MAT366

Deuxième semestre — 2019–2020

Fiche 5: Intégrales curvilignes

1. Donner la longueur de la courbe $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ donnée par

$$\alpha(t) = \Big(a\big(2\cos(t) - \cos(2t)\big), a\big(2\sin(t) - \sin(2t)\big)\Big),$$

où $a > 0$.

Solution. C'est clair que α est périodique de période 2π, puisque les fonctiones $\sin$ et $\cos$ son périodiques de période 2π. En outre, on affirme que la la période minimale $p > 0$ de α est 2π. En effet, si P est une période de α, alors P est aussi une période de la fonction $t \mapsto \|\alpha(t)\|^2$ définie sur $\mathbb{R}$. Comme

$$\|\alpha(t)\|^2 = a\big(5 - 4\cos(t)\big),$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$, on voit que P doit être un multiple entier de 2π. Cela implique que la longueur de la courbe définie par α est

$$\ell = \int_0^{2\pi} \|\alpha'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} 2\sqrt{2}a\sqrt{1 - \cos(t)} dt = \int_0^{2\pi} 4a|\sin(t/2)| dt = 4^2 a,$$

où $\|\ \ \|$ est la norme euclidienne et l'on a utilisé les identités

$$\cos(2t)\cos(t) + \sin(2t)\sin(t) = \cos(t) \text{ et } 1 - \cos(t) = 2\sin^2(t/2).$$

2. Soient $a, b > 0$. Calculer la longueur de l'arc de la chainette $y = a\cosh(x/a)$ compris entre le sommet $(0, a)$ et le point (b, h), où $h = a\cosh(b/a)$.

Solution. La courbe indiquée est donnée par $\alpha(t) = (t, a\cosh(t/a))$. On voit bien que la longueur demandée est

$$\ell = \int_0^b \|\alpha'(t)\| dt = \int_0^b \sqrt{1 + \sinh^2(t/a)} dt = \int_0^b \cosh(t/a) dt$$
$$= \Big[a\sinh(t/a)\Big]_0^b = a\sinh(b/a),$$

où $\|\ \ \|$ est la norme euclidienne.

3. Calculer la longueur de la cardioïde décrite en polaires par $r = a(1 + \cos(\theta))$, où $a > 0$.

Solution. C'est clair que la courbe indiquée $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ est donnée par $\alpha(\theta) = (a(1+\cos(\theta))\cos(\theta), a(1+\cos(\theta))\sin(\theta))$. C'est clair que α est périodique de période 2π, puisque les fonctiones sin et cos son périodiques de période 2π. En outre, vu que $(2a,0) = \alpha(0) \neq \alpha(\pi) = (0,0)$, la période minimale de α est 2π. On voit bien que la longueur demandée est

$$\ell = \int_0^{2\pi} \|\alpha'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}a\sqrt{1+\cos(t)}dt = \int_0^{2\pi} 2a|\cos(t/2)|dt = 8a,$$

où $\| \ \|$ est la norme euclidienne et l'on a utilisé les identités

$$\cos(2t)\cos(t) + \sin(2t)\sin(t) = \cos(t) \text{ et } 1+\cos(t) = 2\cos^2(t/2).$$

4. Soient A et B deux points de $\mathbb{R}^2$ tels que la distance entre A et B est $a > 0$. Sans perte de généralité on considère que $A = (0,0)$ et $B = (a,0)$. Soit $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée du plan de classe C^1 telle que $\varphi(0) = A$ et $\varphi(1) = B$. On note ℓ la longueur de la courbe paramétrée par φ.

(a) Rappeler la formule permettant de calculer ℓ.

(b) Montrer que $\ell \geq a$. Est-ce étonnant ?

(c) Montrer que $\ell = a$ si et seulement s'il existe une fonction $x : [0,1] \to \mathbb{R}$ monotone telle que $\varphi(t) = (x(t),0)$, pour tout $t \in [0,1]$.

Solution.

(a) On rappelle que

$$\ell = \int_0^1 \|\varphi'(t)\| dt,$$

où $\| \ \|$ est la norme euclidienne.

