MAT366

Deuxième semestre — 2019–2020

Fiche 5: Intégrales curvilignes

1. Donner la longueur de la courbe $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ donnée par

$$\alpha(t) = \Big(a\big(2\cos(t) - \cos(2t)\big), a\big(2\sin(t) - \sin(2t)\big)\Big),$$

où $a > 0$.

2. Soient $a, b > 0$. Calculer la longueur de l'arc de la chainette $y = a\cosh(x/a)$ compris entre le sommet $(0, a)$ et le point (b, h), où $h = a\cosh(b/a)$.

3. Calculer la longueur de la cardioïde décrite en polaires par $r = a(1 + \cos(\theta))$, où $a > 0$.

4. Soient A et B deux points de $\mathbb{R}^2$ tels que la distance entre A et B est $a > 0$. Sans perte de généralité on considère que $A = (0, 0)$ et $B = (a, 0)$. Soit $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée du plan de classe C^1 telle que $\varphi(0) = A$ et $\varphi(1) = B$. On note ℓ la longueur de la courbe paramétrée par φ.

(a) Rappeler la formule permettant de calculer ℓ.

(b) Montrer que $\ell \geq a$. Est-ce étonnant ?

(c) Montrer que $\ell = a$ si et seulement s'il existe une fonction $x : [0, 1] \to \mathbb{R}$ monotone telle que $\varphi(t) = (x(t), 0)$, pour tout $t \in [0, 1]$.

5. On va s'intéresser aux courbes de longueur minimale tracées sur la sphère

$$S^2 = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\big\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

de rayon 1 et de centre $O = (0, 0, 0)$. On appelle *grand cercle* de la sphère toute intersection de la sphère avec un plan passant par O.

Soient A et B deux points de S^2. Sans perte de généralité, on considère que $A = (0, 0, 1)$ et $B = (\sin(\psi_0), 0, \cos(\psi_0))$, avec $0 \leq \psi_0 \leq \pi$.

On considère une courbe tracée sur la sphère $M : [0, 1] \to S^2$ donnée par $t \mapsto (\cos(\theta(t))\sin(\psi(t)), \sin(\theta(t))\sin(\psi(t)), \cos(\psi(t))$ telle que les fonctions θ et ψ soient de classe C^1, $\theta(0) = 0$, $\psi(0) = 0$, $\theta(1) = 0$ et $\psi(1) = \psi_0$. On a donc $M(0) = A$ et $M(1) = B$. On note ℓ la longueur de la courbe paramétrée précédente.

(a) Montrer que

$$\ell = \int_0^1 \sqrt{\big(\theta'(t)\big)^2 \sin^2\big(\psi(t)\big) + \big(\psi'(t)\big)^2}\, dt.$$

(b) En déduire que la longueur de ℓ est plus grande que la longueur de l'arc de cercle du grand cercle tracé sur la sphère reliant A à B.

(c) En déduire que pour tous points A, B sur la sphère, le chemin sur la sphère le plus court reliant A à B est donné par l'arc de cercle reliant A à B d'un grand cercle de la sphère.