{R}}$ non nul et de degré $n \in \mathbb{N}$. Comme $\mathrm{inv}(f) = f$, alors

$$\sum_{\ell \in [\![-n,n]\!]} \bar{c}_\ell U^{-\ell} = \mathrm{inv}'\big(\varphi(f)\big) = \varphi(f) = \sum_{\ell \in [\![-n,n]\!]} c_\ell U^\ell,$$

ce qui donne l'identité demandée sur les coefficients c_ℓ.

(e) L'identité $\deg(fg) = \deg(f) + \deg(g)$, pour tous $f,g \in B_{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$, est une conséquence immédiate de l'écriture (1) et du produit dans $B'_{\mathbb{C}}$. En effet, soient $f,g \in B_{\mathbb{R}}$ tels que $\deg(f) = n$ et $\deg(g) = m$, avec $n,m \in \mathbb{N}$. On peut écrire

$$\varphi(f) = \sum_{\ell \in [\![-n,n]\!]} c_\ell U^\ell \text{ et } \varphi(g) = \sum_{\ell \in [\![-m,m]\!]} d_\ell U^\ell,$$

avec $c_n, d_m \neq 0$. Alors

$$\varphi(f.g) = \varphi(f)\varphi(g) = c_n d_m U^{m+n} + \sum_{\ell < m+n} e_\ell U^\ell,$$

avec des coefficients $e_\ell \in \mathbb{C}$. L'item précédent nous dit que $e_\ell = 0$ si $\ell < -n-m$. En conséquence $\deg(f+g) = m+n$.

(f) La preuve de cet item est la même que celle que l'on a fait pour les polynômes.

(g) Toute expression $f = aX + bY + d$, avec $a,b,d \in \mathbb{R}$, est un élément irréductible de $B_{\mathbb{R}}$ si et seulement si $a^2+b^2 \neq 0$. En effet, comme $\varphi(f) = cU + d + \bar{c}U^{-1}$ avec $c = (a-ib)/2$, f a degré 1, ce qui nous dit que f n'est pas inversible. D'après l'item (e), de toute décomposition $f = gh$ dans $B_{\mathbb{R}}$ on voit que le degré de g est zéro ou celui de h est zéro, ce qui implique que g ou h est inversible. En outre, comme deux éléments de $B_{\mathbb{R}}$ de degré 1 sont associés si et seulement s'ils sont colinéaires (sur $\mathbb{R}$), on voit bien que Y et $1 \pm X$ ne sont pas associés.

(h) On peut écrire $Y^2 = 1 - X^2 = (1-X)(1+X)$. D'après l'item précédent, il s'agit de deux factorisations non équivalentes en irréductibles, ce qui implique que $B_{\mathbb{R}}$ n'est pas factoriel.

3. Soit A un anneau (commutatif) tel que tout idéal premier est de type fini. Le but de cet exercice est de démontrer que A es noethérien. On procédera par l'absurde.

(a) Soit $\mathscr{I} \neq \emptyset$ l'ensemble d'idéaux de A qui ne sont pas de type fini. Montrer que $\mathscr{I}$ est un ensemble ordonné inductif pour l'inclusion $\subseteq$. Conclure que $\mathscr{I}$ admet un élément maximal $I \in \mathscr{I}$, d'après le lemme de Zorn.

(b) Si I es premier, en déduire une contradiction. On suppose désormais que I est non premier : soient $a, b \in A \setminus I$ tels que $ab \in I$. Montrer que $I + A.a$ est un idéal de type fini de A.

(c) Soit $J = \{x \in A : ax \in I\}$. Montrer que J et $J.a$ sont des idéaux de type fini de A.

(d) Soit $\{y_1 + x_1.a, \dots, y_n + x_n.a\}$ une partie génératrice de $I + A.a$, avec $y_i \in I$ et $x_i \in A$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Montrer que $I = A.y_1 + \cdots + A.y_n + J.a$ et conclure.
Indication : utiliser l'inclusion $I \subsetneq I + A.a$.

Solution.

(a) Soit $T \subseteq \mathscr{I}$ une famille d'idéaux dans $\mathscr{I}$, totalement ordonnée au sens de l'inclusion. On pose $\bar{I} = \cup_{I \in T} I$. C'est clair que $\bar{I}$ est un idéal de A. On affirme que $\bar{I}$ n'est pas de type fini. En effet, si $\{a_1, \dots, a_m\}$ est une famille génératrice de $\bar{I}$. Alors, pour tout $i \in [\![1, m]\!]$ il existe $I_i \in T$ tel que $a_i \in I_i$. Soit $I_0 \in T$ le maximum de $\{I_1, \dots, I_m\}$ dans l'ensemble totalement ordonné T. En particulier, $\{a_1, \dots, a_m\} \subseteq I_0$. Cela implique que $\bar{I} \subseteq I_0 \subseteq \bar{I}$ et en particulier que I_0 est de type fini, ce qui est absurde. D'après le lemme de Zorn, $\mathscr{I}$ admet un élément maximal $I \in \mathscr{I}$.

(b) Si I est premier, il est de type fini par hypothèse, ce qui est une contradiction. On suppose alors que I n'est pas premier. C'est clair que $I + A.a$ est un idéal de A. En plus, comme $I \subsetneq I + A.a$, car $a \in A.a + I$ mais $a \notin I$, la maximalité de I dans $\mathscr{I}$ nous dit que $I + A.a \notin \mathscr{I}$, *i.e.* $I + A.a$ est de type fini.

(c) C'est clair que $I \subseteq J$. En plus, $I \subsetneq J$, car $b \in J \setminus I$. La maximalité de I dans $\mathscr{I}$ nous dit que $J \notin \mathscr{I}$, *i.e.* J est de type fini. En conséquence $J.a$ est aussi de type fini, car si $\{b_1, \dots, b_\ell\}$ est une famille génératrice de J, $\{b_1.a, \dots, b_\ell.a\}$ est une famille génératrice de $J.a$.

(d) C'est clair que $A.y_1 + \cdots + A.y_n + J.a \subseteq I$. On va montrer l'autre inclusion. Comme $I \subseteq I + A.a$, alors, étant donné $c \in I$, on peut écrire

$$c = c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n + \big(c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n\big)a. \tag{2}$$

Il suffit de démontrer que $c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n \in J$. Or, (2) équivaut à

$$c - (c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n) = \big(c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n\big)a.$$

Comme $c - (c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n) \in I$, $c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n \in J$, et en conséquence $I = A.y_1 + \cdots + A.y_n + J.a$, comme on voulait démontrer. Cela implique que I est de type fini, ce qui est absurde. Par conséquent, A est noethérien.