(b) On écrit $\varphi(t) = (x(t), y(t))$. Alors $\|\varphi'(t)\| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \geq \sqrt{x'(t)^2} = |x'(t)|$. Cela implique que

$$\ell = \int_0^1 \|\varphi'(t)\| dt \geq \int_0^1 |x'(t)| dt \geq \left| \int_0^1 x'(t)dt \right| = |x(1) - x(0)| = a.$$

(c) On suppose qu'il existe une fonction $x : [0,1] \to \mathbb{R}$ monotone telle que $\varphi(t) = (x(t),0)$, pour tout $t \in [0,1]$. Comme $x(1) = a > x(0) = 0$, x est croissante et sa dérivée est donc non négative. Alors,

$$\ell = \int_0^1 \|\varphi'(t)\| dt = \int_0^1 |x'(t)| dt = \int_0^1 x'(t)dt = x(1) - x(0) = a.$$

Réciproquement, on suppose que $\ell = a$. Cela implique que

$$\int_0^1 \big(\|\varphi'(t)\| - |x'(t)|\big)dt = 0.$$

Comme $t \mapsto \|\varphi'(t)\| - |x'(t)|$ est une fonction continue, non négative et son intégrale est nulle, on conclut qu'elle est la fonction nulle. Cela implique que $y'(t) = 0$, pour tout $t \in]0,1[$. Comme $y(0)=0$, on conclut que $y(t)=0$, pour tout $t \in [0,1]$, *i.e.* $\varphi(t)=(x(t),0)$, pour tout $t \in [0,1]$. En outre, la condition $\ell = a$ implique que

$$\int_0^1 |x'(t)|dt \geq \left| \int_0^1 x'(t)dt \right|,$$

ce qui dit en particulier que la dérivée de x est toujours non négative sur $]0,1[$ ou toujours non positive sur $]0,1[$. Comme $x(1)=a>0=x(0)$, on conclut que x est croissante.

5. On va s'intéresser aux courbes de longueur minimale tracées sur la sphère

$$S^2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2=1\right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

de rayon 1 et de centre $O=(0,0,0)$. On appelle *grand cercle* de la sphère toute intersection de la sphère avec un plan passant par O.

Soient A et B deux points de S^2. Sans perte de généralité, on considère que $A=(0,0,1)$ et $B=(\sin(\psi_0),0,\cos(\psi_0))$, avec $0 \leq \psi_0 \leq \pi$.

On considère une courbe tracée sur la sphère $M : [0,1] \to S^2$ donnée par $t \mapsto (\cos(\theta(t))\sin(\psi(t)), \sin(\theta(t))\sin(\psi(t)), \cos(\psi(t))$ telle que les fonctions θ et ψ soient de classe C^1, $\theta(0)=0$, $\psi(0)=0$, $\theta(1)=0$ et $\psi(1)=\psi_0$. On a donc $M(0)=A$ et $M(1)=B$. On note ℓ la longueur de la courbe paramétrée précédente.

(a) Montrer que

$$\ell = \int_0^1 \sqrt{\left(\theta'(t)\right)^2 \sin^2\left(\psi(t)\right) + \left(\psi'(t)\right)^2} dt.$$

(b) En déduire que la longueur de ℓ est plus grande que la longueur de l'arc de cercle du grand cercle tracé sur la sphère reliant A à B.

(c) En déduire que pour tous points A, B sur la sphère, le chemin sur la sphère le plus court reliant A à B est donné par l'arc de cercle reliant A à B d'un grand cercle de la sphère.

Solution.

(a) La formule de la longueur ℓ est un calcul directe.

(b) C'est clair que

$$\ell = \int_0^1 \sqrt{\left(\theta'(t)\right)^2 \sin^2\left(\psi(t)\right) + \left(\psi'(t)\right)^2} dt \geq \int_0^1 \sqrt{\left(\psi'(t)\right)^2} dt = \psi_0,$$

qui est la longueur de l'arc de cercle du grand cercle tracé sur la sphère reliant A à B.

(c) On remarque que, étant donnés deux points A et B sur la sphère, on peut toujours faire une rotation du repère de coordonnées pour tomber sur la situation décrite dans l'énoncé pour A et B. La question est alors une conséquence directe de l'item précédent.